

# Modelado electromagnético en cables subterráneos

Reynaldo Iracheta Cortez

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N

(Unidad Guadalajara)

iracheta@gdl.cinvestav.mx



## RESUMEN

*Se presenta una metodología completa para el cálculo de parámetros electromagnéticos ZY en sistemas de cables subterráneos tipo coaxial. Dicha metodología incorpora la dependencia frecuencial de los parámetros tomando en cuenta el Efecto Piel, tanto en conductores metálicos como en el suelo, así como el efecto de relajación para materiales aislantes.*

*Se resuelven las formulaciones exactas de Schelkunoff para cálculo de impedancias en conductores cilíndricos tubulares y se propone un algoritmo híbrido para evaluar la impedancia de retorno por tierra. En este algoritmo híbrido se combina la versión modificada de las series de Wedepohl para el rango de baja frecuencia y se utiliza el método de integración adaptiva en cuadratura de Gauss-Lobatto para el rango de alta frecuencia.*

*Finalmente, se implementa la Transformada Numérica de Laplace como una herramienta precisa y eficiente para el cálculo de transitorios electromagnéticos en cables subterráneos.*

## PALABRAS CLAVE

Impedancia de retorno por tierra, parámetros electromagnéticos ZY, algoritmo híbrido, Transformada Numérica de Laplace.

## ABSTRACT

*A complete methodology is presented for calculating ZY electromagnetic parameter in buried coaxial cables. This methodology incorporates frequency dependent parameter taking account skin effect, in metallic conductors and the earth, and relaxation effect in isolated materials.*

*The tubular impedances are solved by the exact Schelkunoff formulations and a hybrid algorithm is proposed to evaluate the earth return impedance. The hybrid algorithm combined the modified version of Wedepohl and Wilcox Series at low frequencies and the Gauss-Lobatto quadrature adaptive integration method at high frequencies.*

*Finally, the Numerical Laplace Transform is implemented as an accuracy and efficient tool for calculating electromagnetic transients in buried cables.*

## KEYWORDS

Earth return impedance, electromagnetic parameter ZY, hybrid algorithm, Numerical Laplace Transform.

## INTRODUCCIÓN

Los sistemas de cables subterráneos y submarinos para transmisión de energía eléctrica se componen alternadamente por capas de materiales conductores y dieléctricos. La combinación de estos elementos hace que los parámetros electromagnéticos del cable sean altamente dependientes de la frecuencia. Esto se debe básicamente a 1) la presencia del Efecto Piel tanto en conductores metálicos como en el suelo y a 2) los Efectos de Relajación en los aislantes. Por lo tanto, es necesario contar con modelos precisos para el cálculo de parámetros electromagnéticos  $ZY$ , que se refieren a la matriz de impedancia serie y admitancia paralelo, en cables subterráneos, que puedan servir de base para los análisis de transitorios electromagnéticos  $EM$ .

Un modelo preciso de cálculo de parámetros en cables requiere resolver en forma numérica las formulaciones exactas planteadas por Schelkunoff y Pollaczek para el cálculo de impedancias en conductores metálicos tubulares y para evaluar la contribución en las pérdidas por la presencia del suelo, respectivamente.<sup>1,2</sup> Sin embargo, a pesar de que las formulaciones clásicas de Schelkunoff y Pollaczek fueron planteadas desde hace muchos años, la dificultad en su implementación numérica hasta hace poco tiempo resultaba impráctica. Por un lado, las formulaciones de Schelkunoff requieren evaluar arreglos de funciones de Bessel de primera y segunda clase, los cuales se pueden indeterminar numéricamente muy rápido, mientras que la formulación de Pollaczek requiere evaluar una integral que no tiene solución analítica cerrada y además, el integrando es altamente oscilatorio e irregular. Con el desarrollo de los equipos de cómputo y los programas de cálculo (Matlab) se han superado muchas de estas dificultades. Sin embargo, todavía persisten casos de aplicación en los que resulta impreciso evaluar dichas formulaciones.

Por ejemplo, al intentar resolver la integral de Pollaczek mediante métodos genéricos de integración numérica se presentan errores de convergencia y, además, se requiere procesar una carga computacional bastante considerable.<sup>3,4</sup>

Una opción para evitar resolver la integral de Pollaczek es utilizar fórmulas aproximadas para el cálculo de la impedancia de retorno por tierra de  $Z_T$ .<sup>2</sup>

Sin embargo, el problema con estas fórmulas es que la mayoría sólo son válidas dentro de ciertos rangos de aplicación (limitadas en frecuencia), es decir, el error no está bien establecido para un amplio rango.

Adicionalmente, Wilcox<sup>5</sup> en 1969, y Wedepohl y Wilcox<sup>4</sup> en 1973, propusieron una solución basada en series para el cálculo de  $Z_T$ . Aunque, hasta la fecha esta solución no ha podido ser implementada (programas tipo EMTP).<sup>3</sup> Probablemente debido en parte a la complejidad en la obtención del patrón de repetición de las series y a los errores de sintaxis y concordancia en las referencias de dichos autores.<sup>4,5</sup> Un problema adicional es que el límite de aplicación de dicha solución en series es muy limitado, ya que sólo es aplicable a sistemas de cables subterráneos con disposición horizontal.

Debido a la problemática que representa resolver la integral de Pollaczek por los métodos ya mencionados y por la importancia que representa este parámetro dentro de la matriz de impedancia serie ( $Z$ ), es necesario desarrollar una metodología precisa, eficiente y confiable para el cálculo de  $Z_T$ . En este trabajo se propone un algoritmo híbrido,<sup>6</sup> en el cual se implementa la solución por series modificadas de Wedepohl y Wilcox en baja frecuencia y un método de integración numérica en alta frecuencia.

Finalmente, también se presenta una metodología, basada en el dominio de la frecuencia, a través de la Transformada Numérica de Laplace para el cálculo de transitorios  $EM$  en cables. Con dicha metodología se puede evaluar más fácilmente la contribución natural distribuida de las pérdidas. Sin embargo, la precisión en el cálculo de transitorios  $EM$  depende en gran medida de la precisión del modelo utilizado para el cálculo de parámetros.

## MODELADO ELECTROMAGNÉTICO EN CABLES

La propagación de las ondas de voltaje y corriente en un sistema de transmisión por cables subterráneos se describe por las Ecuaciones del Telegrafista (planteadas por Oliver Heaviside):<sup>3</sup>

$$-\frac{d}{dz}\mathbf{V} = \mathbf{Z}(\omega)\mathbf{I} \quad (1)$$

$$\text{y} \quad -\frac{d}{dz}\mathbf{I} = \mathbf{Y}(\omega)\mathbf{V} \quad (2)$$

Donde  $Z$  y  $Y$  son las matrices de impedancia serie y admitancia paralelo, ambas en p. u. de longitud.  $V$  e  $I$  son los vectores de voltaje y corriente,  $z$  es la distancia longitudinal y  $\omega$  es la frecuencia angular en rad/s. La solución de (1) y (2) es:

$$V(z) = H_{+1}(\omega)C_1 + H_{-1}(\omega)C_2 \quad (3)$$

y

$$I(z) = Y_c(\omega) \cdot H_{+1}(\omega) \cdot C_1 - Y_c(\omega) \cdot H_{-1}(\omega)C_2 \quad (4)$$

donde,

$$H_{\pm}(\omega) = \exp(\pm\sqrt{ZY} \cdot l) \quad (5)$$

$$Y_c(\omega) = Z^{-1} \cdot \sqrt{ZY} \quad (6)$$

$$Z_c(\omega) = Y_c^{-1} \quad (7)$$

$C_1$  y  $C_2$  son las constantes de integración determinadas por las condiciones límite del sistema de cables (inicial y final),  $H_{\pm}$  es la matriz de propagación de las ondas de voltajes y corrientes,  $Y_c$  y  $Z_c$  son las matrices de admitancia e impedancia características.

Considere el sistema de cables subterráneos con longitud " $\ell=10mi$ " que se muestra en la figura 1. Este sistema corresponde al caso clásico de análisis de transitorios en cables reportado por Wedepohl y Wilcox en 1973.<sup>4,7</sup>

Dicho sistema puede ser representado por un arreglo vectorial de dos puertos. Adicionalmente, se pueden relacionar las respuestas de voltajes y corrientes del nodo en el extremo emisor ( $z=0$ ) con el nodo en el extremo receptor ( $z=\ell$ ):

$$\begin{bmatrix} I_o(s) \\ I_r(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_o(s) \\ V_r(s) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Donde:

$V_o(s)$  e  $I_o(s)$  son los vectores de voltajes y corrientes en  $z=0$ .

$V_r(s)$  e  $I_r(s)$  son los vectores de voltajes y corrientes en  $z=\ell$  y  $s=c+j\omega$ .

A y B son las matrices altamente dependientes de la frecuencia que caracterizan al sistema de transmisión por cables, las cuales están definidas por:

$$A = Y_c \coth(\sqrt{ZY} \cdot \ell) \quad (9)$$

$$B = -Y_c \operatorname{csch}(\sqrt{ZY} \cdot \ell) \quad (10)$$

La implementación práctica de las funciones trigonométricas hiperbólicas (9) y (10) para evitar indeterminaciones numéricas es:<sup>3</sup>

## Plano de Tierra

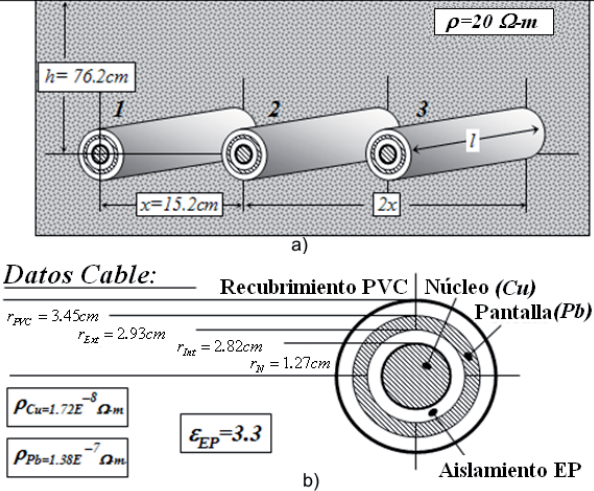


Fig. 1. Sistema de transmisión de cables subterráneos. a) Sistema en configuración horizontal compuesto por tres cables. b) Dimensiones y propiedades materiales de un cable coaxial.

$$\coth(\sqrt{ZY} \cdot \ell) = \left\{ \frac{1 + e^{-2(\sqrt{ZY} \cdot \ell)}}{1 - e^{-2(\sqrt{ZY} \cdot \ell)}} \right\} \quad (11)$$

$$\operatorname{csch}(\sqrt{ZY} \cdot \ell) = \left\{ \frac{2e^{-(\sqrt{ZY} \cdot \ell)}}{1 - e^{-2(\sqrt{ZY} \cdot \ell)}} \right\} \quad (12)$$

Se considera que el sistema de cables subterráneos en la figura 1 está en circuito abierto. Luego, si se energiza el sistema con un escalón de voltaje, ( $I/s$ ) en el dominio de la frecuencia, podría entonces relacionarse la respuesta transitoria de voltaje, desconocida en el extremo final  $V_r(s)$ , con el voltaje de excitación conocido  $V_o(s)$  en el extremo inicial de la siguiente manera.

$$V_r = H(s) \cdot V_o \quad (13)$$

donde  $H(s)$  es la función de transferencia o matriz de propagación del sistema mostrado en la figura 1, la cual está dada por:

$$H(s) = \{-A^{-1} \cdot B\} \quad (14)$$

## PARÁMETROS EM EN SISTEMAS DE CABLES SUBTERRÁNEOS

Los sistemas de cables subterráneos y submarinos suelen tener arreglos de dos o más conductores concéntricos o excéntricos. En el caso de un cable con tres conductores concéntricos el núcleo se encarga de

transmitir la mayor parte de la corriente eléctrica, la pantalla confina los campos electromagnéticos en su interior y la armadura proporciona rigidez mecánica al cable. Para realizar el modelado electromagnético de un arreglo de tres cables con tres conductores cada uno, se plantean las ecuaciones del telegrafista (1) y (2) como:

$$-\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} \quad (15)$$

y

$$-\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Y_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \quad (16)$$

El modelado a detalle de (15) y (16) se encuentra en.<sup>3</sup>

### Impedancia de retorno por tierra

Para el cálculo de la impedancia de retorno por tierra ( $Z_T$ ) propia y mutua de cables subterráneos, se requiere la solución de las expresiones exactas planteadas por Pollaczek. Dichas expresiones fueron derivadas en base a un modelo de tierra semi-infinita,<sup>3</sup> en el cual se evalúa la propagación de los campos eléctrico y magnético debidos a una fuente de corriente filamental dispuesta directamente en el suelo.<sup>2</sup>

Considere el sistema de transmisión de cables subterráneos que se muestra en la figura 2. En esta figura se asume que el suelo es un conductor imperfecto y homogéneo, que su permeabilidad

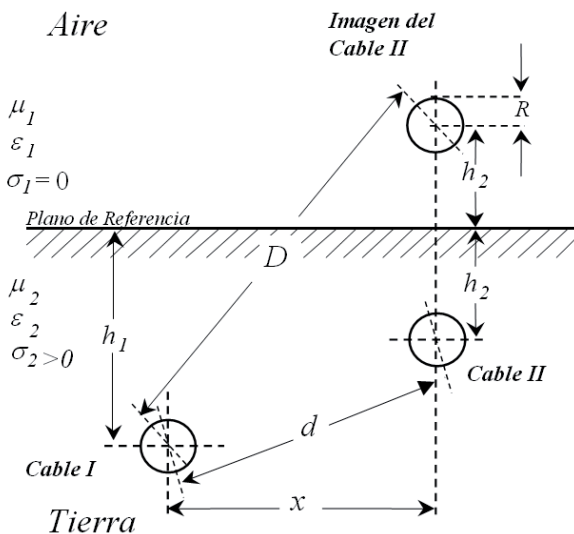


Fig. 2. Sistema subterráneo por dos cables.

magnética es igual a la del vacío ( $\mu r = \mu_0$ ) y que la frecuencia de la fuente no puede ser tan alta para que las corrientes de desplazamiento puedan ser despreciadas ( $\sigma \gg \omega \epsilon, \epsilon_0$ ).

La impedancia de retorno por tierra mutua para el modo Quasi-TemZ está dada por:<sup>2</sup>

$$Z_T = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} [K_0(d/p) - K_0(D/p) + J] \quad (17)$$

Donde,  $J$  es la integral de Pollaczek, planteada en 1926 como:<sup>2</sup>

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(-2h)\sqrt{\beta^2 + (1/p)^2}}}{|\beta| + \sqrt{\beta^2 + (1/p)^2}} e^{j\beta x} d\beta \quad (18)$$

$\beta = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_r}$ , es el número de onda y es considerado como una variable muda de integración.

Las expresiones (17) y (18) dependen de las variables físicas o geométricas del sistema y de las cantidades  $EM$  del medio (Ver figura 2). Adicionalmente, la integral de Pollaczek no tiene solución analítica cerrada y su integrando es altamente oscilatorio, con lo cual, su solución numérica mediante rutinas genéricas de integración directa suele fallar en distintos rangos de aplicación.

Dadas las dificultades que se tienen al evaluar Pollaczek, se propone utilizar el algoritmo híbrido desarrollado en<sup>7</sup> para cálculo eficiente, preciso y confiable de  $Z_T$ . Dicho algoritmo se denomina híbrido porque implementa la versión modificada de las series de Wedepohl y Wilcox ( $S_w$ )<sup>4,5</sup> en baja frecuencia y la integración adaptiva en cuadratura de Gauss-Lobatto para  $I_w$  (integral de Wedepohl) en alta frecuencia.

El algoritmo híbrido se describe mediante el diagrama de flujo mostrado en la figura 3.

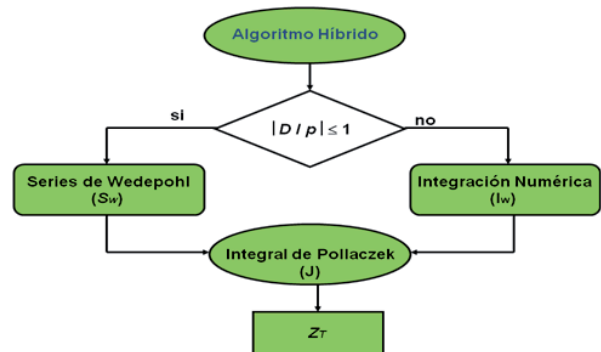


Fig. 3. Descripción del algoritmo híbrido.

El término  $I_w$  se define como;

$$I_w = -\frac{2h|x|}{D^2} \int_{2h/D}^1 (2\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}) \exp(-Dt/p) dt \quad (19)$$

con  $t = 2h/D$ .

Al igual que la integral de Pollaczek, esta integral no tiene solución analítica cerrada. Adicionalmente, para evitar resolver numéricamente esta integral Wedepohl y Wilcox propusieron una solución en series.<sup>4,5</sup> Sin embargo, el inconveniente de dicha solución en series es que no presenta un claro factor de repetitividad e inclusive hay errores de sintaxis y de concordancia en las referencias.<sup>4,5</sup> Probablemente, ésta pudiese ser una de las razones por las cuales diversos investigadores en el área no se hayan interesado en la implementación práctica de una solución en series para el cálculo de la impedancia de retorno por tierra.

En la referencia<sup>6</sup> se logró determinar el comportamiento dinámico de la solución en series propuestas por Wedepohl y Wilcox. Con esto, se superaran todos los inconvenientes ya presentados con anterioridad. Por lo tanto, la versión modificada de las series de Wedepohl y Wilcox ( $S_w$ ) se describe por un arreglo de 4 sub-términos de la siguiente forma:

$$S_w(D, p, x, h) = g_1 - g_2 - g_3 + g_4 \quad (20)$$

donde cada uno de los sub-términos son una expansión en series de términos individuales y que al juntarlos de acuerdo con (20) se obtiene la solución precisa a la solución en series propuesta por Wedepohl y Wilcox. La expansión detallada de cada uno de los sub-términos de las series modificadas de Wedepohl y Wilcox se muestra en el Apéndice.

### CASOS DE ESTUDIO

Usando como referencia el algoritmo híbrido, se calcula la impedancia de retorno por tierra mutua para los lazos de corriente en el sistema subterráneo de cables mostrado en la figura 1. Luego, se compara el algoritmo híbrido con el método de integración adaptativa en cuadratura de Gauss-Lobatto en (19) y las fórmulas cerradas de aproximación de Ametani,<sup>3</sup> Wedepohl<sup>5</sup> y Saad-Gaba-Giroux.<sup>8</sup>

En la figura 4 se muestran las componentes de resistencia ( $\Omega/m$ ) e inductancia ( $\mu H/m$ ) para  $Z_T$  mutua. Las comparaciones efectuadas entre cada una de éstas gráficas se establecen mediante el criterio del error relativo porcentual.

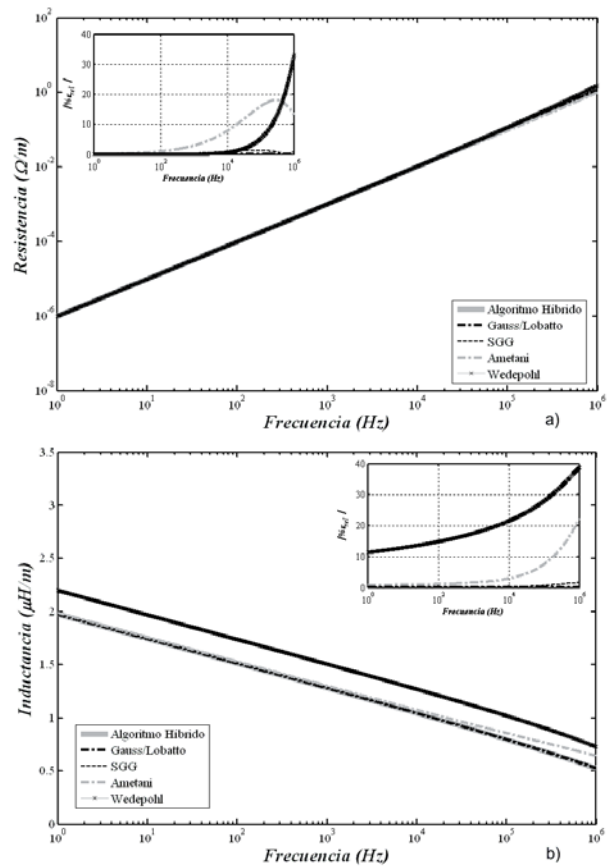


Fig. 4.  $Z_T$  mutua para el sistema de cables de la figura 1, calculada con el algoritmo híbrido, Gauss-Lobatto y fórmulas aproximadas con errores relativos. a) Resistencia, b) Inductancia.

Los resultados mostrados en la figura 4 muestran errores menores al 5% para Gauss-Lobatto y Saad-Gaba-Giroux (SGG), mientras que la aproximación cerrada de Wedepohl llega a alcanzar errores de hasta 35% en alta frecuencia para la componente resistiva y 25% de error en alta frecuencia en la componente inductiva.

Existen situaciones en la práctica en las que un sistema de transporte o suministro de agua, gas, petróleo ó comunicaciones comparte el mismo derecho de vía o se encuentra ubicado a cierta distancia de un sistema de transmisión de energía eléctrica por cables subterráneos de baja o alta tensión. Durante condiciones normales de operación, en estado transitorio estable, los cables subterráneos inducen voltajes y corrientes entre sí y en cualquier otro sistema metálico presente en el entorno.

Más aún, cuando en el sistema de cables subterráneos ocurre una falla franca a tierra, se

produce un sobrevoltaje inducido en cualquier sistema vecino, representando así, un peligro inminente. En estas condiciones, la precisión en las técnicas de análisis disponibles para el ingeniero analista resultan muy valiosas.

Considere el mismo sistema de cables de la figura 5. Dicho sistema se encuentra acoplado electromagnéticamente a cierta distancia con una tubería de gas o petróleo y además, la resistividad del terreno es muy baja ( $1 \Omega\text{-m}$ ).

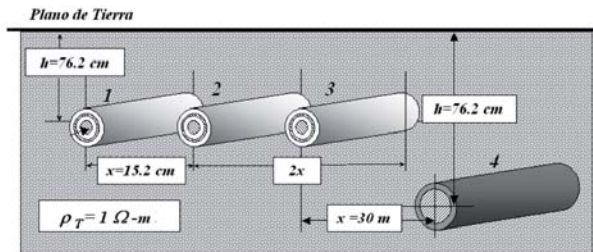


Fig. 5. Acoplamiento EM entre un sistema de transmisión subterráneo y un ducto de suministro de gas o petróleo.

En la figura 6 se muestran las componentes resistivas ( $\Omega/m$ ) e inductivas ( $\mu H/m$ ) de  $Z_T$  mutua. A partir de estos resultados se observan oscilaciones bastante considerables en alta frecuencia para Gauss-Lobatto, mientras que las fórmulas cerradas de aproximación de Wedepohl y Ametani presentan errores muy significativos en todo el rango de frecuencias. Adicionalmente, la fórmula cerrada de Saad-Gaba-Giroux presenta algunos errores considerables en alta frecuencia. Por lo tanto, al igual que en el caso de estudio anterior, Gauss-Lobatto es la metodología que presenta mayor precisión para el rango de baja frecuencia, mientras que la fórmula cerrada de Wedepohl es la que presenta menor precisión durante todo el rango de frecuencias.

### CÁLCULO DE TRANSITORIOS EM CON LA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE LAPLACE

En esta sección se considera toda la metodología desarrollada anteriormente para el cálculo de parámetros electromagnéticos ZY en sistemas de cables subterráneos.

Se toma como base la ecuación (13) para relacionar los voltajes transitorios (dominio de la frecuencia) en ambos extremos del sistema de cables. El vector de voltajes de excitación para los núcleos del sistema se muestra a continuación:

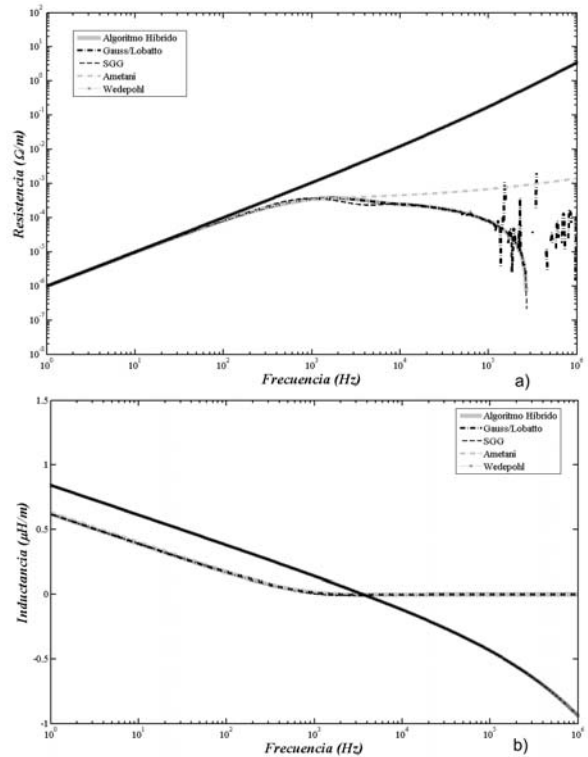


Fig. 6:  $Z_T$  mutua para el sistema de cables de la figura 5 calculada con el algoritmo híbrido, Gauss-Lobatto y fórmulas aproximadas. a) Resistencia, b) Inductancia.

$$V_0(s) = \begin{bmatrix} 1/s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

El término  $1/s$  indica una función escalón (dominio de la frecuencia) en el extremo inicial del núcleo energizado.

Las formas de onda en el dominio del tiempo para  $V_\ell(s)$  son obtenidas aplicando la inversa de la Transformada Numérica de Laplace (NLT).

$$v_\ell(t) = \frac{1}{2\delta j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} V_\ell(s) e^{st} ds \quad (22)$$

donde,  $s = c + j\omega$  es la variable de Laplace,  $c$  es el factor de amortiguamiento y  $\omega$  es la frecuencia angular.

Una aproximación a la solución numérica de (22) se muestra a continuación:

$$v_{\ell m}(t) \cong \frac{e^{c\Delta t}}{\Delta t} \left[ \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} V_{\ell n} \sigma_n e^{2j\pi mn/M} \right] \quad (23)$$

( para  $m = 0, 1, \dots, M-1$  )

donde M es el número de muestras en frecuencia y tiempo para representar a  $v_\ell(t)$  y a  $V_\ell(s)$ ;  $\Delta t$  es el paso

de tiempo;  $v_{tm}$  sustituye a  $v_{tm}(m\Delta t)$  y  $V_{tn}$  sustituye  $V_{tn}(n\Delta\omega)$ ;  $\sigma_n = \sigma(n\Delta\omega)$  es la ventana de datos usada para disminuir el fenómeno Gibbs. En este trabajo se utilizó la ventana de datos Vonn Hann.<sup>6</sup>

Para evitar posibles errores de *aliasing* temporal se debe seleccionar un valor adecuado para la constante  $c$  en (24). Por lo tanto, se utiliza en este trabajo la siguiente fórmula empírica propuesta por Wedepohl en:<sup>4</sup>

$$c = -\log(\epsilon) / T \tag{24}$$

donde,

$\epsilon =$  Rango o nivel de error.

$T =$  Tiempo de observación del transitorio *EM*

La implementación de Matlab para obtener el voltaje de recepción es la siguiente:

$$v_{\ell} = \exp(c*t) .* \text{ifft}(V_{\ell}(c+j\omega) .* \text{sigma}) / \text{delta}_t; \tag{25}$$

La expresión entre paréntesis es la Transformada Inversa de Fourier;  $v_{\ell}$  es un vector que contiene  $v_{\ell}(t)$  muestras en tiempo;  $v_{\ell}(s)$  es el vector con  $v_{\ell}(c+j\omega)$  muestras en frecuencia;  $\text{sigma}$  es el vector que contiene las muestras en frecuencia de la ventana de datos que está siendo aplicada;  $t$  es el vector de tiempo;  $\text{delta}_t$  es  $\Delta t$  y  $\text{ifft}()$  es la función de Matlab para el cálculo de la transformada inversa rápida de Fourier.

A continuación, en las figuras 7,8 y 9, se comparan las respuestas transitorias de voltaje ( $v_{\ell}$ ) obtenidas con la transformada numérica de Laplace (dominio de la frecuencia) y el programa PSCAD-EMDC (dominio del tiempo) correspondientes al caso base de referencia de la figura 1.

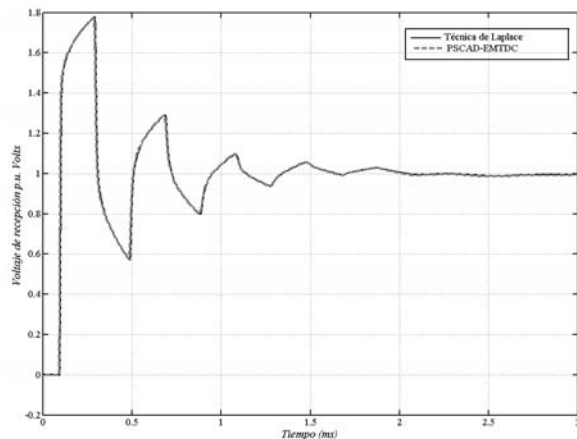


Fig. 7. Respuesta transitoria de voltaje ( $v_{\ell}$ ) para el núcleo energizado en el extremo receptor del sistema de cables mostrado en la figura 1.

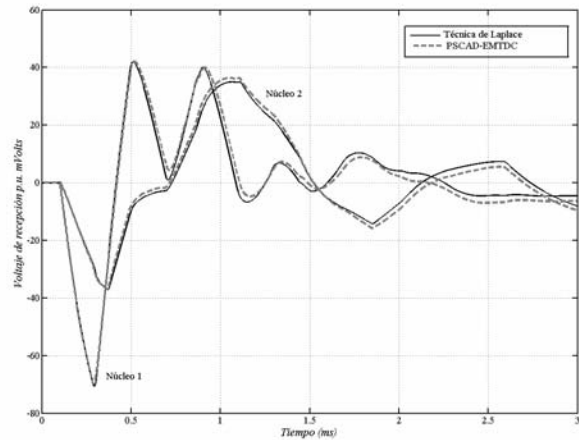


Fig. 8. Respuestas transitorias de voltaje ( $v_{\ell}$ ) de los núcleos 2 y 3 no energizados en el extremo receptor del sistema de cables de la figura 1.

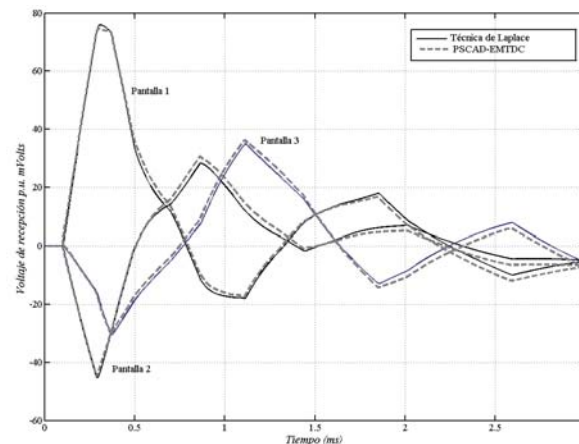


Fig. 9. Respuestas transitorias de voltaje ( $v_{\ell}$ ) de todas las pantallas en el extremo receptor del sistema de cables en la figura 1.

### CONCLUSIONES

Se cuenta con un modelo completo para el cálculo de parámetros electromagnéticos *ZY* en sistemas de cables subterráneos tipo coaxial. Adicionalmente, en dicho modelo se incorpora una herramienta muy útil, denominada algoritmo híbrido, para el cálculo preciso, eficiente y confiable de  $Z_T$ . Más aún, este modelo es la base para el estudio de transitorios *EM* basados en técnicas tanto del dominio del tiempo como del dominio de la frecuencia.

Se implementó la Transformada Numérica de Laplace, basada en el dominio de la frecuencia, como una herramienta precisa y eficiente para el cálculo de transitorios *EM* en cables subterráneos. La precisión se logra porque se incorpora la totalidad de la dependencia frecuencial de los parámetros *EM*,

de tal modo que, puede servir como una herramienta confiable para validación de las técnicas en el dominio del tiempo. Además, es altamente eficiente porque utiliza el algoritmo de la IFFT.

**APÉNDICE**

**Series modificadas de Wedepohl**

Los renglones en cada uno de los términos significan una iteración en la serie. El número máximo de iteraciones para obtener una buena aproximación es de 8.

$$g_1(D, p, x, h) = I \left\{ \theta - \frac{2h|x|}{D^2} \right\} + \frac{1}{2(2j)(p)} \left\{ \frac{(2h)^2|x|^3}{D^4} + \frac{1}{2} \left( \theta - \frac{2h|x|}{D^2} \right) \right\} + \frac{1}{3(4j)(p)} \left\{ \frac{(2h)^3|x|^4}{D^6} + \frac{3}{4} \left\{ \frac{(2h)^2|x|^3}{D^4} + \frac{1}{2} \left( \theta - \frac{2h|x|}{D^2} \right) \right\} \right\} + \frac{1}{4(6j)(p)} \left\{ \frac{(2h)^4|x|^5}{D^8} + \frac{5}{6} \left\{ \frac{(2h)^3|x|^4}{D^6} + \frac{3}{4} \left\{ \frac{(2h)^2|x|^3}{D^4} + \frac{1}{2} \left( \theta - \frac{2h|x|}{D^2} \right) \right\} \right\} \right\} + \dots J \tag{A.1}$$

$$g_2(D, p, x, h) = I \left\{ - \frac{2}{3(1j)(p)} \left( \frac{D}{D^3} \right) \left\{ \frac{|x|^3}{D^3} \right\} - \frac{2}{5(3j)(p)} \left\{ \frac{(2h)^2|x|^4}{D^5} + \frac{2}{3} \left\{ \frac{|x|^3}{D^3} \right\} \right\} - \frac{2}{7(5j)(p)} \left\{ \frac{(2h)^4|x|^5}{D^7} + \frac{4}{5} \left\{ \frac{(2h)^2|x|^3}{D^5} + \frac{2}{3} \left\{ \frac{|x|^3}{D^3} \right\} \right\} \right\} - \frac{2}{9(7j)(p)} \left\{ \frac{(2h)^6|x|^7}{D^9} + \frac{6}{7} \left\{ \frac{(2h)^4|x|^5}{D^7} + \frac{4}{5} \left\{ \frac{(2h)^2|x|^3}{D^5} + \frac{2}{3} \left\{ \frac{|x|^3}{D^3} \right\} \right\} \right\} \right\} + \dots J \tag{A.2}$$

$$g_3(D, p, x, h) = - \{ \theta \} - \frac{1}{2(2j)(p)} \left\{ \frac{(2h)|x|}{D^2} + \theta \right\} - \frac{1}{4(4j)(p)} \left\{ \frac{(2h)^3|x|}{D^4} + \frac{3}{2} \left\{ \frac{(2h)|x|}{D^2} + \theta \right\} \right\} - \frac{1}{6(6j)(p)} \left\{ \frac{(2h)^5|x|}{D^6} + \frac{5}{3} \left\{ \frac{(2h)^3|x|}{D^4} + \frac{3}{2} \left\{ \frac{(2h)|x|}{D^2} + \theta \right\} \right\} \right\} + \dots J \tag{A.3}$$

$$g_4(D, p, x, h) = \frac{1}{1!(p)} \left\{ \frac{|x|}{D} \right\} + \frac{1}{3(3j)(p)} \left\{ \frac{(2h)^2|x|}{D^3} + \frac{2}{1} \left\{ \frac{|x|}{D} \right\} \right\} + \frac{1}{5(5j)(p)} \left\{ \frac{(2h)^4|x|}{D^5} + \frac{4}{3} \left\{ \frac{(2h)^2|x|}{D^3} + \frac{2}{1} \left\{ \frac{|x|}{D} \right\} \right\} \right\} + \frac{1}{7(7j)(p)} \left\{ \frac{(2h)^6|x|}{D^7} + \frac{6}{5} \left\{ \frac{(2h)^4|x|}{D^5} + \frac{4}{3} \left\{ \frac{(2h)^2|x|}{D^3} + \frac{2}{1} \left\{ \frac{|x|}{D} \right\} \right\} \right\} \right\} + \dots J \tag{A.4}$$

De las relaciones geométricas para  $\theta$  en la figura 2 se tiene entonces la siguiente expresión angular:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(2h / D) \tag{A.5}$$

**REFERENCIAS**

1. S. A. Schelkunoff. The Electromagnetic Theory of coaxial transmission lines and cylindrical shields. The Bell System Technical Journal, Vol. 13, pp.532-539, 1934.
2. F. Pollaczek. Über das Feld einer unendlich langen wechsel stromdurchflossenen Einfachleitung. Electriche Nachrichten Technik, Vol. 3, No. 9, pp. 339-360, 1926.
3. H. W. Dommel. Electromagnetic Transients Program Reference Manual (EMTP Theory Book). Prepared for Bonneville Power Administration. P.O. Box 3621, Portland, Ore., 97208, USA, 1986.
4. L. M. Wedepohl and D.J. Wilcox. Transient analysis of underground power transmission systems. Proceedings of the IEE. Vol. 120, No. 2, February 1973.
5. D. J. Wilcox. Transient and Harmonic Induction in Underground Cable Systems, PhD. Thesis, The Victoria University of Manchester, Institute of Science and Technology, 1969.
6. R. Iracheta. Análisis de transitorios electromagnéticos en sistemas de cables subterráneos. Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Nuevo León, 2007.
7. L. M. Wedepohl. Electrical characteristics of poly-phase transmission systems with special reference to boundary-value calculations at power-line Carrier frequencies. Proceedings of the IEE, Vol. 112, No.11, November 1965.
8. O. Saad, G. Gaba, M. Giroux. A closed-form approximation for ground return impedance of underground cables. IEEE Transactions on Power Delivery, vol.11, No.3, pp. 1536-1545, July 1996.