

# Geometría de Fractales y Autoafinidad en Ciencia de Materiales ♦

Ubaldo Ortiz Méndez\*  
Moisés Hinojosa Rivera\*

## INTRODUCCION

Al paso del tiempo, la visión que el Hombre tiene de la realidad ha cambiado, la tierra no es plana. El Hombre, después de haber tomado conciencia de la realidad no se conformó con solo contemplarla. Después de observarla trató de comprenderla y así poder describirla. Ahora el Hombre puede decir como es la realidad con mucha precisión. En este trabajo, se busca describir a través de algunos ejemplos, una parte de esa realidad, aquella que tiene que ver con lo material. Para esta parte de la realidad, existen Ciencias ya muy maduras. Las matemáticas y la física, entre otras, son ciencias formales. En ellas tenemos conceptos, teorías, herramientas que nos permiten describir lo material. Sin embargo, a partir de la década pasada, esta descripción de lo material se vuelve más precisa gracias al uso de una naciente ciencia, la Geometría de Fractales. Esta ciencia pertenece a las matemáticas y como las otras geometrías, tiene que ver con las formas que toma lo material.

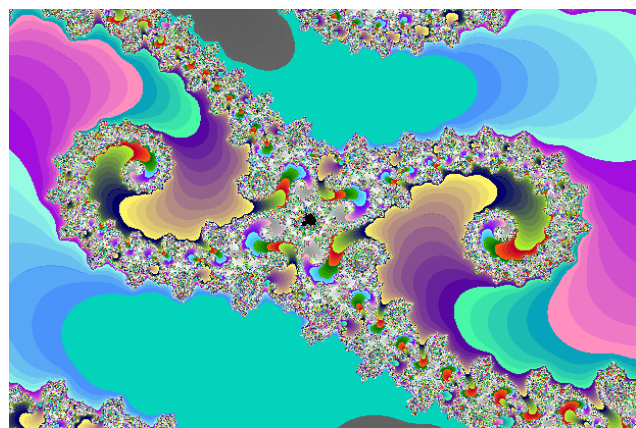
El objeto de estudio de este artículo son las estructuras de algunos materiales, particularmente las fronteras entre los granos y cómo cambian éstas cuando el material es deformado, además discutimos en este trabajo las características de autoafinidad de las superficies de fractura de los metales. Nos interesa saber por ejemplo qué tan recta es una frontera de grano, cómo cambia la frontera de grano cuando el material es deformado. Se hace uso de esta Geometría porque nuestra visión de la realidad es que “las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las líneas costeras no

son círculos”, ni los granos son poliedros, ni las fronteras de grano son líneas rectas. La visión de la estructura de los materiales debe de cambiar.

En la Física, a principios de siglo se demostró que no bastan sólo tres dimensiones para ubicar a la materia, es necesaria una cuarta, el Tiempo. En la actualidad, en este trabajo como ya en muchos otros se ha hecho, ilustramos que para saber cuanto espacio ocupa la materia no son suficientes dimensiones enteras, la materia no está contenida exactamente en una dimensión, ni en dos ni en tres. La materia ocupa parte de esas dimensiones.

En la realidad no existen líneas rectas, ni planos ni poliedros como los descritos por la Geometría Euclidiana. En la realidad existen Fractales, objetos geométricos con dimensiones que pueden ser fraccionarias.

Los fractales son objetos irregulares, rugosos, porosos o fragmentados y que además poseen estas propiedades al mismo grado en todas las escalas. Es decir, estos objetos presentan la misma forma si son vistos de lejos o de cerca.



♦ Proyecto galardonado con el Premio de Investigación de la UANL. 1996, otorgado en 1997.

\* Doctorado en Ingeniería de Materiales, FIME-UANL  
E-mail: uortiz@ccr.dsi.uanl.mx

Así mismo, en este trabajo vemos que la medida de estos objetos que constituyen lo material depende del instrumento de medición. El perímetro de un grano no tiene una medida absoluta, ésta depende de la resolución y de la magnificación a la cual está operando el instrumento de medición. Finalmente como el tiempo y el azar forman parte de toda realidad, estos son incluidos cuando queremos saber como cambian las estructuras al paso del tiempo.

## GEOMETRIA DE FRACTALES

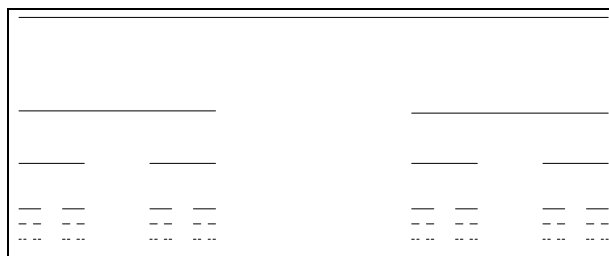
Mandelbrot desarrolló una nueva geometría que permite el estudio de las formas naturales, identificando una familia de formas demasiado irregulares para ser descritas mediante la geometría euclidiana a las que llamó fractales. El término proviene del latín *fractus*, el correspondiente verbo *frangere* significa "romper, crear fragmentos irregulares". El término "fractal" transmite la idea de que un objeto es irregular, se puede descomponer en fragmentos que son parecidos al todo y es de dimensión fraccionaria.

La geometría euclidiana describe por medio de fórmulas, asigna dimensiones enteras a los objetos y es adecuada para describir objetos hechos por el hombre. En contraparte, la geometría fractal describe por medio de algoritmos, permite dimensiones fraccionarias y es adecuada para describir formas naturales.

Matemáticamente, un fractal es un subconjunto de un espacio métrico para el cual su dimensión de Hausdorff-Besicovitch,  $D_{H-B}$  es estrictamente mayor que su dimensión topológica,  $D_T$ . La dimensión de Hausdorff-Besicovith no está restringida a tomar valores enteros. Esta definición, sin embargo, excluye algunos conjuntos que son considerados

fractales. No existe una definición de los fractales que sea plenamente satisfactoria.

Los fractales generalmente poseen algún tipo de autosimilitud, puede decirse que están formados por partes pequeñas que se parecen al todo. Esta similitud puede ser geoméricamente estricta o bien puede ser solamente aproximada o estadística. Por ejemplo, el conjunto de Cantor, *Fig. 1*, está formado por dos copias estrictamente similares de sí mismo y la curva de von Koch, *Fig. 2*, está formada por cuatro réplicas. Un fractal natural como un árbol está formado por múltiples copias, que son las ramas, aproximadamente similares al todo. A su vez las ramas contienen copias de sí mismas, las subramas. En este ejemplo, la autosimilitud es solo aproximada o estadística y recibe entonces el nombre de autoafinidad.



*Fig.1.- El conjunto de Cantor, con dimensión fractal = 0.6319.*

## MANIFESTACIÓN DE LA IRREGULARIDAD EN LA MICROESTRUCTURA DE LOS MATERIALES.

Los matemáticos han creado curvas irregulares isotrópicas, como la curva de Von Koch, que muestran exactamente el mismo aspecto a cualquier grado de detalle que se les observe, estas curvas son llamadas autosimilares. En la naturaleza no existe la autosimilitud estricta, como no existen círculos ni líneas rectas. La irregularidad es anisotrópica y limitada, solo se presenta la autosimilitud estadística o autoafinidad.

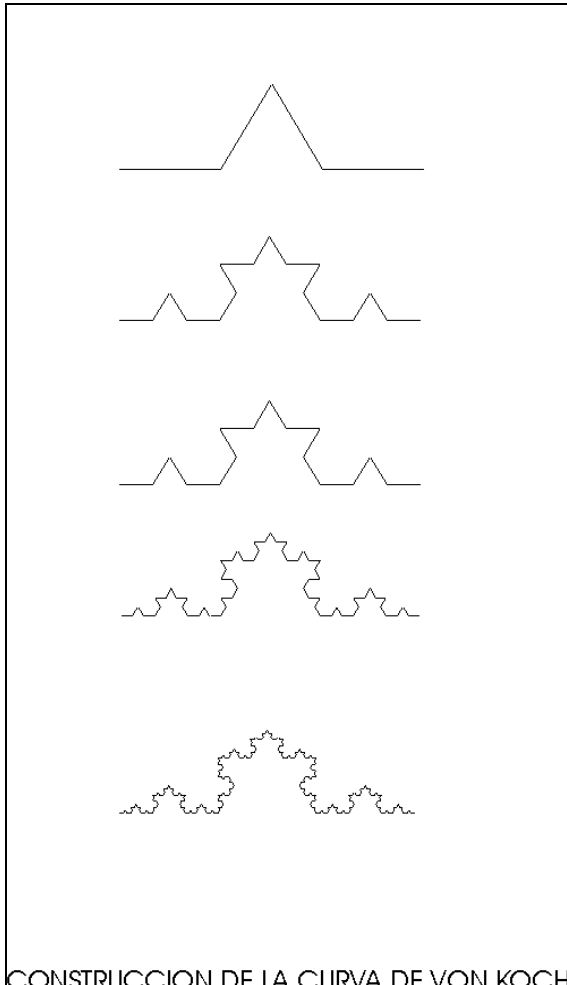


Fig. 2.- Construcción de la curva de von Koch. Su dimensión fractal es de 1.2618.

La irregularidad de la microestructura de los materiales se manifiesta de diversas maneras, en la Fig. 3 vemos la irregularidad de una frontera de grano de un acero inoxidable, vista mediante microscopía óptica. En baja magnificación esta irregularidad no es detectable, las fronteras de

grano son aparentemente rectas, como se muestra en la Fig. 4.

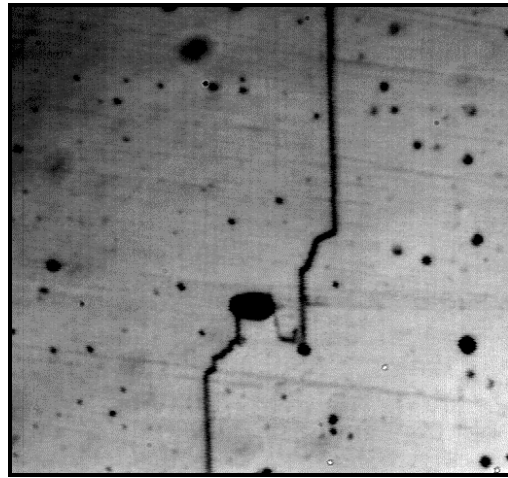


Fig. 3.- Frontera de grano irregular en una muestra de un acero inoxidable. 1000X.

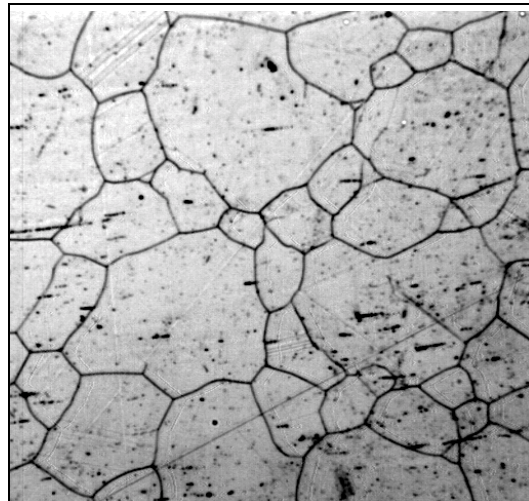


Fig.- 4. Microestructura de un acero inoxidable, las fronteras de grano muestran fronteras de apariencia recta al ser observadas a la magnificación de 100X.

La longitud de una línea euclidiana es fija, tiene un valor único. Sin embargo las fronteras de grano, al igual que otras curvas naturales, muestran que sus

longitudes aumentan al observarlas y medirlas bajo el microscopio a magnificaciones cada vez mayores. La *Tabla 1* muestra este efecto en la medición de la longitud perimetral de un grano en un acero inoxidable. Este efecto lo muestran muchas estructuras naturales, como las líneas costeras, que originalmente fueron analizadas por Richardson, por eso a este efecto se le conoce como efecto Richardson. Al gráfico donde se plasma la longitud medida contra la resolución de medición se llama gráfico de Richardson. En dichos gráficos, una curva euclidiana presentaría una línea asintóticamente horizontal, por tener una longitud que es la misma para cualquier resolución con que se le mida, sin embargo, una curva irregular natural, como una frontera de grano, mostrará una recta con una pendiente que será mayor entre mayor sea su grado de irregularidad o autoafinidad.

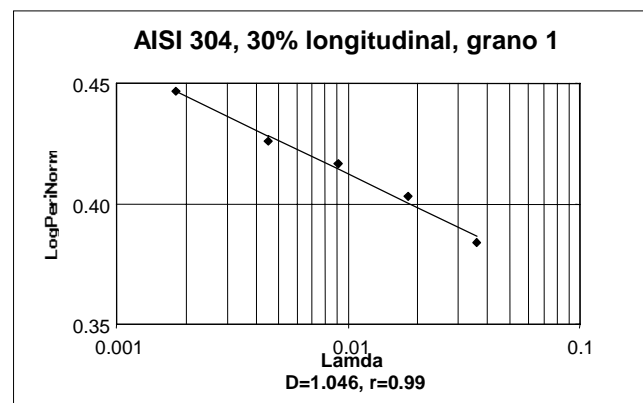
*Tabla 1. Longitudes perimetrales para un grano en un acero inoxidable.*

Magnificación	Longitud (micrones)
50X	127.6
100X	133.3
200X	137.6
400X	142.5
1000X	147.4

El parámetro que cuantifica el grado de irregularidad es la dimensión fractal,  $D$ , que a partir de un gráfico de Richardson se puede obtener mediante la relación  $D=1-m$ , donde  $m$  es

la pendiente de la recta de regresión. La *Fig. 5* muestra el gráfico de Richardson para una frontera de grano de un acero inoxidable, el efecto Richardson, que implica autoafinidad, se manifiesta claramente, el valor de la dimensión fractal para este grano fue de 1.046.

En la *Fig. 6* se muestra el gráfico de Richardson para otro grano de acero inoxidable, en este caso se encuentra que este grano presenta no una, sino dos dimensiones fractales, en intervalos con resolución de medición diferentes separados por un punto de quiebre. A la dimensión fractal que se manifiesta en el intervalo de menor resolución de medición, a la derecha en el gráfico de Richardson de esta figura, se le llama *dimensión fractal de estructura* ya que describe la irregularidad de la morfología o estructura general del grano. Mientras que a la dimensión fractal que se manifiesta en el intervalo de mayor resolución de medición se le llama *dimensión fractal de textura*, ya que cuantifica la irregularidad de los detalles finos de la frontera de grano.



*Fig. 5.- Gráfico de Richardson para un grano individual en las muestras deformadas a 30%, en las abscisas "Lamda" es el factor de calibración normalizado con respecto al diámetro de Feret, en la ordenada, LogPeriNorm es el perímetro normalizado.*

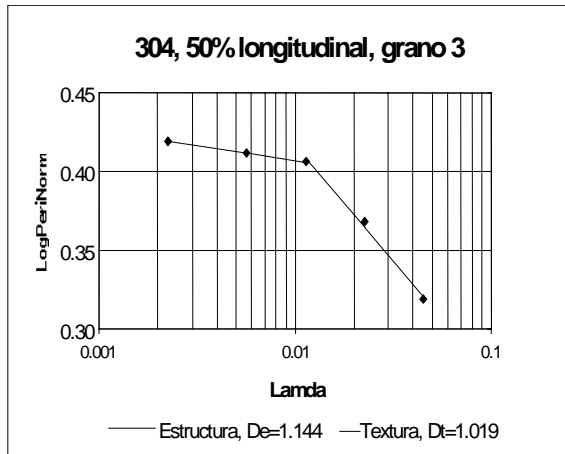


Fig. 6.- Gráfico de Richardson para un grano que manifiesta dos dimensiones fractales, la dimensión de estructura en el intervalo de menor resolución y la dimensión de textura en el intervalo de mayor resolución de medición.

La Fig. 7 muestra el efecto que produjo la deformación plástica de tensión sobre una muestra de acero inoxidable. Nótese el alargamiento de los granos en la dirección de aplicación del esfuerzo. Se sabe que la deformación introduce desorden en la microestructura, sin embargo el análisis fractal de las fronteras de grano no muestra diferencias estadísticamente significativas en los valores de dimensión fractal. ¿Existirá algún efecto de la deformación o la rapidez de la misma sobre el punto de quiebre?

La irregularidad de las estructuras de los materiales se manifiesta también en las superficies de fractura, que han sido estudiadas mediante la geometría fractal desde mediados de la década pasada. La irregularidad de las superficies de fractura se manifiesta a través de la rugosidad y actualmente se cuantifica

mediante el coeficiente de rugosidad o coeficiente de Hurst. El coeficiente de Hurst,  $H$ , en el caso de superficies, está relacionado a la dimensión fractal por la expresión  $D=3-H$ .

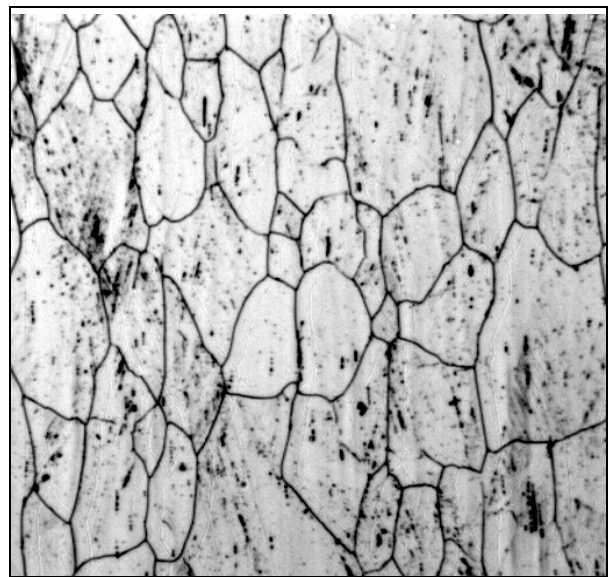


Fig. 7.- Granos alargados por deformación en tensión en acero inoxidable. 100X.

En la Fig. 8 vemos la superficie de fractura de una aleación de níquel, esta superficie fue obtenida mediante un ensayo de fatiga. El análisis de autoafinidad de superficies de fractura se facilita estudiando cortes de la fractura, de manera que se puedan aplicar los métodos al análisis de los perfiles. En la Fig. 9 vemos los perfiles obtenidos sobre las superficies de fractura de una aleación de níquel para muestras con dos tamaños de grano diferentes. La diferencia de tamaños de grano provoca una variación en la amplitud de la rugosidad, pero en ambos casos el coeficiente de rugosidad tiene el mismo de valor de 0.8, equivalente a una dimensión fractal de 1.2 en los perfiles y de 2.2 en las superficies.

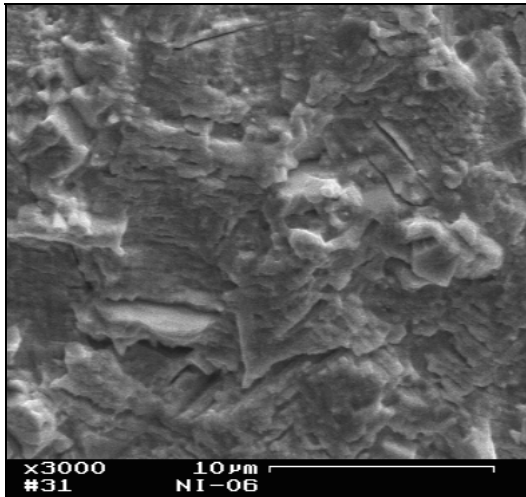


Fig. 8.- Superficie de fractura por fatiga en una aleación de níquel.

Se ha especulado que el valor del coeficiente de rugosidad es “universal”, ya que el valor de 0.8 se encuentra en una diversidad de materiales fracturados bajo diferentes condiciones de carga. Sin embargo, cuando el análisis de autoafinidad se realiza a resoluciones de medición de orden submicrométrico, se detecta otro régimen de autoafinidad, de manera análoga a lo que se encuentra en las fronteras de grano que presentan dos dimensiones fractales según la resolución con que se midan. Este régimen de autoafinidad muestra un coeficiente de rugosidad de 0.5 para una diversidad de materiales. El punto de quiebre entre ambos regímenes parece estar relacionado a longitudes características de la microestructura, pero existen aun muchas interrogantes, sobretodo cuando se consideran los efectos de la plasticidad y los efectos cinéticos.

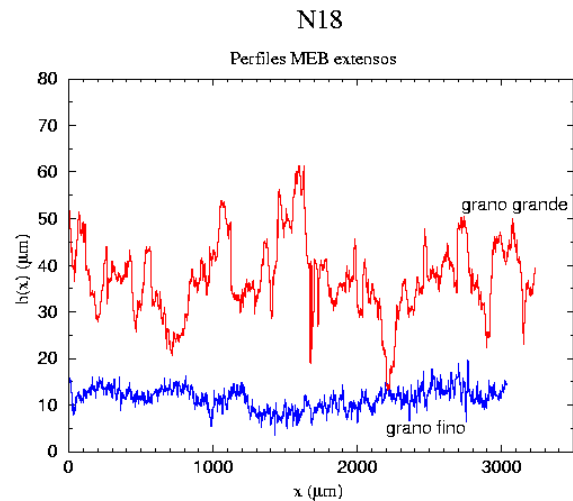


Fig. 9.- Perfiles sobre superficies de fractura en muestras de níquel con diferentes tamaños de grano. Los tamaños de grano fueron de 10 y 80 micrómetros.

## CONCLUSIONES

Hemos visto a través de ejemplos la manifestación de la irregularidad en los materiales, las fronteras de grano no son líneas euclidianas, son líneas irregulares que presentan el efecto Richardson, poseen una dimensión fractal medible. Más aún, pueden presentar dos dimensiones fractales en diferentes intervalos de precisión de medición. La dimensión de estructura cuantifica la irregularidad de la forma general de los granos, la dimensión de textura cuantifica la irregularidad fina de las fronteras.

De la misma manera, las superficies de fractura son objetos fractales naturales y presentan también dos regímenes de autoafinidad según la resolución de medición con que se analicen.

Existen muchas interrogantes sobre los efectos cinéticos en la estructura autoafín de las fronteras de grano y de las superficies de fractura. Pero es claro que

estamos ante el desarrollo de una nueva visión de la estructura de los materiales.

En esta nueva visión, la morfología de los materiales está formada por estructuras con formas muy variadas, formas que existen entre las dimensiones enteras. Estructuras que crecen o disminuyen sin cambiar de forma al ser vistas a través del microscopio, estructuras que cambian con el tiempo, tiempo que lo cambia todo.

### Bibliografía

1. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Co., New York, 1982.
2. Hinojosa, Tesis Doctoral, UANL, 1996, trabajo ganador del premio de investigación UANL 1996.
3. Hinojosa, V. Trejo and U. Ortiz. "Fractal Analysis of the Microstructure of AISI 304 Steel". Materials Research Society Symposium Proceedings Vol. 407. pp. 411-416. Materials Research Society, Pittsburgh, Pennsylvania, 1996.
4. Hinojosa, V. Trejo and U. Ortiz. "Análisis fractal de la microestructura de acero inoxidable AISI 304", Memorias del XVIII Simposio Nacional de Siderurgia, Instituto Tecnológico de Morelia, pp. 26.1-26.9, Instituto Tecnológico de Morelia, 1996.
5. Hinojosa, R. Rodríguez and U. Ortiz. "Microstructural Fractal Dimension of AISI 316L Steel." Materials Research Society Symposium Proceedings Vol. 367. pp. 125-129. Materials Research Society, Pittsburgh, Pennsylvania, 1995.
6. Hinojosa, N.A. Rodríguez and U. Ortiz. "Dimensión Fractal de Carburos en Aceros para Herramientas". Memorias del XVII Simposio Nacional de Siderurgia, pp. 16.1- 16.10. Instituto Tecnológico de Morelia, 1995.
7. Mandelbrot, D. Passoja y A.J. Paullay. *Nature*, 1984, **304**, p. 771.
8. Hornbogen, *Fractals in Microstructure of Metals*, International Materials Reviews, No. 6, p. 277, 1989.
9. Bouchaud, *Scaling properties of cracks*, *J. Phys. Condens. Matter* **9** (1997) 4319-4344.

