

Fractales: fundamentos y aplicaciones

Parte I: Concepción geométrica en la ciencia e ingeniería

Virgilio A. González G.* , Carlos Guerrero*

Abstract

This is the first part of two articles were we described, in a simple form the: concepts, mathematics, applications and research progress at FIME, of the relatively new and fast growing area of the fractal geometry. The first part include the bases of the fractal geometry and a scope of the principal applications, the second part include some more detailed examples of its applications, and the progress and success of the research in this area at FIME.

INTRODUCCIÓN

La investigación y desarrollo tecnológico en una gran diversidad de áreas, está adoptando los conceptos de una nueva geometría, la geometría de fractales, como alternativa en la resolución de problemas de índole tan diversa como diferentes son las propiedades mecánicas y reológicas de los materiales con relación a la música sintética.

Este escrito es el primero de dos partes en los que se pretende mostrar, en la forma más sencilla posible, los conceptos fundamentales de esta área de las matemáticas, describir esquemáticamente, o al menos enlistar algunas de sus aplicaciones y comunicar a la comunidad de FIME los trabajos que en este sentido se desarrollan en nuestra facultad, así como sus principales logros.

Es indudable la importancia de la geometría en la comprensión de la naturaleza (ciencia), su aprovechamiento (ingeniería) y hasta en la creatividad de la comunicación artística. Sin embargo con el bagaje convencional de conocimientos adquiridos por cualquier persona ya sea con un mínimo de preparación (quizás pre-primaria), hasta doctos especialistas en las diversas áreas del quehacer humano, solo nos es posible identificar formas geométricas comprendidas en un

intervalo discreto de dimensionalidad espacial, así un objeto solo puede tener una, dos o tres dimensiones según sea lineal, planar o volumétrico respectivamente. Además, las formas geométricas reconocibles y susceptibles de ser descritas matemáticamente con cierta facilidad (línea recta o curva, circunferencia, triángulo, esfera, etc.), no se encuentran comúnmente en la naturaleza, (Ejemplo cristales de cuarzo y de sal).

La geometría de fractales ha permitido describir formas geométricas que antes no era posible hacerlo y, con esto explicar fenómenos naturales y relaciones como morfología y propiedades.

GEOMETRÍA EUCLIDIANA Y DE FRACTALES

La geometría como la conocemos fue planteada por primera vez en los años 300 A.C. por Euclides y ha tenido relativamente pocos cambios desde entonces. En 1975 Benoît B. Mandelbrot, establece las bases de una nueva geometría conocida como geometría de fractales, la cual está teniendo cada vez más aplicaciones en todos los campos del conocimiento.



Fig. 1. Euclides, 360-300 A.C, Alejandría, Egipto. Padre de la geometría euclidiana, 360 – 300 A.C.

*
DIMAT-FIME-UANL



Fig. 2. B.B. Mandelbrot, Varsovia, Polonia (1924 - ----), Fundamentos de la geometría de fractales

La geometría de fractales está permitiendo describir matemáticamente y en forma más o menos sencilla, objetos y fenómenos que se habían considerado muy complejos como las geometrías de algunos helechos y de superficies de materiales, o simplemente caóticos como el movimiento browniano, auxiliando además a escalar geometrías y propiedades tanto desde niveles atómicos ó de dimensiones espaciales hasta las escalas macroscópicas en que nuestros sentidos son capaces de captar.

DIMENSIÓN FRACTAL. EL CONCEPTO

El concepto principal de esta nueva geometría es la dimensión fractal (D_f), que es una propiedad del objeto la cual nos indica qué tanto ocupa el espacio que lo contiene, y que puede adquirir valores continuos en el espacio de los números reales, entre 0 y 3. Una explicación simplificada de este concepto se puede hacer utilizando la figura 3

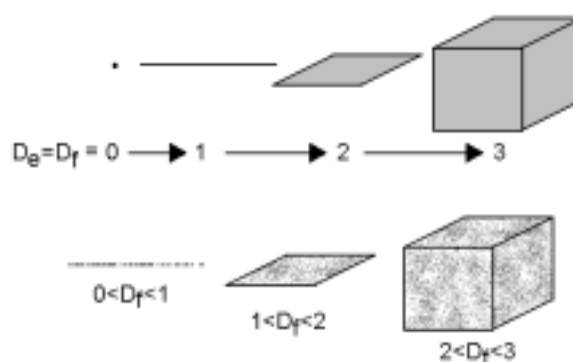


Fig. 3. Esquema para la comparación simplificada entre dimensión euclidiana (D_e) y dimensión fractal (D_f).

En esta figura, en la parte superior se representan 4 objetos considerados por la geometría euclidiana en alguna de las tres dimensiones (dimensiones euclidianas " D_e "), o bien cero (el punto). Si estos cuerpos fueran continuos en el espacio, (Ejem. Cubo sólido), su dimensión fractal coincidiría con la dimensión euclidiana ($D_f = D_e$), sin embargo al ir amplificando el cubo o las representaciones de la línea y el plano, en determinada escala de amplificación nos encontraremos que estos objetos tienen espacios vacíos, están llenos de "poros", (parte inferior de figura 3), por lo que de acuerdo a la geometría fractal, la línea tiene una dimensión fraccional o fractal mayor que 0 pero menor que 1, dependiendo que tantos "poros" tiene, el plano $1 < D_f < 2$ y el cubo $2 < D_f < 3$.

LOS FRACTALES

Otro concepto fundamental es el de las geometrías fractales, o simplemente de los fractales (del latín *fractus*, irregular). Por ser esta un área del conocimiento nueva y por lo tanto actualmente en

desarrollo, la definición de fractales aún es cambiante, la primera definición establecida por Mandelbrot en 1975 es:

Fractales es el conjunto de formas generadas normalmente por procesos matemáticos repetitivos y que se caracterizan por: 1) tener el mismo aspecto a cualquier escala de observación, 2) tener longitud infinita, 3) no ser diferenciables y 4) tener dimensión fraccional o fractal. Actualmente, aún y que se mantienen las cuatro características mencionadas su acepción es: Formas geométricas que pueden ser separadas en partes, cada una de las cuales es una versión reducida del todo.

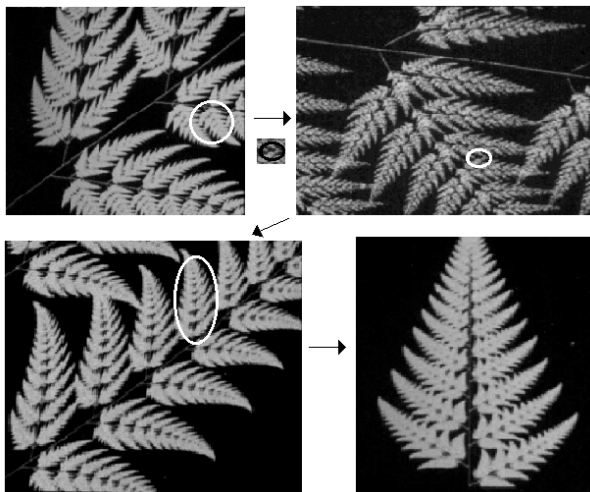


Fig. 4. Fractal matemático que simula la geometría de un helecho, mostrando su propiedad de escalamiento

La figura 4 muestra la representación de un helecho resultado de modelación matemática utilizando geometría de fractales. Se aprecia que al aumentar la amplificación el aspecto de la figura resultante no cambia. Esta amplificación se puede llevar tan lejos como la precisión de los cálculos lo permita. La función que genera este fractal no es diferenciable y tiene una dimensión fractal de $D_f = 1.6$.

DEFINICIÓN MATEMÁTICA DE LA D_f

Una definición matemática de D_f es la que se conoce como la dimensión de Hausdorff-Besicovith, por haber sido planteada primero por estos investigadores. Este planteamiento consiste en lo siguiente:

Para medir una línea curva de longitud L_0 , se cubre esta con $N_{(\delta)}$ segmentos (reglas) de longitud δ , entonces:

$$N_{(\delta)} = L_0 / \delta^1 \tag{1}$$

podemos definir L como la suma de todas las reglas quedando como:

$$L = \sum \delta^1 = N_{(\delta)} (\delta^1) \tag{2}$$

substituyendo [1] en el término de la derecha de (2), resulta la Ec. 3 y su límite cuando δ tiende a cero (regla infinitamente pequeña), da como resultado la longitud que queremos medir (Ec. 3).

$$L = L_0 \delta^0 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} L_0 \tag{3}$$

De la misma forma, para una superficie de dimensión A_0 y ésta se mide con $N(\delta)$ segmentos de área de dimensión δ^2 , entonces:

$$N_{(\delta)} = A_0 / \delta^2 \tag{4}$$

y definiendo A como:

$$A = \sum \delta^2 = N_{(\delta)} (\delta^2) = A_0 \delta^0 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} A_0 \tag{5}$$

En el caso de un volumen queda como:

$$N_{(\delta)} = V_0 / \delta^3 \tag{6}$$

$$V = \sum \delta^3 = N_{(\delta)} (\delta^3) = V_0 \delta^0 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} V_0 \tag{7}$$

Si para medir la línea curva, tomamos como regla un objeto de dimensión 2, entonces las Ecs. 1 a 3 quedarían como:

$$N_{(\delta)} = L_o / \delta^2 \quad (8)$$

$$L = \sum \delta^2 = N_{(\delta)} (\delta^2) = V_o \delta^{-1} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \infty \quad (9)$$

Encontrando así que: si queremos medir un objeto de determinada dimensionalidad (1 en este caso) con una regla de dimensionalidad mayor (2), lo encontraríamos de magnitud infinita.

Por otra parte, si para medir el volumen usamos una regla bidimensional (de menor dimensionalidad que el objeto a medir), el resultado sería:

$$N_{(\delta)} = V_o / \delta^2 \quad (10)$$

$$V = \sum \delta^2 = N_{(\delta)} (\delta^2) = V_o \delta^1 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \quad (11)$$

Es decir, cuando queremos utilizar una regla de menor dimensionalidad que la de nuestro objeto a medir, el resultado será cero. Por lo tanto solamente podemos usar la regla de la misma dimensionalidad que el objeto para obtener el resultado esperado.

Para generalizar estas observaciones, definimos un objeto que tiene una magnitud M_D de dimensionalidad D y que medimos con la unidad de medida δ de dimensionalidad d , entonces:

$$M_D = \sum \gamma_d \delta^d = N_{(\delta)} \gamma_d \delta^d \quad (12)$$

donde γ_d es un factor geométrico relacionado a la forma de la unidad de medida (Ejem. Línea $\gamma_d=1$, disco $\gamma_d=\pi/4$ o esfera $\gamma_d=\pi/6$). Así, al calcular M_D para diferentes valores de d , (figura 5), encontraremos que:

$$M_D \rightarrow \infty; \Leftrightarrow d > D \quad (13)$$

$$M_D \rightarrow M_D; \Leftrightarrow d = D \quad (14)$$

$$M_D \rightarrow 0; \Leftrightarrow d < D \quad (15)$$

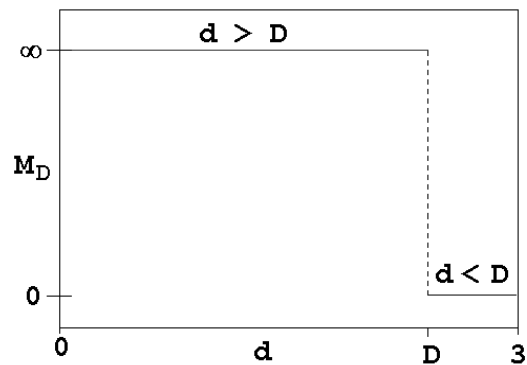


Fig. 5. Gráfica de la ecuación 12 mostrando el cambio en la magnitud M_d en el punto donde d coincide con D

La dimensión fractal o de Hausdorff-Besicovith (D), es el valor de d en el punto en que M_d pasa de infinito a cero. ($D = d$)

AUTO-SIMILITUD, AUTO-AFINIDAD Y ESCALAMIENTO

El helecho fractal mostrado previamente reproduce su aspecto geométrico al cambiar la amplificación global de la imagen, tomando un pequeño rectángulo y amplificándolo proporcionalmente en ambas direcciones, si el objeto estuviese en tres dimensiones, la amplificación sería la de un pequeño paralelepípedo y la amplificación se haría proporcional en las tres dimensiones, esta característica se conoce como auto-similaridad, ejemplos de un fractal auto-similar naturales son la coliflor y el brócoli de Bruselas (figura 6)

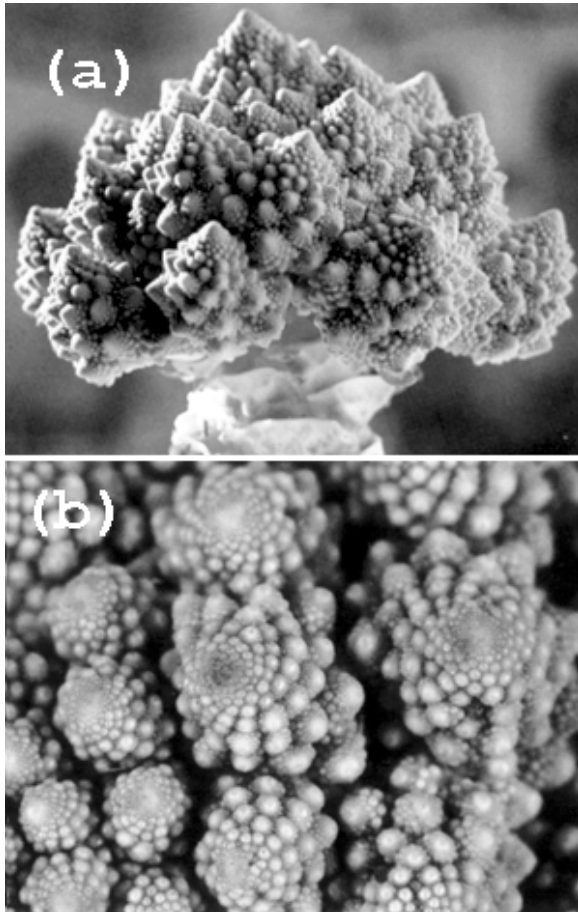


Fig. 6. Brócoli de Bruselas (a) mostrando la característica auto-similar al repetirse el aspecto de la planta original, (b) al ser ampliada una sección de la misma.

La generación de fractales auto-similares se puede lograr mediante experimentos sencillos como lo es el calidoscopio, donde la imagen de uno o varios objetos se reflejan repetidas veces en espejos acomodados paralelamente entre sí, o bien matemáticamente mediante procedimientos repetitivos conocidos como transformaciones auto-afines. Como ejemplo tenemos la curva de Von

Koch (figura 7), donde se parte de una recta (parte inferior de la figura), la cual se divide en tres segmentos iguales, el de en medio se substituye por un triángulo equilátero y resulta así una figura con cuatro segmentos de rectas, si cada uno de estos segmentos se les hace la misma operación que a la primera recta, obtenemos una figura con 16 segmentos, este procedimiento, se sigue repitiendo hasta el infinito obteniendo así un perfil que a mayor amplificación presenta un aspecto invariante.

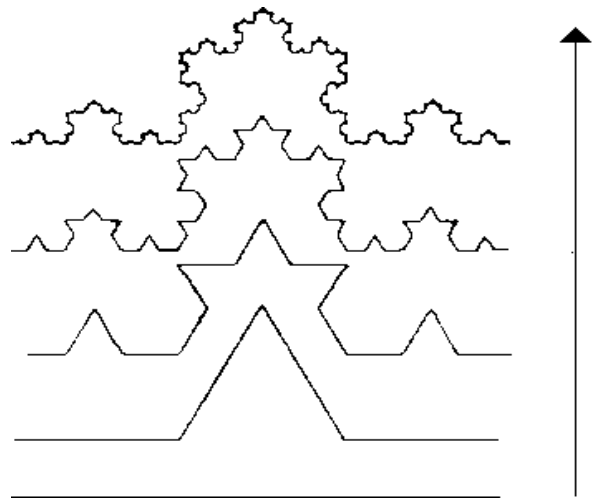


Fig. 7. Construcción de la curva de V. Koch.

Por su característica de escalamiento igual en todas direcciones, podemos decir que estos fractales son isotrópicos auto-similares. Otros objetos naturales o matemáticos, tales como las superficies de los objetos (figura 8) y los perfiles generados por el movimiento browniano (figura 9), sólo mantienen su aspecto durante el escalamiento si éste se hace diferente en al menos una de las direcciones, es

decir son fractales anisotrópicos los cuales se conocen como objetos o fractales auto-afines.

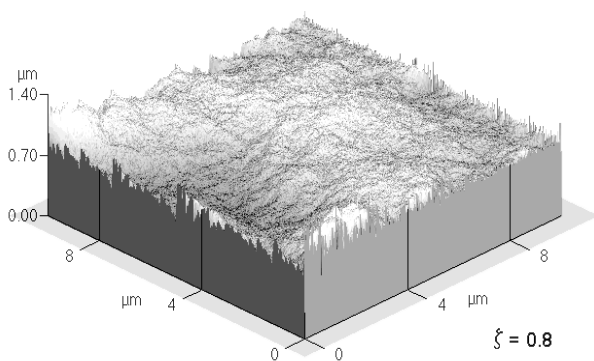


Fig. 8. Superficie auto-afín generada mediante computadora, simulando la rugosidad de superficies de fractura más comunes

Esta propiedad de auto-afinidad, obedece a transformaciones o escalamientos como las que se describen en la siguiente ecuación:

$$(X, Y, Z) \rightarrow (\lambda_x X, \lambda_y Y, \lambda_z^\zeta Z) \quad (16)$$

donde $\lambda_x = \lambda_y \neq \lambda_z^\zeta$

El exponente ζ se conoce como exponente de auto-afinidad y tiene una relación con la dimensión fractal como lo muestra la Ec. 17.

$$D_f = D_e + 1 - \zeta \quad (17)$$

En la figura 9 se muestra esquemáticamente el movimiento browniano calificado generalmente como caótico (figura 9 arriba), que sin embargo representándolo como la distancia al origen (d) en función del tiempo resulta en un fractal auto-afín de dimensión fractal $D_f=1.5$ y de acuerdo a [17] por ser una línea $D_e = 1$, entonces $\zeta = 0.5$.

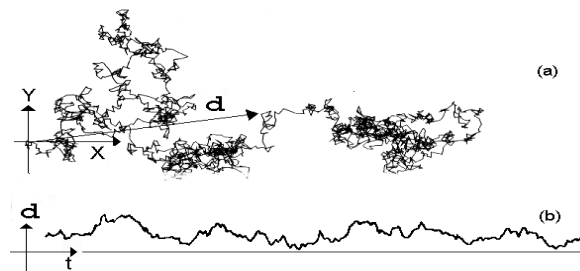


Fig. 9. Movimiento browniano esquematizado como (a) la posición X,Y en función del tiempo y (b) la distancia al origen en función del tiempo.

APLICACIONES:

Algunas de las muchas aplicaciones de la geometría de fractales son:

- Movimiento de las finanzas o de la moneda
- Codificación de señales de audio, de video o digitales
- Caracterización geométrica y escalamiento en minerales
- Medición de fronteras y costas
- Caracterización de agregados (Ejem: negro de humo)
- Análisis estructural y morfológico en polímeros
- Análisis espectroscópico
- Escalamiento de propiedades
- Análisis de señales (Ejem: Espectroscopia y ruido)
- Análisis y predicción de condiciones ambientales, terremotos y volcanes
- Análisis de fenómenos considerados como caóticos como el movimiento browniano y la formación de nebulosas siderales

En el Doctorado de Ingeniería de Materiales de la FIME, un grupo de investigadores nos hemos abocado a implementar y evaluar métodos de análisis en geometría de fractales y su aplicación a la morfología y fractura de materiales metálicos, cerámicos y poliméricos. En la segunda parte de esta publicación se hará la descripción de estos trabajos y sus logros.

LITERATURA RECOMENDADA

1. B. B. Mandelbrot, D.E. Passoja and A. J. Paullay, *Nature*, 308, 721, (1984)
2. H-O Peitgen, H. Jürgens and D. Saupe, "Chaos and Fractals. New Frontiers of Science", (Springer-Verlag, New York 1992)
3. J. Feder, "Fractals", (Plenum Press, New York 1988)
4. M.F. Barnsley, R.L. Devaney, B.B. Mandelbrot, H. O. Peitgen, D. Saupe and R. Voss., "The Science of Fractal Images", (Springer-Verlag, New York 1988)
5. J. C. Russ., "Fractal Surfaces", (Plenum Press, New York 1994)
6. E. Bouchaud, *J. Phys.: Condens Matter*, 9, 4319, (1997).

7. J. Schmittenbuhl, J-P. Vilotte and S. Roux, *Phys. Rev. E*, 51, 131, (1995)
8. E. Reyes, et al., *Proc. of the 58 ANTEC conference*, 2, 2051, (2000)
9. A.S. Balankin, *Eng. Frac. Mech.*, 57, 2/3, 135, (1997), and references therein.
10. M. Hinojosa, E. Bouchaud and B. Ngien, *MRS Symp. Proc.* 539, 203, (1999)
11. A. Majumdar, B. Bhushan. *J. of Tribology*, 112, 112, (1990).

REFERENCIAS

1. Carta tecnológica. Boletín de difusión del CEDIMI, Año 1, Núm. 1.
2. Safime, VII edición, p. 20.
3. Safime, VII edición, p. 20-21.
4. El Diario de Monterrey, 21 de octubre de 1987, p. 3B.
5. Carta tecnológica. Boletín de difusión del CEDIMI, Año 1, Núm. 1.
6. Periódico El Nacional.
7. Carta tecnológica.