

# Aplicación del método de elemento finito al análisis nodal

Martha Guerrero\*, Sergio Valderrábano S.\*,  
Rolando Campos R.\*, Miren Ainhoa Isasi Larrea\*\*

## Abstract

*The first four natural modes of vibration of a beam with type I section subjected to different conditions were studied. Results were obtained analytically, experimentally and numerically. The later ones by using commercial finite element packages (Patran™ and Abaqus™). A comparison of the three techniques used is presented as well as the advantages of the finite element method (FEM). A brief introduction to FEM is presented, and an overview of the chances of research using this technique.*

## Resumen

*Se estudiaron los primeros cuatro modos transversales naturales de vibración de una viga de perfil tipo I sometida a diferentes condiciones de empotramiento. Los resultados se obtuvieron analíticamente, experimentalmente y numéricamente, esto último usando paquetes comerciales de elemento finito (Patran™ y Abaqus™). Se hizo una comparación de las diferentes técnicas empleadas, y un análisis de las ventajas del método de elemento finito. Se explican las generalidades teóricas de la técnica numérica, sus alcances, aplicaciones y las oportunidades de investigación utilizando esta técnica.*

## INTRODUCCIÓN

Los métodos numéricos son técnicas mediante las cuales es posible resolver, aproximadamente, complejos problemas matemáticos de integración, diferenciación, resolver sistemas de ecuaciones y encontrar raíces de ecuaciones, por medio del simple uso de operaciones aritméticas.<sup>1</sup> Ya que casi todos los procesos físicos se pueden representar

matemáticamente mediante ecuaciones o algún conjunto de ecuaciones, es por lo tanto posible resolver problemas complicados con técnicas numéricas.

Dentro de los métodos numéricos existe una gran variedad de éstos, dependiendo de la aplicación que tiene el método y del concepto del que se parte para hacer la simplificación, es decir, cambiar el problema complejo por una serie de operaciones aritméticas.

El método de elemento finito es un método numérico, que surgió como tal en la década de los 60's,<sup>2</sup> desde entonces a la fecha ha pasado de ser una herramienta novedosa a necesaria tanto a nivel académico como industrial. Se le ha aplicado en casi todos los campos del saber con éxito, alcanzando sus mayores aplicaciones en el campo de la ingeniería. El éxito del método también se debe al surgimiento de computadoras más rápidas y con mayor capacidad de almacenamiento y manejo de datos, aunado al desarrollo de programas especializados.

La aplicación que se presenta aquí concierne el campo de las vibraciones. El estudio de las vibraciones se refiere a los movimientos oscilatorios de los cuerpos y a las fuerzas asociadas a ellos. Dicho estudio es muy importante dentro del diseño mecánico.

## VIBRACIONES

Todos los cuerpos que poseen masa y elasticidad son capaces de vibrar. La mayoría de las máquinas y estructuras experimentan vibración hasta cierto grado y su diseño requiere de consideraciones de su conducta oscilatoria.<sup>3</sup> Las vigas son elementos estructurales de suma importancia, ya que forman parte del esqueleto de edificios y puentes. Dichas estructuras se encuentran sujetas a fuentes de vibración externa, que pueden ser producidas por motores, compresores, etc.

\*

Facultad de Ing. Mecánica y Eléctrica, UANL.

\*\*

Universidad del País Vasco, España.

Si alguna de las fuentes de vibración presenta alguna frecuencia que coincida con una de las frecuencias naturales del elemento estructural, dicho elemento entraría en resonancia, la cual se caracteriza por una amplitud de vibración excesiva, que puede dañar o incluso destruir la estructura.<sup>4</sup> La falla de estructuras de puentes, edificios o alas de avión traería resultados desastrosos. Por lo tanto, es necesario conocer las diferentes frecuencias naturales o modos de vibración de los elementos estructurales, para evitar las condiciones de resonancia.

## MÉTODO DE ELEMENTO FINITO

El concepto básico de este método es el de dividir el continuo en un número finito de elementos (de allí su nombre), es decir discretizar el continuo y resolver sobre cada uno de los elementos las ecuaciones del sistema para después ensamblar la solución total.<sup>5</sup>

El método fue propuesto primero en 1943, pero no fue hasta 1956 que se presentaron los primeros resultados obtenidos con este método y en 1960 se le llamó al método como se le conoce ahora.<sup>6</sup>

Para construir un modelo numérico se define un número finito de puntos, los cuales podrán estar unidos después por líneas para formar superficies y sólidos y de esta manera la geometría a estudiar. Estos puntos son llamados nodos, éstos se encuentran en las fronteras de los elementos que se generaron por la discretización del continuo, además son los responsables de mantener la continuidad al mantener unidos a los elementos. El sistema es ahora un conjunto de elementos unidos mediante nodos.

Ahora bien, las ecuaciones aritméticas que reemplazan a las ecuaciones diferenciales que gobiernen al sistema objeto de estudio, se

conocen como ecuaciones de discretización.<sup>7</sup> Para llegar a ellas se utilizan diversas técnicas matemáticas, las más comunes son: aproximación directa, método variacional, método de residuos ponderados, series de Taylor y balance de energía, estos métodos han sido discutidos extensamente en otro documento.<sup>5</sup>

Para obtener la solución de un problema mediante el método de elemento finito se siguen los pasos genéricos: generación de la geometría, discretización del sistema, selección del tipo de elemento, asignación de las propiedades del material o materiales, definición de cargas y condiciones frontera, y solución del conjunto de ecuaciones.<sup>8</sup> En la siguiente sección se explica como se construyeron tanto el modelo numérico como el experimental.

## METODOLOGÍA

Se estudiaron los modos de vibración natural de una viga de acero comercial, con las siguientes características, módulo de elasticidad  $200 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>, relación de Poisson 0.3 y densidad 7850 kg/m<sup>3</sup>. La forma de la sección de la viga era tipo **I**, las dimensiones de la viga se presentan en la Fig. 1.

La viga estaba sujeta a diferentes condiciones de sujeción, simplemente apoyada, es decir sólo colocada sobre soportes en alguno de sus extremos, o empotrada; en este caso se le restringe de cualquier movimiento a alguno de sus extremos. Aquí se verán tres casos, el de la viga simplemente apoyada en sus dos extremos (biapoyada), el de la viga simplemente apoyada en un extremo y empotrada en el otro (apoyada - empotrada) y el de la viga empotrada en sus dos extremos (biempotrada). La longitud de la viga variaba de acuerdo a las condiciones de sujeción. Para la viga biapoyada y biempotrada se consideró una longitud de 3.60 m, para la viga apoyada - empotrada de 3.40 m. El caso de la viga biempotrada fue estudiado solamente en forma teórica y numérica.

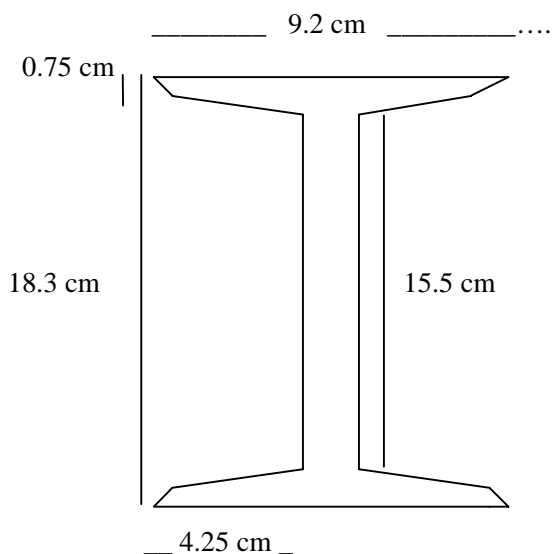


Fig. 1 Dimensiones de la sección de la viga.

Para el análisis experimental se utilizó un sistema generador de vibraciones y uno de medición. La Fig. 2 muestra el arreglo utilizado. Este arreglo es el que se utiliza para las prácticas de vibraciones de licenciatura y ha sido descrito en otro documento.<sup>9</sup>

Para cada tipo de sujeción de la viga se obtuvieron los cuatro primeros modos de vibración transversal, a cada modo de vibración le corresponde una frecuencia natural, éstas se obtuvieron de forma teórica mediante la Ec. (1).<sup>10</sup>

$$f_{ni} = C_i \sqrt{\frac{EI}{qL^4}} \quad (1)$$

Donde  $i$  es el modo de vibración,  $f_{ni}$  es la frecuencia natural del modo  $i$  en Hertz,  $C_i$  la constante experimental que depende del modo de vibración y del tipo de empotramiento o soporte,  $E$  el módulo de elasticidad en Pascales,  $I$  el momento de inercia de área en  $m^4$ ,  $q$  es la

distribución lineal de masa en  $kg/m$ ,  $L$  es la longitud total de la viga en metros.



Fig.2 Arreglo experimental utilizado.

Para el modelo numérico se utilizaron en este trabajo los paquetes de elemento finito Patran<sup>TM</sup> y Abaqus<sup>TM</sup> instalados en una estación de trabajo Silicon Graphics INDY 5500 que trabaja con plataforma UNIX y sistema operativo IRIX 6.2.

En este caso el paquete Patran<sup>TM</sup> es el preprocesador, donde se llevan a cabo los siguientes pasos: construcción del modelo, generación del mallado, selección de las propiedades del material, imposición de condiciones frontera y selección del tipo de análisis, además el preprocesador es la interfase gráfica que permite importar la geometría a una base de datos que el procesador, en este caso el paquete Abaqus<sup>TM</sup>, utiliza para resolver todas las ecuaciones de los elementos finitos que se involucran en el modelo. La forma y el tiempo para resolver las ecuaciones dependen de la asignación de criterios que se especifique.

El postprocesador, nuevamente el Patran<sup>TM</sup>, es la interfase gráfica que interpreta los resultados generados por el procesador, Abaqus<sup>TM</sup>. Estos resultados pueden ser manipulados y transformados

para visualizar de manera más clara el proceso y poder obtener conclusiones. Los resultados se presentan de una manera gráfica mediante mapas de colores y animaciones.

Para simular las diferentes condiciones de sujeción se procedió a imponer condiciones restrictivas de desplazamiento en los nodos de los elementos localizados en los extremos de la viga. Para cada extremo apoyado se impidió el movimiento traslativo en los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Para cada extremo empotrado se impidió el movimiento traslativo y rotacional en los mismo ejes.

Los resultados obtenidos por la tres técnicas son presentados y discutidos en la siguiente sección.

## RESULTADOS

En la Tabla I se resumen las constantes  $C_I$  para los primeros cuatro modos de vibración transversal encontradas mediante la Ec. (1) para los tres casos analizados.

**TABLA I Constantes  $C_I$ :**

Modo	Constante $C_i$		
	Biapoyada	Apoyada - Empotrada	Biempotrada
1°	1.57	2.46	3.46
2°	6.28	7.95	9.82
3°	14.1	16.6	19.2
4°	25.2	28.4	31.8

Los resultados de frecuencia teóricos, experimentales y numéricos, obtenidos de los modos de vibración transversal natural de una viga de acero comercial de sección tipo **I**, sujeta

a diferentes condiciones, biapoyada; apoyada - empotrada y biempotrada, son presentados en la Tabla II.

En la Tabla III se presentan las discrepancias entre los resultados encontrados por la técnica numérica y la teórica, y en la Tabla IV las diferencias entre los resultados teóricos y los experimentales, en ambos casos en por ciento de error relativo.

**TABLA II Resultados de frecuencias.**

Valores de frecuencia en Hz.			
Modos de vibración	Teóricos	Experimentales	Numéricos
Viga Biapoyada			
1°	13.263	13.6	12.985
2°	53.051	48.8	51.642
3°	119.111	105.7	117.98
4°	212.879	168	198.03
Viga Apoyada - Empotrada			
1°	23.298	18	22.704
2°	75.292	57	73.046
3°	157.213	115	152.01
4°	268.966	251	259.67
Viga Biempotrada			
1°	36.992	--	37.113
2°	104.990	--	101.43
3°	205.276	--	196.64
4°	339.989	--	319.64

El máximo error encontrado entre la técnica numérica y los resultados teóricos es del 6.97% en el cuarto modo de vibración de la viga biapoyada, en general se notó una tendencia a aumentar el error

conforme se encuentran modos de vibración más complejos. Aún así los resultados obtenidos con el modelo computacional son buenos. Sin embargo los errores encontrados entre los resultados teóricos y los experimentales, en el caso de la viga biapoyada son aceptables hasta el tercer modo de vibración, en el cuarto modo, al igual que los cuatro modos de vibración de la viga apoyada empotrada, los errores son altos. Esto se puede deber, en ambos casos a una mala calibración del equipo utilizado, además de ciertas consideraciones en el sistema de la viga apoyada empotrada.

**TABLA III Error relativo porcentual entre el método teórico y el numérico.**

Modos de vibración	Biapoyada	Apoyada empotrada	Biempotrada
1°	2.10%	2.55%	0.33%
2°	2.65%	2.98%	3.39%
3°	0.95%	3.31%	4.21%
4°	6.97%	3.45%	5.98%

**TABLA IV Error relativo porcentual entre el método teórico y el experimental.**

Modo	Biapoyada	Apoyada-empotrada
1°	2.48%	22.74%
2°	8.01%	24.29%
3°	11.26%	26.85%
4°	21.08%	6.68%

La Fig. 3 muestra los resultados numéricos para el tercer modo transversal natural de vibración de la viga biapoyada. La Fig. 4 muestra el segundo modo de vibración transversal para el caso de la viga apoyada - empotrada y la Fig. 5 presenta el primer modo transversal de vibración natural de la viga biempotrada.

Además de los resultados aquí presentados fue posible observar, mediante el modelo numérico, modos de vibración natural longitudinales y torsionales.

## CONCLUSIONES.

En general, este es un ejemplo sencillo de lo que se puede hacer con el método de elemento finito. El método presenta ventajas sobre el tradicional método de prueba y error, ya que es posible modelar situaciones muy complejas que experimentalmente sería muy costoso llevar a cabo, además se pueden estudiar un número infinito de posibilidades, que sería imposible analizar en planta, en el caso industrial, o experimentalmente, en el caso presentado. También presenta ventajas sobre el método analítico (teórico), porque en ocasiones el proceso a simular es tan complejo, que se imposibilita encontrar una solución exacta, mientras que con el método de elemento finito es posible encontrar una variedad de soluciones aproximadas.

Otra de las ventajas de los resultados aquí expuestos, es el hecho de que mediante el análisis numérico es posible observar las vibraciones torsionales y longitudinales, las cuales no se observan en el estudio experimental; además de obtener valores de las amplitudes, cosa que no es posible con la teoría utilizada, ni con el arreglo experimental.

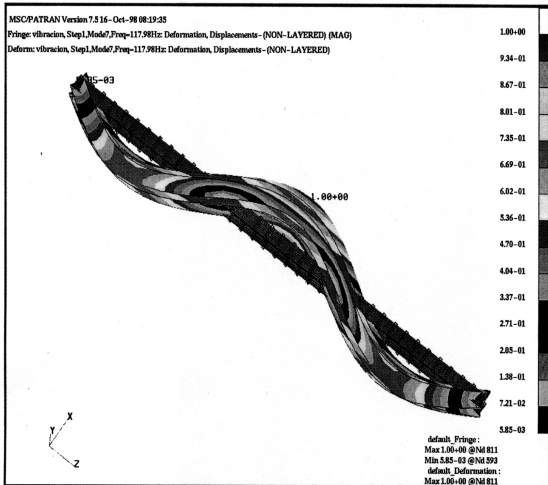


Fig. 3 Tercer modo transversal natural de vibración de la viga biapoyada.

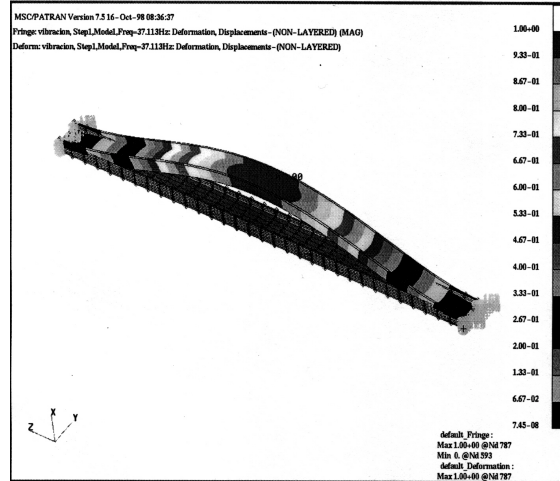


Fig. 5 Primer modo transversal natural de vibración de la viga biempotrada

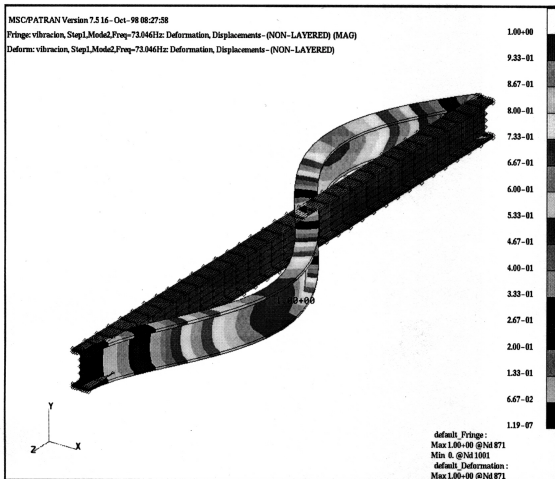


Fig.4 Segundo modo transversal natural de vibración de la viga apoyada - empotrada.

En la actualidad el método de elemento finito se utiliza en la Facultad de Ingeniería Civil, para el estudio de estructuras y en la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica para hacer predicciones de vibraciones, comportamiento térmico, problemas de calor, pruebas mecánicas, estudios de fatiga, problemas de corrosión, entre otros. La mayoría de los estudios realizados son para satisfacer alguna necesidad del sector productivo de la sociedad, o bien como parte de alguna investigación básica.

Las futuras aplicaciones de este método dependerán en gran parte de las necesidades de nuestra sociedad y de profesionistas debidamente calificados para desarrollar este tipo de trabajos.

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores de este artículo desean expresar su agradecimiento al Conacyt, por el financiamiento proporcionado para que se llevara a cabo este estudio,

así mismo se agradece a la F.I.M.E por todo el apoyo brindado.

### **BIBLIOGRAFIA**

1. S.C. Chapra, R.P. Canale, Métodos numéricos para ingenieros, McGraw Hill, 1988.
2. K.H. Huebner, E.A. Thornton, T.G. Byrom, The Finite Element Method for Engineers, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc. 1995.
3. R.F. Steidel Jr., Introducción al estudio de las vibraciones mecánicas, CECSA, 1989.
4. W. T. Thomson, Teoría de vibraciones. Aplicaciones, Prentice Hall, 1983
5. S.V. Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Corporation 1980.
6. S. Kobayashi, S-I Oh, T. Altan, Metal Forming and the Finite Element Method, Oxford University 1989.
7. O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, The Finite Element Method, Vol. I, Fourth Edition, McGraw Hill, 1989.
8. P. Sargent, H. Shercliff, Modelling Material Processing; A state of the art review and proposals for change: New needs in training, data and software technology, Department of Engineering, Cambridge University, Octubre 1993.
9. F. J. Elizondo Garza y M. Cupich Rodríguez, Instructivo del laboratorio de vibraciones mecánicas, Departamento de Dinámica de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la U.A.N.L.
10. J.P. Den Hartog, Mecánica de las vibraciones, CECSA, 1976.