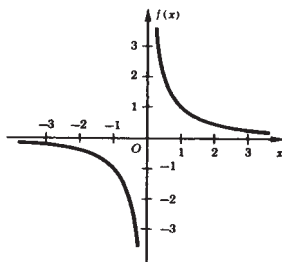


# Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería

Laura García Quiroga, Rosa Alicia Vázquez Cedeño,  
Moisés Hinojosa Rivera  
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica - UANL  
hinojosa@gama.fime.uanl.mx

## RESUMEN



*En el presente trabajo de investigación pedagógica se documenta el estudio de las dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería de segundo, tercero y cuarto semestre. Se aplicó una prueba a 433 estudiantes que incluyó actividades internas al registro algebraico y actividades de pasaje entre los registros gráfico y algebraico. Se encontró que las mayores dificultades de aprendizaje yacen en las tareas de pasaje entre registros semióticos del concepto de función, particularmente en el pasaje del registro gráfico al algebraico. Los resultados sugieren que para superar estas dificultades de aprendizaje es necesario emplear más intensamente el registro gráfico e incluir actividades de transferencia entre registros.*

## PALABRAS CLAVE

Investigación pedagógica, semiótica, dificultades de aprendizaje, función.

## ABSTRACT

*In the present pedagogical research, the difficulties in learning the concept of function are documented. A test that included both internal activities to the algebraic registry and activities of passage between the graphical and algebraic registries was applied to 433 students. It was found that the greater difficulties for learning lie in the tasks of passage between semiotic registries of the function concept, particularly in the passage of the graphical registry to the algebraic one. The results suggest that to overcome these difficulties it is necessary to use the graphical registry more intensely and to include activities of transference between registries.*

## KEYWORDS

Pedagogical research, semiotic, difficulties of learning, function.

## INTRODUCCIÓN

### Aspectos semióticos del concepto de función

En general los contenidos de los programas académicos de las carreras de ingeniería tienen una dosis fuerte de abstracción y generalización y esto es particularmente cierto en los cursos de matemáticas de ingeniería. Muchos de los conceptos básicos de las matemáticas de ingeniería se abordan mediante representaciones algebraicas, analíticas y gráficos de funciones, considerándose

esencial la abstracción y generalización del concepto de Función.<sup>1-4</sup>

Coincidimos con la opinión de Artigue<sup>5</sup> al respecto de que se encuentran grandes dificultades por hacer entrar a los estudiantes en el campo del cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento. La enseñanza tradicional tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica. Él menciona que en Francia en el primer grado del liceo, el estudio de las funciones ocupa un lugar importante. Se trata de objetos “en construcción” que no se pueden considerar “inertes” a medida que se efectúa la enseñanza del cálculo. Menciona que en lo concerniente a funciones existen numerosas investigaciones<sup>6,7,8</sup> que evidencian un conjunto de dificultades en el aprendizaje que distan de ser solucionadas cuando comienza la enseñanza del cálculo.<sup>9,10</sup>

Al igual que con otros conceptos matemáticos, en la práctica docente el concepto de función implica la necesidad de emplear distintas representaciones para que el estudiante pueda captar y dominar en toda su complejidad el concepto.<sup>12,14,17,18,21,22</sup> En particular, Duval<sup>11</sup> sostiene que las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias en el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por la percepción o por una experiencia intuitiva inmediata como son los objetos comúnmente llamados físicos.

El concepto de registro es una noción semiótica. Un registro está constituido por signos, en el más amplio sentido de la palabra: trazos, símbolos, iconos, figuras, etc. Estos signos están asociados de manera interna de acuerdo a los lazos de pertenencia a una misma red semántica y, de manera externa, según las reglas de combinación de signos en expresiones o configuraciones, estas reglas son propias de la red semántica considerada.<sup>14</sup> Un registro se caracteriza por un sistema semiótico, es decir, por sus signos propios y la manera en que estos se organizan. De modo que podemos entender un registro como un medio de expresión o de representación. Un registro tiene la posibilidad de expresar o de representar un objeto, idea o concepto no necesariamente del ámbito

matemático.<sup>17</sup>

El registro algebraico se encuentra constituido por el sistema semiótico del álgebra relativa a las funciones reales, y el registro gráfico está constituido por el sistema semiótico asociado al plano, provisto de un sistema de referencia rectangular en la mayoría de los casos. Asimismo, se consideran dos tipos de tareas, las internas de cada registro y las de pasajes entre ellos. El pasaje entre registros se refiere a la confrontación de dos representaciones de un mismo objeto, a la conversión congruente entre registros de representación.<sup>13</sup>

Algunos autores<sup>11-15, 17-20</sup> han explorado las dificultades de aprendizaje ligadas al manejo de distintas representaciones semióticas, particularmente en Europa y América Latina. En nuestro país Grijalva et al.<sup>21</sup> e Ibarra et al.<sup>22</sup> han realizado proyectos de investigación cuyo principal objetivo ha sido estudiar los efectos del empleo de diversos registros de representación semiótica en la enseñanza del cálculo diferencial e integral. Estas investigaciones se han realizado con estudiantes de las carreras de ciencias e ingeniería de la universidad de Sonora. En los trabajos de estos investigadores se muestran las actividades didácticas en las que enfrentan al estudiante encaminadas a obtener el manejo y la articulación de registros de representación gráficos y algebraicos principalmente, hacen énfasis en la articulación del registro gráfico al algebraico basados en computadora, habiendo señalado la falta de articulación entre estos registros a través de la historia y discuten su importancia en la



enseñanza-aprendizaje de temas como la derivada y la integral.

Artigue<sup>5</sup> quien también cita a Duval,<sup>11</sup> menciona como una de las dificultades en las investigaciones concerniente a funciones, las articulaciones de los registros simbólicos de las expresiones de la noción de función, donde los trabajos concuerdan, junto con las dificultades cognitivas que son reales en las conversiones de un registro a otro, o en el trabajo dentro de un mismo registro, estas investigaciones señalan como causa de las dificultades los hábitos de la enseñanza tradicional. El gran predominio que en ella se le otorga al registro algebraico y el status infra-matemático que se da al registro gráfico impiden manejar adecuadamente este tipo de dificultades y ayudar al estudiante a construir las flexibilidades necesarias en este nivel.

La presente investigación pedagógica fue motivada debido a las dificultades observadas en el cálculo integral de ingeniería al respecto del concepto de función por lo que se enfoca al estudio de las dificultades de aprendizaje en estudiantes de ingeniería, buscando detectar en particular las mayores oportunidades de mejora en relación al uso de las distintas representaciones semióticas. La ausencia de la confrontación entre registros de representación semiótica en la matemática, son muestra de las dificultades que se pueden tener en la enseñanza tradicional que aún se practica en nuestro contexto, específicamente en el concepto de función, concepto esencial para la enseñanza-aprendizaje de otros temas en las matemáticas de ingeniería.

## METODOLOGÍA

Con el propósito de detectar las deficiencias de aprendizaje y dominio en la correspondencia semiótica entre los registros algebraicos y gráficos en relación al concepto de función en los estudiantes de ingeniería, se diseñó y aplicó un test relacionado con los contenidos fundamentales que se asocian a dicho concepto. Dicho test fue aplicado a estudiantes de los dos primeros años (2º, 3º y 4º semestre) de ingeniería.<sup>16</sup>

Considerando que el dominio del pasaje entre registros es esencial en el aprendizaje de las matemáticas de ingeniería, el contenido del test se centra en la confrontación entre los registros algebraico

y gráfico. El diseño del test se realizó tomando en cuenta los resultados y sugerencias de Guzmán,<sup>11-13</sup> quien presentaba reactivos confrontando los distintos registros de representación, principalmente algebraicos y gráficos. En nuestro caso se optó por un formato de reactivos de opción múltiple simple, con cinco opciones, solo una de ellas correcta, en todos los casos se incluyó la opción “ninguna de las anteriores”. El test consta de diez reactivos, tres que tratan de tareas internas al registro algebraico, cinco que se refieren a pasajes del registro gráfico al algebraico y dos que se refieren a pasajes del registro algebraico al gráfico. Los reactivos se diseñaron considerando los conocimientos que se espera tenga un estudiante de ingeniería al finalizar su primer semestre.

Las tareas específicas consideradas para cada reactivo fueron: (1) Calcular el valor de una función, dado el valor de la variable independiente. (2) Determinar la ecuación de un círculo con centro en el origen dada su representación gráfica. (3) Confrontar una ecuación con la representación gráfica de una serie de curvas para determinar cuál de ellas corresponde a la ecuación. (4) Hallar el dominio y rango (contradominio) de una función. (5) Confrontar la gráfica de una función con una serie de funciones con dominio y rango correspondientes, para determinar cuál pertenece a la gráfica. (6) Interpretar la gráfica de una función a medida que aumenta la variable independiente. (7) Identificación de la variable dependiente e independiente, dada la función. (8) Comparar las formas de las funciones dadas. (9) Calcular el valor de la función, dado el valor de la variable independiente como un número irracional. (10) Identificar valores de la variable independiente dada la gráfica de la misma, mostrando algunos puntos con sus coordenadas correspondientes. En las figuras 1 y 2 se muestran los reactivos que conformaron el test.

Los reactivos 1, 7 y 9 pretenden medir el dominio de tareas internas del registro algebraico: El reactivo 1 exige una tarea sencilla de manipulación algebraica relativa a la sustitución de la variable independiente como número entero en una función que contiene fracciones. El reactivo 7 presenta la tarea de identificar variable dependiente e independiente, poniendo en juego componentes esenciales del concepto de función. El reactivo 9

requiere manipulación algebraica, al darse un valor irracional a la variable independiente para sustituirlo en una función definida a través de un cociente.

Los reactivos 2, 5, 6, 8 y 10 evalúan el dominio de tareas relativas a pasajes del registro gráfico al algebraico: El reactivo 2 pide la determinación de la ecuación de un círculo con centro en el origen, dada la representación gráfica del mismo. El reactivo 5 presenta la tarea de identificar una función y de obtener dominio y rango, dada la representación gráfica de la función. El reactivo 6 conlleva la tarea de identificar características propias de la gráfica de una función, dada la gráfica y la función, poniéndose en juego conceptos de máximos y mínimos. El reactivo no solo tiene las tareas internas del registro algebraico, comparando las formas de las funciones dadas sino se da la opción gráfica, que se piensa usaría principalmente para deducir mediante la característica de la curva que se trata de una función

inversa. El reactivo 8 muestra la tarea de comparar las formas de las funciones dadas. El reactivo 10 exige la tarea de identificar sobre una curva los valores de la variable independiente mediante los puntos marcados sobre la curva, con sus coordenadas correspondientes.


Los reactivos 3 y 4 se refieren a pasajes del registro algebraico al gráfico: El reactivo 3 se refiere a la tarea de identificar la gráfica de una ecuación. El reactivo 4 se refiere a una tarea habitual en el registro algebraico que trata de la noción de dominio y rango de una función implicando conceptos de composición de funciones, además de identificar la gráfica de la función, lo que implica el pasaje entre registros.

El test fue aplicado a una muestra de 433 estudiantes de ingeniería, de los cuáles 176 cursaban el segundo semestre, 76 cursaban el tercer semestre y 181 cursaban cuarto semestre, con edades de entre 17

**EXAMEN PARA EL ESTUDIO DE LA SOLIDEZ DE CONOCIMIENTO AL RESPECTO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN**


1.- Si la variable independiente de la función  $y = (1/4)x + 1$  es 3, cuál es el valor de la función.  
 A) 13/12 B) 15/12 C) 5/4 D) 7/4 E) Ninguna de las anteriores

2.- Hallar la ecuación del círculo



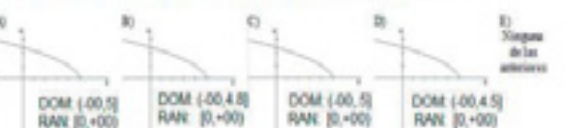
A)  $x^2 + y^2 + 4 = 0$  B)  $x^2 + y^2 + 2 = 0$  C)  $x^2 + y^2 - 2 = 0$  D)  $x^2 + y^2 - 4 = 0$  E) Ninguna de las anteriores

3.- Identifique la gráfica correspondiente a la ecuación  $y^2 = 3x$




E) Ninguna de las anteriores

4.-Cuál es el dominio y rango (contra dominio) de la función  $y = \sqrt{3-x}$



A) DOM:  $(-\infty, 5]$  RAN:  $[0, +\infty)$  B) DOM:  $(-\infty, 4.8]$  RAN:  $[0, +\infty)$  C) DOM:  $(0, 5]$  RAN:  $[0, +\infty)$  D) DOM:  $(0, 4.5]$  RAN:  $[0, +\infty)$  E) Ninguna de las anteriores

5.- Identificar la función, el dominio y el rango correspondiente a la gráfica.

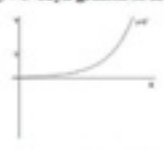


A)  $y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 2 \\ 6 & \text{si } x = 2 \end{cases}$  B)  $y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 2 \\ 6 & \text{si } x = 2 \end{cases}$  C)  $y = x^2$  D)  $y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 2 \\ 6 & \text{si } x = 2 \end{cases}$  E) Ninguna de las anteriores

DOM:  $(-\infty, +\infty)$  RAN:  $(0, +\infty)$  DOM:  $(-\infty, +\infty)$  RAN:  $(0, +\infty)$  DOM:  $(-\infty, +\infty)$  RAN:  $[0, +\infty)$  DOM:  $(-\infty, +\infty)$  RAN:  $(0, +\infty)$

Fig. 1 Reactivos 1 a 5 del test aplicado.

6.- Cómo es la función  $y = 2^x$  cuya gráfica se muestra a medida que crece x

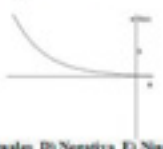


A) Decreciente B) Polinomial C) Creciente D) Periódica E) Ninguna de las anteriores

7.- Identifica de la función  $z = \frac{4x^2}{y^2}$  la variable independiente y la dependiente

A) z dependiente B) z dependiente C) z dependiente D) z dependiente E) Ninguna de las anteriores  
 y independiente y independiente y independiente y independiente

8.- Cómo es la función  $G(x) = \frac{1}{x}$  cuya gráfica se muestra, con respecto a  $y = 2^x$



A) Inversa B) Recíproca C) Igual D) Negativa E) Ninguna de las anteriores

9.- De la función  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  encuentre  $f(\sqrt{2}-1)$

A)  $f(\sqrt{2}-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  B)  $f(\sqrt{2}-1) = \frac{1}{2}$  C)  $f(\sqrt{2}-1) = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$  D)  $f(\sqrt{2}-1) = \frac{1}{\sqrt{2}+2}$  E) Ninguna de las anteriores

10.- De la gráfica que se muestra, cuál es el, o los valores de x correspondientes si la función "f" es cero.



A) x = -2 B) x = 2 C) x = 2.25 D) x = 2.7 E) Ninguna de las anteriores

Fig 2.- Reactivos 6 a 10 del test aplicado.

y 19 años, tabla I. Para la evaluación de los tests se consideró un mínimo de 7 respuestas correctas como indicativo de un dominio satisfactorio del concepto de función y sus registros gráfico y algebraico.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la tabla I se indica el porcentaje de estudiantes que contestó satisfactoriamente siete o más de los reactivos, el resultado global de aproximadamente 16% indica que efectivamente existen altas dificultades de aprendizaje y dominio del concepto de función y su registros algebraico y gráfico. Los resultados por semestre, con porcentajes de 19.89, 11.85 y 13.82 para los estudiantes de 2°, 3° y 4° semestre, respectivamente, sugieren que no necesariamente la mayor experiencia y madurez de los estudiantes de tercero y cuarto semestre, respecto de los de segundo, implica un mejor dominio del concepto de función. Es decir, a pesar de que los estudiantes continúan avanzando en sus estudios, las bases del concepto de función no se reafirman ni se logra la maduración del concepto. Más aún, se podría sugerir que a medida que el estudiante avanza y estudia otros conceptos, existe un grado de olvido del concepto de función.

Con el propósito de identificar cuáles de los reactivos y que tipo de tareas presentan las mayores dificultades, en la tabla II se muestran los porcentajes, globales y por semestre, de las respuestas incorrectas para cada reactivo. Observando los resultados globales, es posible identificar que los

reactivos 2, 5 y 8, con porcentajes de 86.83, 74.59 y 72.28, respectivamente son, por mucho, los que presentaron mayor dificultad para los estudiantes.

El gráfico de la figura 3 ilustra los porcentajes de respuestas incorrectas de cada reactivo para cada uno de los semestres. Este gráfico, además de corroborar que los reactivos 2,5 y 8 fueron los de mayor porcentaje de respuestas incorrectas, permite observar con mayor claridad que en general no existen diferencias importantes en los resultados para los distintos semestres, el comportamiento es muy parecido para todos los reactivos y las variaciones no son sistemáticas, lo que permite concluir que las dificultades y deficiencias en el aprendizaje y dominio del concepto de función son las mismas para los tres semestres involucrados en este estudio.

Los tres reactivos con mayor porcentaje de error, son reactivos basados en tareas de pasaje del registro gráfico al algebraico, este resultado es una fuerte evidencia de que las mayores dificultades de aprendizaje y dominio del concepto de función se encuentran en esta categoría de tareas. En estos reactivos la tarea solicitada exige la interpretación de un gráfico para que a partir de eso se deduzca ya sea la ecuación correspondiente (reactivo 2) o el dominio; el rango una vez identificada la función (reactivo 5); y deducir si se trata de una función inversa a partir del gráfico (reactivo 8).

Este resultado parece estar ligado al hecho de que en la práctica docente tradicional se observa en general que el estudiante utiliza el registro algebraico con muy pocas conexiones con otros registros semióticos; en particular en la enseñanza de las matemáticas de ingeniería, el gráfico y las tablas de valores se emplean como soporte, pero no se explota lo que cada uno puede aportar en representaciones concretas del concepto en cuestión y pocas veces se busca de manera sistemática reforzar el dominio de tareas que impliquen pasaje entre registros.

Por nuestra parte coincidimos con otros autores<sup>1,2,11,18,20-22</sup> en que en la enseñanza de la matemática tiene gran importancia la confrontación del registro gráfico con otros registros de representación semiótica para el desarrollo de habilidades del pensamiento. En nuestro estudio se hace énfasis en el concepto de función por tratarse de un concepto esencial para la enseñanza-aprendizaje de otros



Fig 3. - Porcentaje de respuestas incorrectas por reactivo y por semestre.

conceptos como la derivada y la integración.

Enfaticemos que el análisis del test y de los resultados deja en evidencia que el cambio o pasaje entre registros es la gran dificultad que encuentran los estudiantes, sobre todo cuando el pasaje es del registro gráfico al algebraico. Esta misma dificultad se ha encontrado en Francia<sup>11-15</sup> y en Chile,<sup>17-19</sup> en torno a funciones al respecto de pasajes entre registros, con estudiantes de edades de 14 a 16 años. El que la misma dificultad se encuentre en estudiantes de distinta madurez sugiere que el carácter de esta dificultad no es de orden conceptual, sino de orden conductual, parece estar relacionada con una falta de sensibilización o de experiencia de los estudiantes con actividades y problemas que involucren estos cambios de registro de expresión.

El excesivo privilegio del registro algebraico, hecho innegable en la gran mayoría de los diseños de aprendizaje actualmente en práctica, así como la ausencia de otros registros, resulta ser desventajoso para los estudiantes, ya que no tienen la posibilidad de sensibilizarse con problemas que exigen articular los diferentes registros. Los resultados obtenidos dejan establecido que la articulación es un objetivo que no se está cumpliendo, posiblemente porque esto no se ha tomado suficientemente en cuenta en los actuales diseños de instrucción. El registro gráfico es utilizado, en general, con carácter ilustrativo o de soporte. El hecho de que los estudiantes universitarios tengan dificultades al interpretar datos en un gráfico muestra por lo menos dos aspectos: (a) La falta de práctica o la no-manipulación en el trabajo con gráficos y (b) Una cierta incapacidad para enfrentar situaciones no habituales. Es obvio que en general los estudiantes pueden resolver problemas de una complejidad cognoscitiva superior cuando han sido preparados y sin embargo, frente a situaciones no habituales y que pueden considerarse sencillas, no reaccionan con el éxito deseado.

Resumiendo, de nuestros resultados se demuestra y documenta que uno de los obstáculos en el aprendizaje es la falta de una conversión congruente entre registros de representación del concepto de función. Se presume que esta dificultad es generalizada en los diferentes cursos de matemáticas y muy posiblemente existen dificultades similares en otras materias, tanto en las llamadas ciencias

básicas como en los cursos de especialización en las ingenierías. Se piensa que esto es frecuente debido a que el proceso enseñanza-aprendizaje ha seguido una didáctica tradicional.

Regresando al caso particular estudiado, la tendencia más general difundida es la transmisión de los procesos de pensamiento propios de la matemática más que la transferencia de contenidos. La matemática es una ciencia en la que el método predomina sobre el contenido, es saber hacer. Se concede gran importancia al estudio de la psicología cognitiva referida a los procesos mentales de resolución de problemas. Puede decirse que mucho del éxito en el aprendizaje de un concepto matemático radica en la actividad que se puede realizar en las diferentes representaciones; implica actividad en un registro (tratamiento metodológico), posteriormente es necesario realizar una coordinación entre los diferentes registros (pasaje o conversión), enfrentar la no congruencia entre registros hasta lograr construir la estructura cognitiva que permita reconocer el objeto matemático en sus diferentes representaciones. Por ejemplo, es inconveniente acceder al concepto de función por medio de una definición, es necesario tener actividad con las diferentes representaciones, la algebraica, tablas, gráficos y el lenguaje natural; tal actividad implica creación, tratamiento y pasaje o conversión entre registros de representación.

Los estudiantes de matemáticas en ingeniería aprenden y acumulan conocimientos sobre conceptos, técnicas, métodos, sin tomar suficientemente en cuenta las interrelaciones que existen entre disciplinas como la física, química o de algún área de especialidad dentro de la ingeniería. El hacer estas consideraciones en un tratamiento metodológico permitiría lograr que el estudiante adquiera, use y domine esos conocimientos en forma más eficiente. El uso de los nuevos métodos de enseñanza<sup>16,23,26</sup> como la resolución de problemas a través de situaciones donde se establezcan diálogos heurísticos, además de la confrontación entre registros, del gráfico al algebraico y viceversa, se pueden hacer aportaciones importantes a la enseñanza de los temas como el de función y otros tópicos de las matemáticas en general.

## CONCLUSIONES

Se ha documentado a través de un test aplicado a estudiantes de ingeniería que las mayores dificultades de aprendizaje del concepto de función están asociadas a tareas de transferencia entre registros semióticos. Específicamente, son las tareas de pasaje del registro gráfico al algebraico las que presentan el mayor reto para los estudiantes. No se encontró evidencia de que los estudiantes de tercero o cuarto semestre tengan un mejor dominio del concepto que los estudiantes de segundo semestre, por el contrario, parece existir un grado de olvido del concepto de función en un plazo corto de tiempo, esto va asociado a la asimilación del concepto. Los resultados pueden explicarse en función del privilegiado tratamiento del registro algebraico en la metodología de enseñanza tradicional y sugieren que para mejorar el aprovechamiento se deben incrementar las aplicaciones del registro gráfico y las actividades de transferencia entre registros para el desarrollo de habilidades del pensamiento dentro de la enseñanza-aprendizaje de conceptos en matemáticas. La realización de este estudio fue basado en el concepto de función por la importancia que tiene en la adquisición de otros conceptos como son la derivación e integración dentro de la ingeniería, se originó motivado por las dificultades observadas al respecto del concepto de función en la asignatura del Cálculo Integral en la ingeniería de nuestro contexto.



## REFERENCIAS

1. Bosch Casabó M. Un punto de vista antropológico: La evolución de los “Instrumentos de representación” en la actividad matemática. URL: [http://www.ugr.es/local/seiem/IV\\_Simposio.htm](http://www.ugr.es/local/seiem/IV_Simposio.htm). SEIEM. Universidad de Granada. España, 2000.
2. Cristóbal, E. C. Acerca de las Representaciones Semióticas Utilizadas en el Álgebra Lineal. Memorias del VII simposio internacional en educación matemática, p.198. México, 1999.
3. Guzmán, M. De, Gil, D., Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación la Ciencia y la Tecnología. <http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm>. p. 6-13.
4. Larson, H., Edwards. Preparación para el Cálculo. Madrid. España, 1999.
5. Artigue, M. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. P. Gómez (Ed.), Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (pp. 97-140). México. Grupo editorial Iberoamérica, 1995.
6. Eisenberg, T. Functions and associated learning difficulties, En Taal, D. (Ed). Advanced Mathematical Thinking, 14-152. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.
7. Lienhardt, G., Zaslavski, O., Stein, M.K. Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching, Review of Educational Research, Spring, 60(1)1-64, 1990.
8. Dubinsky, Ed y Harel G. (Eds.). The concept of Function: Some aspects of Epistemology and Pedagogy. MAA Notes, N°25. 1992
9. Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Ed.). Ingeniería didáctica en educación matemática, pp. 97-140. “Una empresa docente” & Grupo Editorial Iberoamérica. México.
10. Farfán, RM. (Ed.) IV Seminario Nacional de Investigación en Didáctica del Cálculo. Monterrey, México: Cinvestav-IPN, 1993.
11. Duval, R. Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento,

- Investigaciones en Matemática Educativa II, Université Louis Pasteur de Strasbourg, France Ed. Hitt F. Editorial Iberoamérica, pp. 173-201, 1998.
12. Duval, R. Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères-IREM*, 17, 121-138, 1994.
  13. Duval, R. Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques?, *Recherches en didactique des mathématiques*, 16/3, 349-382, 1996.
  14. Duval, R. Graphiques et équations: l'articulation de deux registres, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. Vol. I, p. 235-253, 1988.
  15. Duval, R., Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. Pp. 3-26. *Memorias PME-NA XXI*, México, 1999.
  16. García, Q., L. Propuesta Didáctica. Tratamiento Metodológico para el Tema de Función en F.I.M.E. San Nicolás, N.L. México, 1999.
  17. Guzmán, I. Le rôle des représentations dans l'appropriation de la notion de fonction. Tesis de Doctorado. Universidad Louis Pasteur de Estrasburgo, Francia, 1990.
  18. Guzmán, I. Registros en juego en el concepto de función, Comportamiento de una muestra de alumnos chilenos. *Cursillo, XVII Semana de la Matemática de la Universidad Católica de Valparaíso*, 1990.
  19. Guzman I., Consigliere, D., Algunas dificultades de aprendizaje detectadas en alumnos de Cálculo Diferencial. *Revista de Educación Matemática* Vol 4, No 1, abril 1992, p. 54-64.
  20. Godino, Juan, D. M., Recio, A. Un Modelo Semiótico para el Análisis de la Relación entre Pensamiento, Lenguaje y Contexto en Educación Matemática. Universidad de Granada y Córdoba. [www.sectormatematica.cl/educmatem/semiotico.htm.c](http://www.sectormatematica.cl/educmatem/semiotico.htm.c)
  21. Grijalva, A., et al. El Papel de los Registros de Representación Semiótica en la enseñanza del Cálculo Integral. Formato Electrónico <http://www.mat.uson.mx/Memorias%20XIII/Grijalva%20Monteverde.pdf>. Proyecto de investigación apoyado por la Universidad de Sonora, México, 2002.
  22. Ibarra, S., et al. El Papel de los Registros de Representación Semiótica en la enseñanza del Cálculo Diferencial. Formato Electrónico <http://www.mat.uson.mx/semana/Memorias%20XIII/Ibarra%20Olmos.pdf>. Proyecto de investigación apoyado por la Universidad de Sonora, México, 2002.
  23. Kaput, J. J. Notations and Representations as mediators of constructive processes. En: von Glasersfeld, E. (ed.), *Radical constructivism in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.
  24. Luppó, S., *Matemática I. Trabajos Prácticos*. Página Web del Colegio Nacional Ushuaia (CNU), Universidad de Patagonia. Argentina, 2001.
  25. Roa, N. A. de la. La calculadora y los sistemas semióticos de representación. [www.uaq.mx/matemáticas/redm/art/a0502.html](http://www.uaq.mx/matemáticas/redm/art/a0502.html). Este artículo apareció originalmente en la revista *Correo del Maestro*, número 49, junio de 2000.
  26. Romero, I.; Rico, L. Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en Secundaria. *Revista EMA*, 4/2, 117-151, 1999.
  27. Salinas, P., Alanís, A. Juan. Reconstrucción para el Aprendizaje y su Enseñanza. *Elementos del Cálculo*. México, 2000.
  28. Portuondo R, Vázquez R. Algunos aspectos de la enseñanza problemática. Universidad de Camagüey, Cuba, 2000.