

# Deteccción de fallas mediante el espacio de paridad continuo en un sistema de tres tanques

Jesús Víctor Manuel Cid Medina, Efraín Alcorta García,  
César Elizondo González

FIME-UANL

chumiscm@yahoo.com , efrain.alcortagr@uanl.edu.mx , celizond@yahoo.com



## RESUMEN

*En este trabajo se propone una metodología para el diseño de un espacio de paridad para sistemas continuos. Una dificultad al utilizar procedimientos basados en muestras de las señales entrada-salida es que se reduce la cantidad de fallas que pueden ser localizadas con respecto al procedimiento equivalente en tiempo continuo. Un primer enfoque considerado en este trabajo para evitar esta desventaja consiste en utilizar un derivador de señales. Mediante un estimador de las derivadas de la entrada y la salida hasta de orden  $n$ , el esquema propuesto permite la detección y localización de fallas con al menos las mismas posibilidades que cuando se utiliza el método basado en observadores en tiempo continuo.*

## PALABRAS CLAVES

Deteccción de fallas, espacio de paridad, sistema continuo, tanques.

## ABSTRACT

*In this work, a methodology for the design of a space of parity for continuous systems is proposed. A difficulty when using procedures based on samples of the in-out signals is that is reduced the amount of faults that can be located with respect to the equivalent procedure in continuous time. A first approach considered in this work to avoid this disadvantage consists of using a derivator of the signals. By means of an estimator of derivates from the entrance and the exit until of order  $n$ , the proposed scheme allows the detection and location of faults with at least the same possibilities that when is used the method based on observers in continuous time.*

## KEYWORDS

Detection of faults, space of parity, continuous system, tank.

## INTRODUCCIÓN

En el marco del diagnóstico basado en modelos, debido a los avances de la tecnología, las señales útiles para diagnóstico se encuentran frecuentemente disponibles en forma digital, es decir, la adquisición de datos incluye un proceso de muestreo. Por esto se requiere de métodos de diagnóstico que tomen en cuenta el proceso de muestreo. Uno de los primeros trabajos discutiendo el diagnóstico de sistemas muestreados fue introducido por (Viswanadham y Minto 1990.), en donde se proponen tres esquemas que están orientados principalmente para la

detección de fallas. Recientemente, en (Rank 1998) un esquema óptimo (en un sentido definido en ese mismo trabajo) para el diagnóstico de sistemas muestreados fue propuesto.

La consideración de incertidumbre en el diagnóstico de sistemas muestreados fue analizado en (Zhang *et al.*, 2002). En (Fadali, 2003) se propone un esquema basado en observadores para el diagnóstico de fallas utilizando la técnica de “lifting” y combinando multi-muestreo. Como resultado se presenta un esquema que es robusto a entradas desconocidas. En (Izadi *et al.*, 2005a), un esquema multi-muestreo con la característica de muestreo rápido para diagnóstico es propuesto. Lo anterior permite obtener la detección y aislamiento de fallas en periodos cortos de tiempo, de hecho, más cortos que los propuestos hasta la fecha.

Una discretización de sistemas que es invariante a la norma para diagnóstico de fallas fue introducida en (Izadi *et al.*, 2005b) y fue utilizada además para analizar el desempeño de diferentes métodos de detección de fallas en (Izadi *et al.*, 2007). La consideración de muestreo rápido se utilizó también en el contexto de diagnóstico en (Zhong *et al.*, 2006). Una solución basada en observadores con diseño óptimo y uso de la técnica de “lift” fue propuesta en (Zhong *et al.*, 2007) y otra basada en filtro de Kalman con muestreo no uniforme fue propuesto por (Li *et al.*, 2008). En este caso el filtro es obtenido a partir de mediciones.

Un repaso de los principales resultados relacionados con el diagnóstico de fallas de sistemas muestreados puede ser revisado en el trabajo (Zhang y Ding, 2008). Como es reconocido en (Izadi *et al.*, 2007) y en (Zhang y Ding, 2008), los mejores resultados obtenidos hasta el momento cuentan con la limitación en el número de fallas que puede ser aislada (que resulta ser menor) con respecto a la contraparte continua. Lo anterior motiva la búsqueda de un método de diagnóstico basado en modelos que no cuente con la reducción del número de fallas que pueden ser localizadas, es decir, que pueda localizar al menos la misma cantidad de fallas que el que sería posible utilizando un procedimiento en tiempo continuo.

En este trabajo se propone el uso de un estimador de las derivadas de la entrada y la salida y con

esto la construcción de un espacio de paridad de tiempo continuo. Como valor agregado se tiene que la limitación del número de fallas que puede ser localizado mediante la utilización de las muestras en el algoritmo de diagnóstico se relaja. Es decir, con el método propuesto es posible localizar al menos el mismo número de fallas que cuando se utiliza un esquema en tiempo continuo.

## PRELIMINARES

El diagnóstico basado en modelos se realiza generalmente en dos etapas (Frank, 1990): primero se obtienen señales que dependen sólo de las fallas. Estas señales son idealmente cero en ausencia de fallas y diferentes de cero en otro caso. El segundo paso consiste en una evaluación de los residuos para poder extraer la información sobre las fallas. Para realizar esta tarea se utiliza una función de evaluación, así como un valor de umbral. El umbral es utilizado para evitar alarmas falsas cuando el residuo no es cero y hay ausencia de fallas. Esta situación puede ocurrir cuando dinámica no modelada o perturbaciones afectan al sistema bajo estudio.

## ESPACIO DE PARIDAD

Una de las primeras referencias con un análisis en el espacio de estado para espacios de paridad fue considerado en (Chow y Willsky, 1984). Desde el punto de vista entrada-salida se puede revisar en (Gertler, 1998). En este trabajo utilizaremos una descripción convencional, la cual puede ser encontrada en (Frank, 1990), ver también (Ding, 2008). Considere un sistema lineal, invariante en el tiempo y discreto dado por:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + E_d d(k) + E_f f(k) \quad (1)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) + F_d d(k) + F_f f(k) \quad (2)$$

Donde  $x(k)$  es el estado de dimensión  $n$ ,  $u(k)$  es el vector de entradas de dimensión  $p$ . Las matrices  $A, B, C, D, E_d, E_f, F_d$  y  $F_f$  son constantes, conocidas y de dimensiones apropiadas. Suponer que el par  $(A, C)$  es observable y que rango  $(C) = m$ . Con la finalidad de obtener un generador de residuos suponemos primero que  $f(k) = 0$  y  $d(k) = 0$ . Expresando  $y(k-s)$ , con  $s \geq n$ , en términos de  $x(k-s)$ ,  $u(k-s)$  y de igual forma  $y(k-s+1)$  en términos de  $x(k-s)$ ,  $u(k-s)$  y  $u(k-s+1)$ ,

se forma una ventana de tiempo con los valores pasados de la entrada y la salida cuyo tamaño está en función del valor de  $s$ . El procedimiento se sigue sucesivamente hasta llegar a  $y(k)$  dando lugar a las siguientes matrices:

$$y_s(k) = \begin{bmatrix} y(k-s) \\ y(k-s+1) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix}; u_s(k) = \begin{bmatrix} u(k-s) \\ u(k-s+1) \\ \vdots \\ u(k) \end{bmatrix}$$

$$H_{O,s} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^s \end{bmatrix}; H_{u,s} = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ CA^{s-1}B & \dots & CB & D \end{bmatrix};$$

con las cuales se obtiene la siguiente ecuación, que se conoce como relación de paridad:

$$y_s(k) = H_{O,s}x(k-s) - H_{u,s}u_s(k) \quad (3)$$

Note que los vectores de entradas  $u_s(k)$  y de salidas  $y_s(k)$  se forman con las mediciones y se suponen conocidas. Las matrices  $H_{O,s}$  y  $H_{u,s}$  son constantes y formadas con las matrices del sistema, las cuales se suponen conocidas. La única variable desconocida es  $x(k-s)$ .

La idea básica de la relación de paridad es utilizar el hecho de que si  $s \geq n$  entonces  $\text{rango}(H_{O,s}) = n < \#$  de renglones de  $H_{O,s}$ , con lo cual existe al menos un vector renglón  $v_s \neq 0$  de dimensión  $(s+1)m$  tal que

$$v_s H_{O,s} = 0 \quad (4)$$

Así el generador de residuos basado en relaciones de paridad está construido por:

$$r(k) = v_s (y_s(k) - H_{u,s}u_s(k)) = 0 \quad (5)$$

Los vectores que satisfacen (5) son llamados vectores de paridad y a ese conjunto se le conoce como espacio de paridad de orden  $s$ -ésimo.

Al considerar el efecto de las perturbaciones y fallas en el residuo ahora se considera  $f(k) \neq 0$  y  $d(k) \neq 0$ , obteniendo, adicionalmente, las siguientes matrices:

$$f_s(k) = \begin{bmatrix} f(k-s) \\ f(k-s+1) \\ \vdots \\ f(k) \end{bmatrix}; d(k) = \begin{bmatrix} d(k-s) \\ d(k-s+1) \\ \vdots \\ f(k) \end{bmatrix}$$

$$H_{f,s} = \begin{bmatrix} F_f & 0 & \dots & 0 \\ CE_f & F_f & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ CA^{s-1}E_f & \dots & CE_f & F_f \end{bmatrix};$$

$$H_{d,s} = \begin{bmatrix} F_d & 0 & \dots & 0 \\ CE_d & F_d & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ CA^{s-1}E_d & \dots & CE_d & F_d \end{bmatrix}$$

### ESTIMADOR DE LA DERIVADA

El estimador de la derivada fue tomado de (Vasiljevic y Khalil, 2008), en el cual un observador de alta ganancia es utilizado como diferenciador y es representado por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -\hat{a}_1/\varepsilon & 1 & \dots & 0 \\ -\hat{a}_1/\varepsilon^2 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -\hat{a}_n/\varepsilon^n & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}; \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1/\varepsilon \\ \hat{a}_1/\varepsilon^2 \\ \vdots \\ \hat{a}_n/\varepsilon^n \end{bmatrix}$$

donde el polinomio característico de  $\hat{A}$  es Hurwitz. La función de transferencia de  $u$  a  $\hat{x}$  cuando  $\varepsilon$  tiende a cero está dada por:  $T(s) = [1s \dots s^{n-2} s^{n-1}]^T$  de manera que asintóticamente conforme  $\varepsilon \rightarrow 0$ , el sistema descrito anteriormente actúa como diferenciador bajo la consideración de que la entrada  $u$  es continua y diferenciable.

La selección de la variable  $\varepsilon$  es de suma importancia en el diseño del derivador sobre todo en señales con ruido. De manera experimental se sabe que al elegir un valor muy pequeño de  $\varepsilon$  para una entrada libre de ruido mejora de manera significativa la estimación de la derivada, sin embargo, si la señal de entrada está sujeta a ruido, la estimación no será tan buena como en el caso anterior debido al efecto que el derivador tendrá sobre el ruido de la señal. En este caso la selección de  $\varepsilon$  se vuelve crítica y entonces se busca un valor de  $\varepsilon$  que proporcione una buena estimación aún si la señal no está libre de ruido. El valor de  $\varepsilon$  utilizado en el ejemplo de la sección  $V$  es de 0.3.

## ESPACIO DE PARIDAD PARA SISTEMAS CONTINUOS

De manera similar a como se realizó el espacio de paridad para sistemas discretos es posible el diseño del espacio de paridad para sistemas continuos. Se considera el siguiente sistema lineal e invariante en el tiempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + E_d d(t) + E_f f(t) \quad (9)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + F_d d(t) + F_f f(t) \quad (10)$$

Al igual que para el caso discreto  $x(t)$  es el estado de dimensión  $n$ ,  $u(t)$  es el vector de entradas de dimensión  $p$ . Las matrices  $A, B, C, D, E_d, E_f, F_d$  y  $F_f$  son constantes, conocidas y de dimensiones apropiadas, también se supone que el par  $(A, C)$  es observable y que rango  $(C) = m$ .

El desarrollo que se sigue, en este caso, para obtener el generador de residuos es muy similar al caso discreto, solo que aquí se utilizan las derivadas de la entrada y la salida del sistema en instantes definidos de tiempo, en lugar de mediciones anteriores de la entrada y la salida como se analizó. Las suposiciones que se hicieron en el caso discreto son idénticamente utilizadas y removidas para el caso continuo, generándose así un conjunto de matrices que también son idénticas a las obtenidas para el caso continuo.

De este modo la relación de paridad para el caso continuo, al considerar perturbaciones y fallas, está dada como:

$$y_s(t) = H_{O,s} x(t) - H_{u,s} u_s(t) + H_{f,s} f_s(t) + H_{d,s} d_s(t) \quad (11)$$

Y el generador de residuo como:

$$r_s(t) = v_s(H_{f,s} f_s(t) + H_{d,s} d_s(t)) \quad (12)$$

## EJEMPLO DE APLICACIÓN

Como ejemplo para la construcción de un espacio de paridad continuo, se considera un sistema de tres tanques interconectados como el que se muestra en la figura 1, una descripción detallada puede ser encontrada en (Ding, 2008). El modelo no lineal se obtiene aplicando directamente las leyes de Torricelli, tomando en cuenta los flujos de entrada y salida de cada tanque.

Para el diseño del espacio de paridad se utiliza un modelo linealizado alrededor de un punto de operación  $h_1=45cm, h_2=15cm$  y  $h_3=30cm$  y está dado

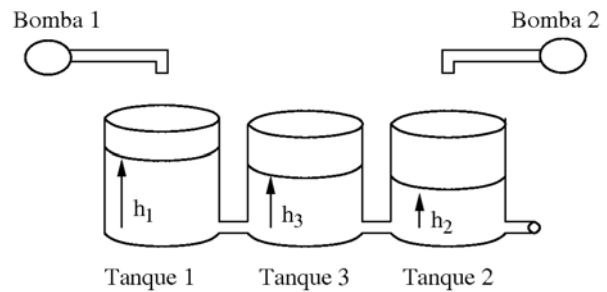


Fig. 1. Sistema de tres tanques.

por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (13)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (14)$$

Donde el vector de estados  $x(t)$  corresponde al nivel de cada tanque y también son la salida del sistema. Las matrices de distribución son:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0085 & 0 & 0.0085 \\ 0 & -0.00195 & 0.0084 \\ 0.0085 & 0.0084 & -0.0169 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0065 & 0 \\ 0 & 0.0065 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El espacio de paridad es llevado a cabo mediante el procedimiento visto en la sección IV. Se consideran únicamente dos derivadas de la entrada y la salida, logrando obtener un generador de residuo basado en la relación de paridad, donde  $y_s(t) \in \mathbb{R}^{9 \times 1}$ ,  $u_s(t) \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$  y  $H_{u,2} \in \mathbb{R}^{9 \times 6}$ . Tomando en cuenta las dimensiones de estas matrices, es claro que el vector de paridad tiene las siguientes dimensiones  $v_s \in \mathbb{R}^{1 \times 9}$ . La implementación es llevada a cabo mediante *Matlab Simulink* obteniendo los resultados que se muestran enseguida.

En la figura 2 se aprecia la salida de cada uno de los tanques sin considerar el efecto de las fallas. Los niveles de cada uno de ellos se localizan perfectamente en el valor deseado de acuerdo al punto de operación especificado anteriormente. En la figura 3 se aprecia la señal residual obtenida. De esta última se puede notar que después de un tiempo transitorio, relativamente pequeño, la variable de residuo tiende a un valor muy cercano a cero, lo cual significa que el generador de residuo obtenido tiene un buen funcionamiento y entonces se considera un sistema con fallas en el sensor uno y bomba uno, que corresponden al primer tanque.

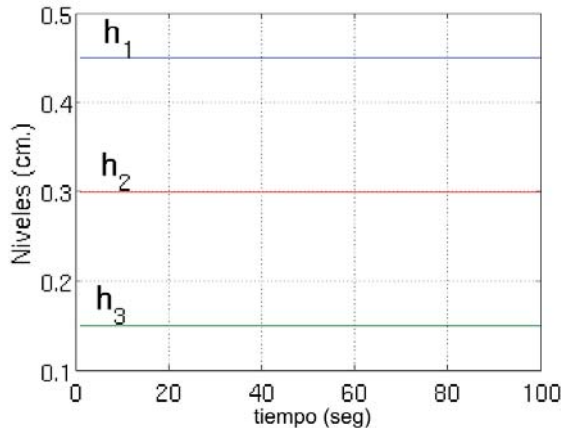


Fig. 2. Nivel de cada tanque.

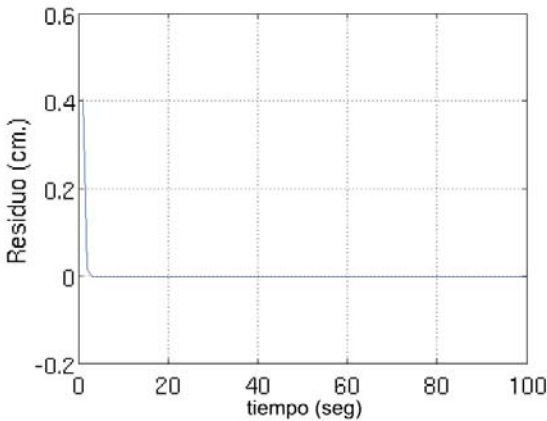


Fig. 3. Señal de residuo para un caso sin falla.

El sistema lineal tomando en cuenta el efecto de posibles fallas en actuadores y sensores es el que se muestra a continuación:

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t) + E_f f(t) \quad (15)$$

$$y(t) = Cx(t) + F_f f(t) \quad (16)$$

Donde

$$E_f = [0B] \in \mathbb{R}^{3 \times 5}, F_f = [I_{3 \times 3} \ 0] \in \mathbb{R}^{3 \times 5} \text{ y } f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_5 \end{bmatrix}$$

El generador de residuo que se obtiene en este caso tiene la forma de la ecuación (12) y se implementa de la misma manera que para el caso sin falla. Los resultados de simulación se presentan a continuación.

Como puede apreciarse en la figura 4, la falla ocurre en el sensor uno en el segundo 10 y se manifiesta por medio de un cambio en el nivel del tanque uno, el cual hace que el sistema no se

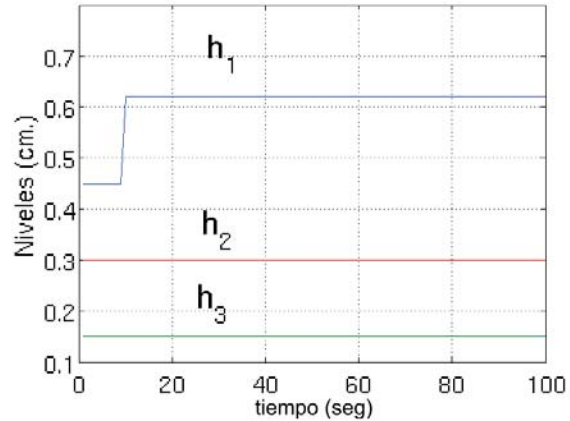


Fig. 4. Salidas del sistema con falla en sensor uno.

mantenga en su punto de operación. Así el generador residual tiene un valor diferente de cero justamente en el segundo en que ocurre la falla tal como se muestra en la figura 5.

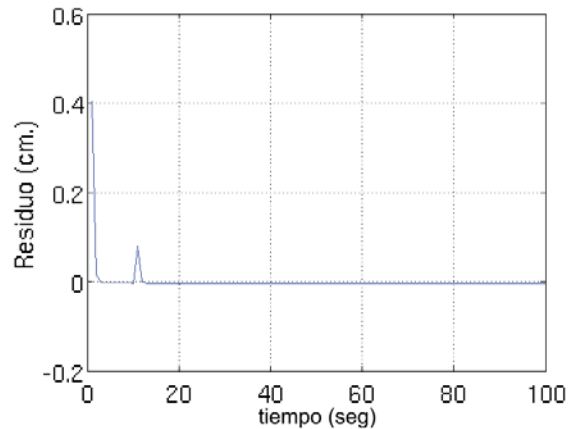


Fig. 5. Residuo cuando hay falla en sensor uno.

Cuando la falla ocurre en una de las bombas, el generador de residuo responde ante la misma en el instante en que dicha falla se presenta. Una falla en la bomba uno ocurre en el segundo 40 apareciendo inmediatamente en la salida como se ve en la figura 6, en tanto que el generador de residuo que se aprecia en la figura 7 refleja el efecto de dicha falla sobre el sistema.

Cabe mencionar que el generador de residuos puede ser diseñado de tal forma que sea sensible o robusto a determinadas fallas, es decir, siendo robusto a la falla uno no será alterado el valor del generador de residuo aunque se presente una falla en el sensor uno, mientras que el resto de las posibles fallas sí serán detectadas en caso de presentarse.

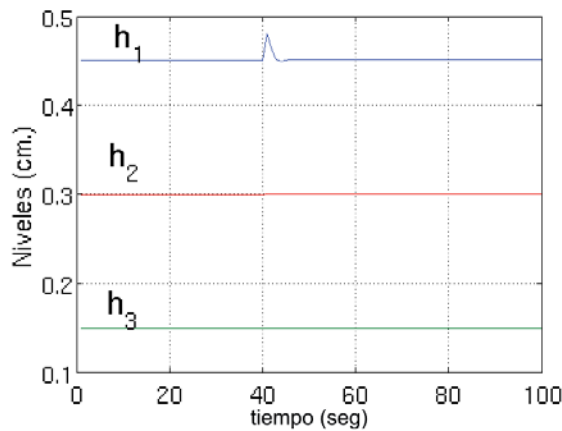


Fig. 6. Falla en la bomba uno.

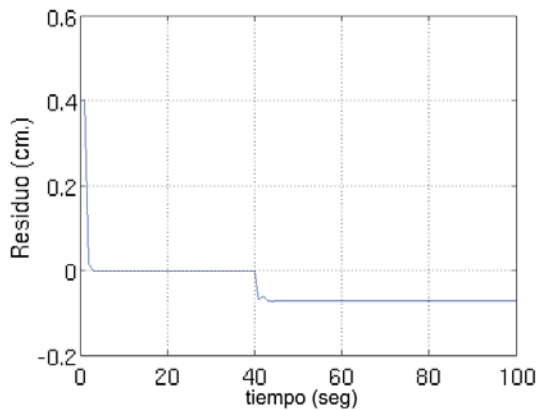


Fig. 7. Residuo cuando hay falla en bomba uno.

Los resultados presentados anteriormente están sujetos a la consideración de que las salidas son ideales o están libres de ruido, lo cual en caso real no es verdad. Por lo anterior a continuación se toma en cuenta una componente pequeña de ruido en la salida simulando el efecto que se presentaría en los niveles de los tanques al momento de ser llenados por las bombas uno y dos en un caso real.

En la figura 8 puede verse como el nivel del tanque uno se ve ligeramente afectado por un poco de ruido. En la misma figura también se aprecia un incremento de nivel en el segundo 10, que se traduce en una falla del sensor en este instante de tiempo. La figura 9 muestra la señal de residuo para el caso mencionado anteriormente, que a pesar de tener bastante ruido es apreciable un cambio en el segundo 10.

De igual manera, en las figuras 10 y 11 se aprecia la salida del tanque uno y la señal de residuo respectivamente.

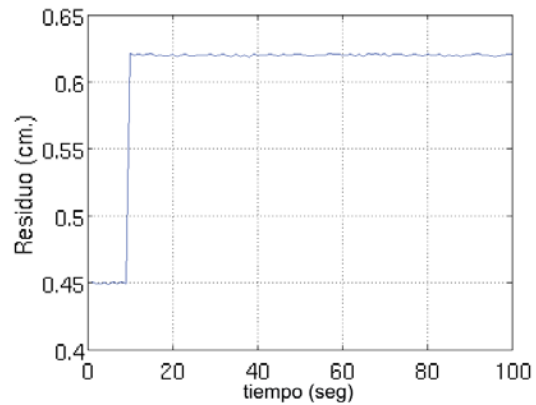


Fig. 8. Salida del tanque uno en la presencia de ruido.

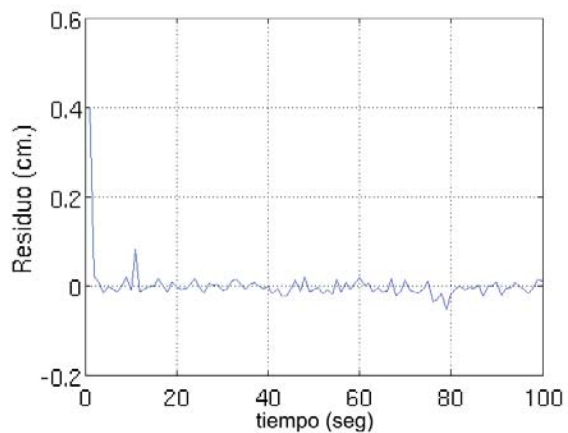


Fig. 9. Señal de residuo ante la falla en tanque uno.

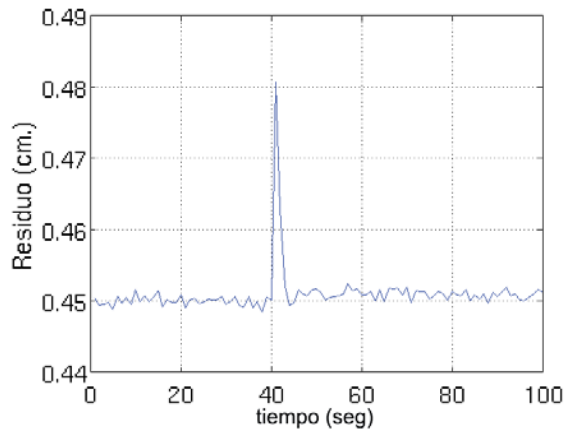


Fig. 10. Salida en tanque uno con falla en bomba uno.

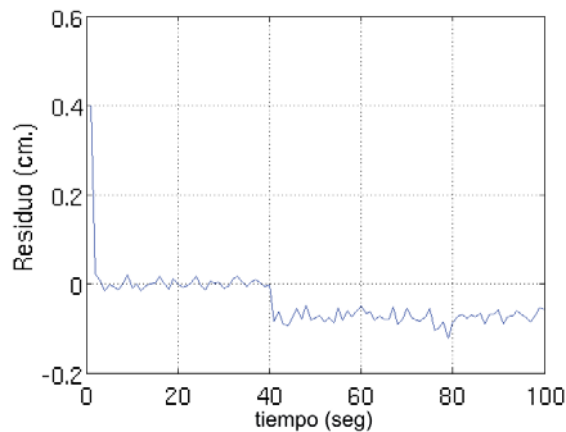


Fig. 11. Señal de residuo ante la falla en bomba uno.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se considera el diseño de espacios de paridad para sistemas continuos mediante la estimación de derivadas de señales.

Se utiliza un observador de alta ganancia propuesto recientemente como estimador de derivadas de señales, el cual cuenta con buenas propiedades respecto al ruido.

El diseño de espacio de paridad para sistemas continuos es semejante al que se realiza en el caso discreto, sólo la implementación es distinta.

Con el procedimiento utilizado se logran los resultados de localización sin las limitaciones que se tienen cuando se discretizan las ecuaciones continuas.

## REFERENCIAS

1. Chow, E. Y. y A. S. Willsky (1984). Analytical redundancy and the design of robust failure detection system. *IEEE Trans. On. Autom. Control* AC-29(7), 603-614.
2. Ding, S.X.(2008). *Model-based fault diagnosis techniques*. Springer.
3. Fadali, M. S. (2003). Observer-based robust fault detection of multirate linear system using a lift reformulation. *Computers and Electrical Engineering* 29, 235-243.
4. Frank, P.M. (1990). *Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based*

- redundancy – a survey. *Automática* 26,459-474.
5. Gertler, J. (1998). *Fault detection and diagnosis in engineering systems*. Marcel Dekker. New York.
6. Izadi, I., Q. Zhao y T. Chen (2005a). An optimal scheme for fast rate fault detection based on multirate sampled data. *Journal of Process Control* 15, 307-319.
7. Izadi, I., Q. Zhao y T. Chen (2007). Analysis of performance criteria in sampled-data fault detection. *Systems & Control letters* 56, 320-325.
8. Izadi, I., Q. Zhao y T. Chen (2005b). Norm invariant discretization for sampled-data fault detection. *Automática* 41 1633-1637.
9. Li, W., S. L. Shah y D. Xiao (2008). Kalman filters in non-uniformly sampled multirate system: for fdi and beyond. *Automatica* 44, 199-208.
10. Rank, M. L. (1998). *Robust and optimal control: robust sampled-data H2 and fault detection and isolation*. Phd thesis. Technical University of Denmark. Denmark.
11. Vasiljevic, L. K. y H. K. Khalil (2008). Error bounds in differentiation of noisy signals by high-gain observers. *systems & Control Letters* 57, 856-862.
12. Viswanadham, N. y K. D. Minto (1990). Fault diagnosis in multirate sampled data systems. En: *29th IEEE Conference on Decision and Control*. Honolulu, Hawaii. pp. 3666-3671.
13. Zhang, P., S. X. Ding, G. Z. Wang y D. H. Zhou (2002). Fault detection for uncertain sampled-data systems. En: *Proceedings of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Shanghai, P. R. China. pp. 2728-2732.
14. Zhang, P., S.X. Ding (2008). On fault detection in linear discrete-time, periodic, and sampled-data systems. *Journal of control Science and Engineering* 2008.
15. Zhong, M., H. Ye, S. X. Ding y G. Wang (2007). Observer-based fast rate fault detection for a class of multirate sampled-data systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 52(3), 520-525.
16. Zhong, M.-Y., Ch.F. Ma y Y.-X. Lui (2006). Fast rate fault detection filter for multirate sampled-data systems. *Acta Automatica Sinica* 32(3), 433-437.