

# Estudio computacional sobre un problema de división de territorios comerciales

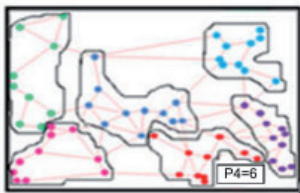
Roxana Flores Rivas

Universidad del Valle de México, Campus Toluca

Roger Z. Ríos Mercado

División de Posgrado en Ingeniería de Sistemas, FIME-UANL

roger@mail.uanl.mx



## RESUMEN

*Se presenta un estudio computacional sobre un problema de diseño territorial proveniente de una refresquera en Monterrey, México, donde se desea asignar manzanas geográficas a un determinado número de territorios, de tal forma que los territorios estén balanceados con respecto a la demanda del producto y número de clientes, y que además sean compactos. Se presenta un modelo matemático para representar el problema, el cual es resuelto mediante el Método de Ramificación y Acotamiento, y se analiza la sensibilidad del modelo a variaciones de diversos parámetros. De este experimento se ilustra que a mayor número de territorios, mejor compactidad. Por otro lado, entre menor es la tolerancia se va empeorando la compactidad del modelo. Por tanto, la tolerancia relativa contrapone la calidad de la solución y el tiempo de ejecución. El objetivo es ilustrar el comportamiento del problema y facilitar la toma de decisiones de la empresa.*

## PALABRAS CLAVE

Investigación de operaciones, diseño territorial, modelo entero mixto lineal, método de ramificación y acotamiento, diseño de experimentos.

## ABSTRACT

*A computational study for a commercial territory design problem, motivated by a real-world application in a beverage distribution firm in Monterrey, Mexico, is presented. The firm decision-making process consists of allocating city blocks to a given number of territories subject to several planning criteria such as territory balancing with respect to both product demand and number of customers, and territory compactness. A mathematical model is presented, which is solved by the branch-and-bound method, and its sensitivity with respect to some parameters is examined. This experiment shows that a larger number of territories exhibit better compactness. On the other hand, as the balancing tolerance gets lower, territory compactness gets worse. Thus, a tighter relative tolerance implies degradation in compactness and execution time. The aim is to illustrate the behavior of the problem and facilitate the firm's decision making.*

## KEYWORDS

Operations research, territorial design, mixed-integer linear model, branch-and-bound algorithm, design of experiments.

## INTRODUCCIÓN

Actualmente la administración en la organización está funcionando en un ambiente de negocios que está sometido a muchos cambios, los ciclos de vida de los productos se hacen más cortos, el servicio a los clientes se hace más complicado, se tiene nueva tecnología y la internacionalización va creciendo.

Las raíces de la investigación de operaciones se remontan a cuando se hicieron los primeros intentos para emplear el método científico en la administración de una empresa. Sin embargo, el inicio de esta disciplina se atribuye a los servicios militares prestados a principios de la segunda guerra mundial.<sup>1</sup> La investigación de operaciones se aplica a problemas que se refieren a la conducción y coordinación de operaciones (o actividades) dentro de una organización. La investigación de operaciones intenta encontrar una mejor solución, (llamada solución óptima) para el problema bajo consideración.

La investigación de operaciones es la aplicación, por grupos interdisciplinarios, del método científico a problemas relacionados con el control de las organizaciones o sistemas, a fin de que se produzcan soluciones que mejor sirvan a los objetivos de la organización.<sup>2</sup>

El objetivo más importante de la aplicación de la investigación operativa es apoyar en la “toma óptima de decisiones” en los sistemas y en la planificación de sus actividades. Por lo que el ámbito de aplicación es muy amplio, aplicándose a problemas de producción, construcción, telecomunicaciones, transporte, gestión financiera, comercial, sector salud, etc.

Un problema muy común en el área comercial (empresas de refrescos, por ejemplo), donde la demanda del producto y por ende la cantidad de

puntos de venta de la empresa es considerable, es la necesidad de agrupar los puntos de venta o clientes en territorios, de manera que se faciliten las tareas administrativas que realiza la empresa. Este tipo de problemas debido a sus características se clasifican en la categoría de problemas de diseño territorial.<sup>3</sup>

En este trabajo se considera un problema de una refresquera de la ciudad de Monterrey<sup>2</sup> donde se tiene un consumo elevado de los clientes, por lo tanto, la demanda del producto y por ende la cantidad de puntos de venta de la empresa en cuestión es considerable. Debido a esto surge la necesidad de agrupar los puntos de venta o clientes en territorios de manera que se faciliten las tareas administrativas. La empresa busca así dividir el conjunto de puntos de venta que están distribuidos en el área de la ciudad dentro de territorios, utilizando criterios económicos y geográficos bien definidos. La finalidad es tener una apropiada administración de los puntos de venta, además de realizar un adecuado suministro de la mercancía.

La empresa considera una manzana geográfica como unidad básica para formar los territorios. Cada unidad básica posee una cantidad de clientes pertenecientes a la manzana representada, así como una demanda igual a la suma de las demandas de los clientes ubicados en dicha manzana. Sin embargo, debido al tamaño de la ciudad, la cantidad de manzanas geográficas a tratar es extremadamente grande, por lo tanto la empresa realiza un agrupamiento previo donde varias manzanas son consideradas como una sola unidad básica y las actividades relacionadas con la cantidad de clientes y demanda son la suma de todas las manzanas geográficas consideradas dentro de la unidad básica.

En específico, la empresa desea encontrar territorios que sean balanceados respecto a las dos medidas que son asociadas a las unidades básicas (número de clientes y demanda del producto). El principal propósito de este balance es equilibrar la carga de trabajo que tiene la gente encargada del abastecimiento de los puntos de venta, así como también, la administración de órdenes de compra en los distintos territorios. Otra consideración importante es la geografía de la ciudad ya que los territorios deben estar formados por unidades básicas que sean alcanzables entre sí dentro del mismo territorio.



Fig. 1. Zona geográfica.

La finalidad aquí es que en una posterior fase de ruteo sea posible viajar entre unidades del mismo territorio sin salir del mismo. Esto evita situaciones perjudiciales a la empresa, por ejemplo, que un cliente que necesite mercancía pueda ver pasar algún camión repartidor que no lo atiende debido a que dicho cliente no pertenece al territorio asignado al camión repartidor. Además la empresa requiere que los territorios formados sean lo más compactos posible, es decir, que las unidades básicas que pertenecen al mismo territorio se encuentren relativamente cerca entre sí. Por último, se desea construir un número específico de territorios.

El modelo planteado en este trabajo está basado en el trabajo de Segura-Ramiro *et al.*<sup>4</sup> con la diferencia de que en nuestro trabajo no se consideran restricciones de contigüidad, las cuales representan un grado de complejidad mucho mayor. El propósito de este trabajo es el de ilustrar un caso práctico de una aplicación industrial y su metodología de solución mediante técnicas clásicas de investigación de operaciones.

Otra contribución es presentar un estudio computacional sobre cómo se afecta la solución a un problema, en cuanto al valor de su medida de compacidad y tiempo de cómputo empleado, al variar la cantidad de territorios a formar. Un factor importante que se estudia en este trabajo es la sensibilidad de las soluciones a cambios en el factor de tolerancia de las restricciones de balance territorial con respecto al número de clientes y demanda. Finalmente, también se presenta un estudio que muestra cómo se comporta el método de solución, en cuanto a la calidad de solución y tiempo, cuando se varía su intervalo de optimalidad relativa.

**PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

Este estudio se basó en la versión del problema estudiada en Segura-Ramiro *et al.*<sup>4</sup> En este caso particular, no se consideran restricciones de contigüidad territorial. A continuación se presenta una descripción del problema abordado en este trabajo. Se desea dividir el conjunto de manzanas que conforman la red de distribución de la empresa en un conjunto de territorios adecuados para sus propósitos comerciales. Esta división territorial recibe el nombre de diseño territorial o plan territorial

y para su construcción se tomaron las siguientes consideraciones:

C1 Manzana geográfica: unidad básica (UB) de la que se conforman los territorios.

C2 Medidas de demanda de producto y de número de clientes se asocian a cada territorio.

La empresa considera ciertos criterios de planeación que se traducen en un conjunto de requerimientos que el diseño territorial debe cumplir, éstos son:

R1 Las UB se deben asignar únicamente a un territorio.

R2 Los territorios deben ser compactos.

R3 Los territorios deben estar balanceados con respecto a cada medida de actividad

R4 El número de territorios debe ser un parámetro fijo establecido previamente.

La red de distribución de la empresa se presenta por medio de un grafo  $G=(V, E)$  donde cada nodo  $i \in V$  representa a una UB y una arista  $(i,j) \in E$  existe entre los nodos si  $i$  y  $j$  son manzanas adyacentes. Por ejemplo en la figura 2 se muestra la unión de los nodos debido a su adyacencia. Ahora  $i \in V$  tiene asociados varios parámetros: coordenadas  $(C_i^x, C_i^y)$  y dos medidas de actividad. Sea  $w_i^\alpha$  el valor de la medida de actividad  $\alpha$  en el nodo  $i$ , donde  $\alpha=1$  representa el número de clientes y  $\alpha=2$  la demanda del producto. Se denota por  $A$  a este conjunto de actividades,  $A=\{1,2\}$ .

**FORMULACIÓN COMO PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN ENTERA**

Los modelos de programación matemática son la forma estándar de expresar un problema de optimización. En este sentido el término programación

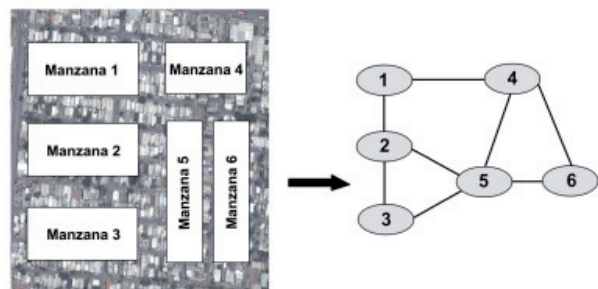


Fig. 2. Ejemplo de modelado de adyacencia de manzanas en un grafo.

se refiere a planeación o programación de actividades y no a la programación computacional.<sup>1</sup>

Es importante mencionar que con el fin de modelar el requerimiento de compacidad se ha introducido la idea de un centro territorial, donde la variable de decisión se convierte en una variable binaria 0-1:  $x_{ij} = 1$  si la unidad  $j$  se asigna al territorio con centro en la unidad  $i$ , e igual a 0 de otro modo;  $i, j \in V$ . Como consecuencia, un nodo  $i$  de un territorio tomará valor de  $x_{ii} = 1$  si va a ser el centro de éste y 0 de otro modo. Para medir la distancia de los demás nodos del territorio a este centro se utiliza una medida de  $p$ -mediana,<sup>4</sup> que consiste en minimizar la suma total de las distancias ponderadas desde un centro de servicios (nodo centro) hasta sus usuarios asignados (todos los nodos de ese territorio).

A continuación se presenta el modelo que describe nuestro problema de optimización:

$$\text{Minimizar } f(x) = \sum_{i,j \in V} d_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$\text{Sujeto a: } \sum_{i \in V} x_{ij} = 1 \quad j \in V \quad (2)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ii} = p \quad (3)$$

$$\sum_{j \in V} w_j^a x_{ij} \leq (1 + \tau) \mu^a x_{ii} \quad i \in V, a \in A \quad (4)$$

$$\sum_{j \in V} w_j^a x_{ij} \geq (1 - \tau) \mu^a x_{ii} \quad i \in V, a \in A \quad (5)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j \in V \quad (6)$$

El objetivo (1) representa la medida de dispersión. Las restricciones (2) aseguran que cada unidad básica es asignada a un territorio. La ecuación (3) asegura que se seleccionan  $p$  centros. Las restricciones (4)-(5) garantizan el balance nodal de cada territorio, donde  $\tau \in [0, 1]$  es una tolerancia dada por el usuario y  $\mu^a = \sum_{i \in V} w_i^a / p$  es el promedio por territorio de la actividad  $a$ .

Este tipo de problema de optimización combinatoria es clasificado técnicamente como NP-duro,<sup>4</sup> es decir, que el tiempo de resolución de cualquier algoritmo que pretenda encontrar la solución óptima al problema crece, en el peor de los casos, exponencialmente con el tamaño de las instancias. La implicación práctica es que los métodos exactos nos pueden brindar soluciones siempre y cuando el tamaño del problema a resolver sea relativamente pequeño.

Otras versiones diferentes de este problema, considerando diferentes medidas de desempeño o diferentes criterios de planeación, han sido estudiados con anterioridad, particularmente desde la perspectiva de métodos heurísticos<sup>5, 2, 4, 6</sup> y desde la óptica de métodos exactos.<sup>7</sup>

## MÉTODO DE SOLUCIÓN

En este caso, el problema se modela como un Programa Entero Mixto Lineal (PEML)<sup>1</sup> ya que las variables de decisión son enteras (binarias) y las restricciones y objetivo son funciones lineales. Para resolverlo, utilizamos el Método de Ramificación y Acotamiento (MRA) que consiste en efectuar una enumeración inteligente (implícita) de todas las combinaciones diferentes que pueden tomar las variables binarias. Durante su ejecución, el método va construyendo subproblemas, donde fija algunas variables y resuelve la relajación lineal de dicho subproblema ignorando la condición de integralidad de las variables. Esta relajación es muy fácil de resolver ya que es un programa de optimización lineal y su solución aporta información valiosa que se utiliza para eliminar varios de los subproblemas donde se garantiza teóricamente que no contienen a la solución óptima. Es el más comúnmente utilizado para resolver PEMLs. Como se indica en la figura 3, en este caso empleamos la implementación de GAMS/CPLEX<sup>8</sup> del MRA. GAMS es un paquete de modelación algebraica de modelos de optimización y CPLEX es un método que emplea el MRA para resolver PEMLs.

## DISEÑO DE EXPERIMENTOS

Se tomó una muestra de 30 instancias de tamaño de 60 nodos (UB) tomados de la base de datos en



Fig. 3. Metodología de solución

la referencia<sup>4</sup>. Se consideran los siguientes diseños, mostrados en la figura 4:

- Diseño 1: El objetivo de este diseño fue analizar la compacidad del modelo y consistió en ir modificando el número de territorios para poder determinar qué beneficios se obtienen al aumentar o disminuir este número.
- Diseño 2: El objetivo de variar la tolerancia relativa con respecto a la medida de cada actividad es para observar la relación entre la calidad de solución y el tiempo de ejecución y si existe la posibilidad de que se contrapongan.
- Diseño 3: Finalmente, se trabajó con el porcentaje de optimalidad relativa es decir, la diferencia entre la cota superior y la cota inferior con respecto al óptimo, con el objetivo de ver cuál es el resultado al tener una holgura mayor o bien ser más estrictos en la solución.

Ahora bien, con los diseños anteriores se tuvo un total de 390 modelos que se ejecutaron utilizando GAMS/CPLEX y se analizaron los resultados comparando el tiempo de ejecución que le tomó a CPLEX resolverlo y el valor de la función objetivo, debido que desde la perspectiva empresarial es primordial conocer la calidad de la solución calculada y el tiempo de resolución.



Fig. 4. Diseño experimental.

## RESULTADOS

### Diseño 1

A continuación se muestra, en la figura 5, los grafos resultantes al variar el número de territorios. Aquí se puede ilustrar de forma clara la compacidad entre cada uno de los territorios.

Si comparamos el grafo P1 con el grafo P4, por ejemplo, podemos ver que se tiene una mayor compacidad cuando se tiene un mayor número de territorios, ya que disminuye el número de nodos y por tanto son más compactos. Esto permite a la

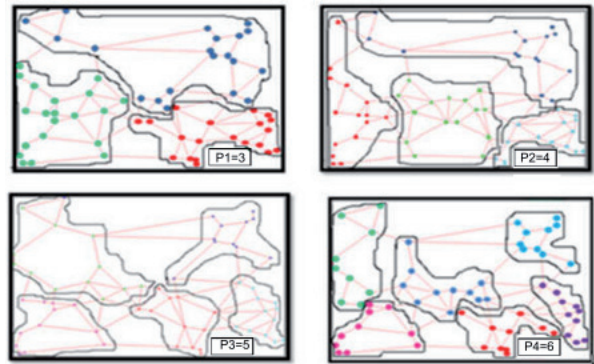


Fig. 5. Resultados de la variación de número de territorios.

empresa considerar una expansión a nuevos territorios ya que podría ser que los costos de expansión fueran menores a los costos de trabajo en un territorio más grande, claro está, que esto dependerá del análisis financiero que haga la empresa.

### Diseño 2

En la figura 6 se tiene en el eje de las abscisas la tolerancia relativa con respecto a la medida de cada actividad y en el eje de las ordenadas el tiempo de resolución. Se puede ver que al variar este parámetro el tiempo no tuvo cambios muy marcados en la solución.

Ahora bien en la figura 7 se tiene en el eje de las abscisas la tolerancia relativa con respecto a la medida de cada actividad y en el eje de las ordenadas el valor de la función objetivo. Se puede observar de forma clara que al disminuir la tolerancia va

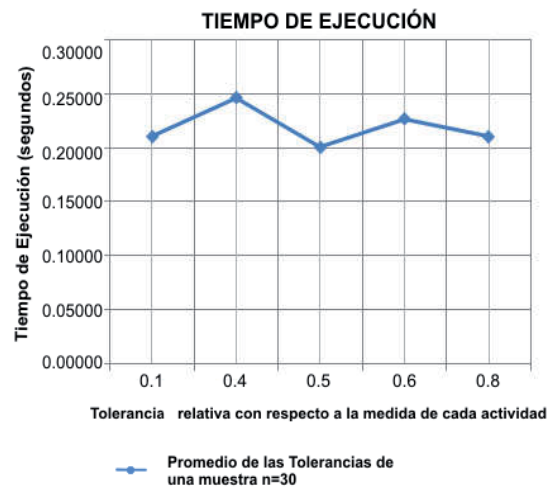


Fig. 6. Tiempos de ejecución en el Diseño 2.

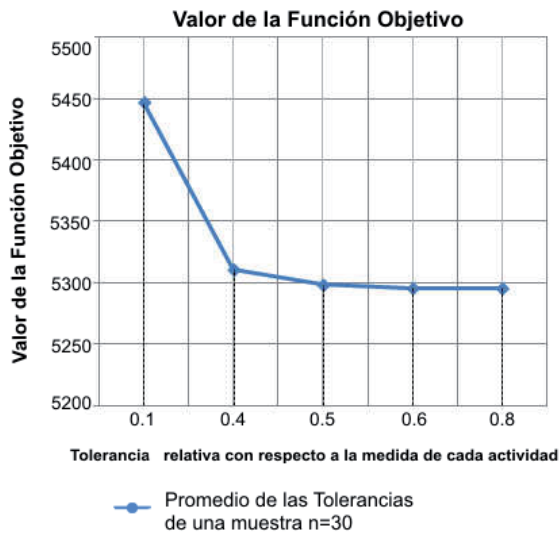


Fig. 7. Crecimiento de la función objetivo en el Diseño 2.

decreciendo la función objetivo pero se mantiene aceptable en 0.5, 0.6 y 0.8.

Esto ilustra la conflictividad entre tener territorios mejor balanceados o más compactos. Es decir a mejor balanceo se pierde la compacidad y viceversa

### Diseño 3

En la figura 8 tenemos en el eje de las abscisas, el porcentaje de optimalidad relativa calculado como se describe en la figura 9, y en el eje de las ordenadas el tiempo de ejecución. Mientras que en la figura 10 se tiene en las abscisas el porcentaje de

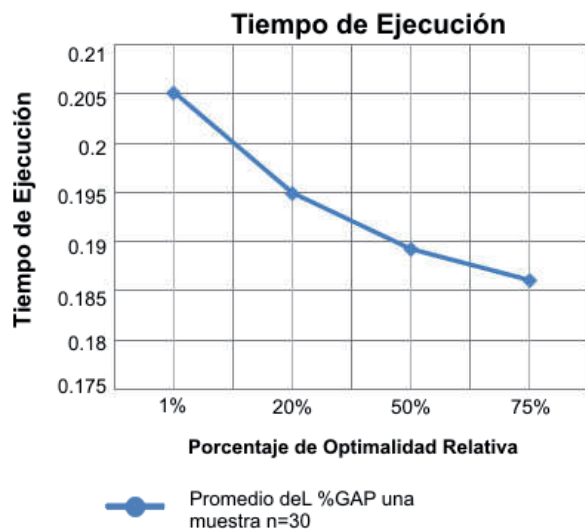


Fig. 8. Tiempo de ejecución en el Diseño 3.

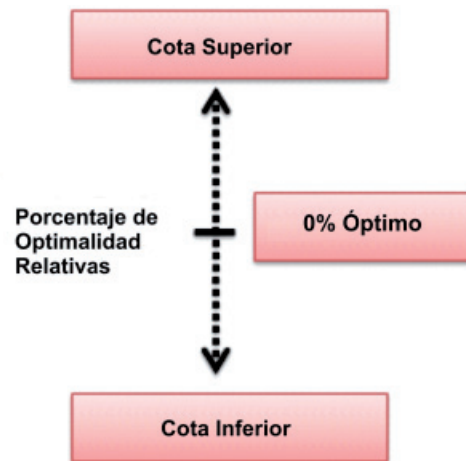


Fig. 9. Porcentaje de optimalidad relativa.

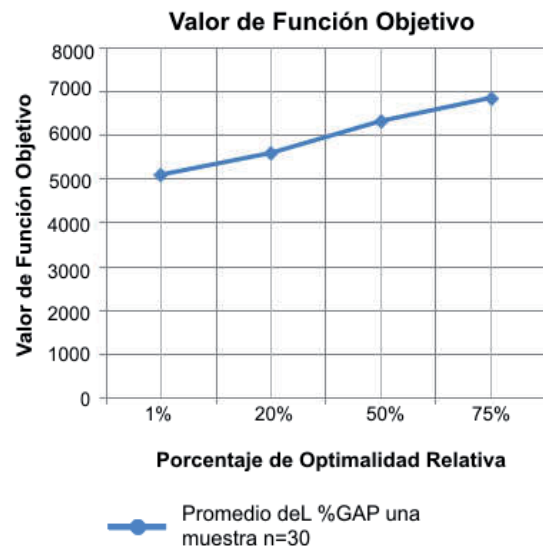


Fig. 10. Crecimiento de la función objetivo en el Diseño 3.

optimalidad relativa y en el de las ordenadas el valor de la función objetivo. Este parámetro demuestra de forma clara que el tiempo y la calidad de solución son inversamente proporcionales y se debe tener un equilibrio entre ambos.

De las gráficas podemos observar que mientras disminuye este porcentaje mejora la función objetivo (compacidad) pero el tiempo de ejecución es mayor. Sin embargo, si incrementamos este porcentaje disminuye el tiempo de ejecución pero nuestra función se deteriora. Esta cuestión es común a la hora de toma de decisiones, es decir, el saber qué tanto está afectando a la calidad del resultado una solución rápida a un problema.

## CONCLUSIONES

A la hora de elaborar un diseño territorial se tienen que conocer todas las especificaciones del modelo y qué tanto repercuten en la solución. Este estudio ilustró que:

- Incrementar el número de territorios en la zona geográfica nos da una mayor compacidad en cada uno de estos.
- El disminuir la tolerancia relativa con respecto a la medida de cada actividad provoca que la función objetivo se deteriore ya que el conjunto de diseños factibles se va volviendo más pequeño y, por ende, resulta que el valor de la solución objetivo no puede mejorar.
- Disminuir el criterio de parada de porcentaje de optimalidad relativa mejora la función objetivo (compacidad) pero el tiempo de ejecución es mayor. Inversamente, si se incrementa este porcentaje de optimalidad relativa disminuye el tiempo de ejecución, aunque la función objetivo se deteriora.

Si bien es cierto que las empresas están interesadas en la mejor solución posible, también lo es el hecho de que en ocasiones no es posible encontrar dichas soluciones en instancias de tamaño relativamente grande, debido a la inherente complejidad del problema.

Por otra parte, en ocasiones, los modelos de interés son lo suficientemente pequeños para ser tratados desde la perspectiva de métodos exactos. En ese sentido, el presente trabajo ilustra el cómo el uso de estos métodos puede brindar información importante cuyo análisis apoya a la toma de decisiones de una manera más fundamentada.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue apoyado con una beca otorgada por la Academia Mexicana de Ciencias, dentro del XVIII Verano de Investigación Científica, por el CONACYT (apoyo SEP-CONACYT 48499-Y) y por la UANL (apoyo PAICYT CA1478-07).

## REFERENCIAS

1. F. S. Hillier y G. J. Lieberman. *Introduction to Operations Research*. 5ta Edición, McGraw-Hill, New York, EUA, 1990.
2. R. Z. Ríos-Mercado y E. Fernández. A reactive GRASP for a sales territory design problem with multiple balancing requirements. *Computers & Operations Research*, 36(3):755-776.
3. J. Kalcsics, S. Nickel S y M. Schröder. Toward a unified territorial design approach: Applications, algorithms, and GIS integration. *Top*, 13(1):1-74, 2005.
4. J. A. Segura-Ramiro, R. Z. Ríos-Mercado, A. M. Álvarez-Socarrás y K. de Alba Romenus. A location-allocation heuristic for a territory design problem in a beverage distribution firm. En J.E. Fernandez, S. Noriega, A. Mital, S.E. Butt y T.K. Fredericks (editores), *Proceedings of the 12th Annual International Conference on Industrial Engineering Theory, Applications, and Practice (IJIE'07)*, pp. 428-434. ISBN: 978-0-9654506-3-8. Cancún, México, Noviembre 2007.
5. S. I. Caballero Hernández, R. Z. Ríos-Mercado y F. López. Solución heurística a un problema de diseño de territorios comerciales con restricciones de asignación conjunta mediante GRASP. En E. Alba, F. Chicano, F. Herrera, F. Luna, G. Luque y A. J. Nebro (editores), *Actas de las I Jornadas sobre Algoritmos Evolutivos y Metaheurísticas (JAEM'07)*, pp. 145-153. Zaragoza, España, Septiembre 2007.
6. L. Vargas Suárez, R. Z. Ríos Mercado y F. López. Usando GRASP para resolver un problema de definición de territorios de atención comercial. En M.G. Arenas, F. Herrera, M. Lozano, J.J. Merelo, G. Romero y A.M. Sánchez (editores), *Actas del IV Congreso Español sobre Metaheurísticas y Algoritmos Evolutivos y Bioinspirados*, Vol. II, pp. 609-617. Granada, España, Septiembre 2005.
7. N. Solís García. *Evaluación de la Calidad de Métodos de Optimización Exacta para Modelos de Diseño Territorial*. Tesis de licenciatura, FCFM, UANL, Junio 2008.
8. GAMS Development Corporation. *GAMS: A User's Guide*. Washington, EUA, 2008.