Modelando sistemas territoriales con programación entera

Nancy Solis García, Roger Z. Ríos Mercado
Ada M. Álvarez Socarrás
PISIS-FIME-UANL
nsolis@yalma.fime.uanl.mx, roger@mail.uanl.mx, adalvarez@mail.uanl.mx

RESUMEN

En este artículo se muestra un modelo entero mixto lineal para el problema de diseño de territorios de atención comercial. Las variables son enteras y tanto las restricciones como la función objetivo son lineales. Se ilustra el Método de Ramificación y Acotamiento, MRA. Además, se incluye una evaluación empírica del desempeño del MRA al aplicarlo en la resolución de algunas instancias del problema. Esto implica un estudio y evaluación de un parámetro de selección de prioridades de ramificación, que depende de la estructura del problema y que afecta el comportamiento del método. Los resultados muestran que el uso de esta estrategia genera mejores resultados en función del tiempo de ejecución requerido.

PALABRAS CLAVE

Investigación de operaciones, diseño de territorios, programa entero mixto lineal, método de ramificación y acotamiento.

ABSTRACT

In this paper we show a mathematical model for a commercial territory design problem. This model is a mixed-integer linear program (MILP) due to both the discrete nature of the decision variables and the linearity of its objective function and constraints. In this work we illustrate one of the most popular methods for solving MILPs exactly (Branch-and-Bound). In addition, an empirical evaluation of the method over a variety of problem instances is included. In particular, a very important algorithmic strategy such as giving priority to the branching variables is further investigated. The results show that this strategy produces better results in terms of run time.

KEYWORDS

Operations research, territory design, mixed-integer linear program, branch-and-bound algorithm.

INTRODUCCIÓN

El presente estudio trata sobre el diseño de territorios de atención comercial, que surge en una compañía distribuidora de bebidas embotelladas, el cual puede ser visto como un problema de agrupar pequeñas unidades geográficas o manzanas (unidades básicas) dentro de zonas geográficas más grandes llamadas territorios. Estos territorios deben satisfacer ciertas características de planeación por parte de la empresa. Éste es un caso de optimización combinatoria clasificado como NP-duro,[1] es decir, que existe una demostración teórica que muestra que no hay ningún algoritmo que garantice encontrar la mejor solución posible (solución óptima) en un tiempo polinomial.[2] La consecuencia de este resultado es que es un problema muy difícil de resolver ya que el tiempo de ejecución del método de solución crece exponencialmente con el tamaño del problema en el peor caso. Esto representa todo un reto de investigación. Desde la perspectiva práctica, una buena solución es muy importante ya que ayudaría a las empresas a distribuir su gran área de trabajo de la mejor manera de acuerdo a sus criterios de planeación. El diseño territorial (PDT) que motiva este trabajo tuvo sus orígenes en los trabajos de Vargas Suárez[3] y Vargas-Suárez, Ríos-Mercado y López.[4]

El problema en estudio puede modelarse como un Programa Entero Mixto Lineal (PEML). Un PEML es un modelo en el que tanto las restricciones como la función objetivo son funciones lineales y las variables de decisión son algunas enteras y otras continuas. En particular, se trabaja con relajaciones lineales del modelo original.

La relajación consiste en eliminar alguna restricción del modelo, lo cual permite ampliar la región factible. Lo anterior, tiene la ventaja que es relativamente más fácil de resolver y que una solución a la relajación proporciona una cota inferior al óptimo del problema original. En este caso, esta relajación obedece al hecho de que en el modelo original el conjunto de restricciones de conectividad es de tamaño exponencial por lo cual es imposible escribir explícitamente. El obtener esta cota es fundamental ya que con ésta se puede medir la calidad de las heurísticas desarrolladas para este problema. Las heurísticas son procedimientos simples, a menudo basados en el sentido común, que se supone ofrecerán una buena solución (aunque no necesariamente la óptima) a problemas difíciles, de un modo fácil y rápido.[5]

El presente trabajo es de gran utilidad ya que proporciona cotas que pueden medir la calidad de heurísticas desarrolladas para el modelo en estudio,[6,7] y sirve, además, como punto de partida para otras investigaciones. Se estudia el algoritmo del método exacto de ramificación y acotamiento en la relajación del modelo. Se evalúa un parámetro de este algoritmo, el cual depende de la estructura del problema y afecta el comportamiento del método. Al evaluar el parámetro algorítmico con un diseño experimental adecuado se puede obtener el mejor valor para éste. Con esto se espera que el método exacto pueda resolver la relajación del modelo, sin embargo, cuando esto no es posible y el método se trunca, al menos ayuda a encontrar soluciones de buena calidad.

DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

El caso que se estudia en este trabajo está basado en una aplicación real proveniente de la distribución de bebidas embotelladas en la ciudad de Monterrey, en la cual se desea definir territorios comerciales. Esta empresa considera una manzana geográfica como una unidad básica (UB) y desea agrupar estas UBs de la mejor manera, satisfaciendo ciertos criterios económicos y geográficos definidos por

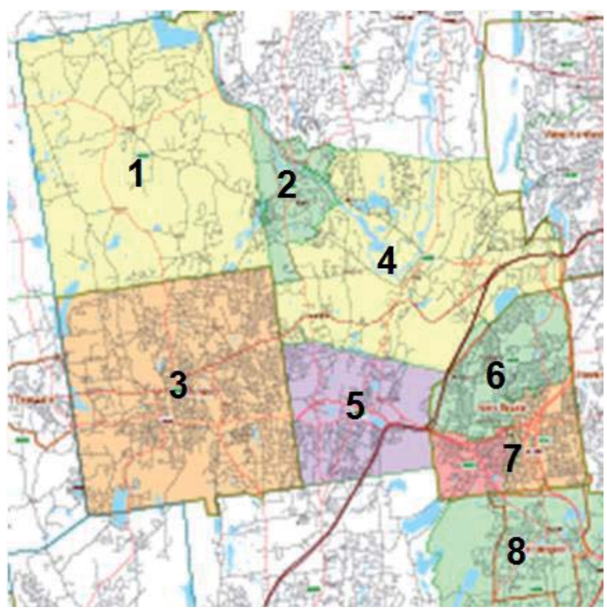

Fig. 1. Ejemplo de una región geográfica.

dicha empresa. Esto ayudará a tener una buena administración y además a dar un buen servicio a los clientes ubicados en cada grupo o territorio (figura 1). La adyacencia de manzanas o UBs se puede representar mediante un grafo (figura 2).

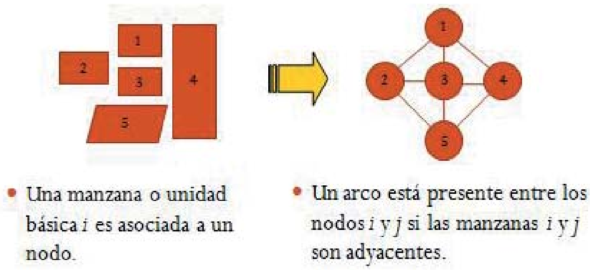

Fig. 2. Representación de adyacencia de manzanas mediante un grafo.

Cada una de las UBs tiene dos atributos o medidas asociadas a la misma:

- Número de puntos de venta o clientes.
- Volumen o demanda del producto.

En el resto del trabajo, la palabra grupo, distrito y territorio se usan indistintamente.

Uno de los requerimientos impuestos por la empresa es que la carga total de cada territorio formado sea lo más parecido posible con respecto a cada una de estas dos actividades definidas. Sin embargo, dado que es muy difícil lograr un balance simultáneo para las dos actividades definidas, se establece cierto parámetro de tolerancia para cada actividad. Por ejemplo, si el valor de balance de una cierta actividad es 10 y la tolerancia permitida es 0.01, entonces el valor de dicha actividad en cada territorio debe estar entre 9 y 11. De lo anterior, el inciso a) de la figura 3 da un ejemplo de territorios no balanceados ya que tiene un nivel de 12 y otro de 8, los cuales están fuera del rango. Los incisos b) y c) muestran territorios balanceados con tolerancia 0.01.

Las UBs son, por definición, áreas geográficas con una ubicación específica dentro de una región. Los territorios que se formen deben respetar esta ubicación natural y es requisito indispensable que el territorio se forme únicamente con unidades básicas que sean contiguas, es decir, que para poder llegar a cada unidad básica del territorio deben visitarse solamente unidades básicas que pertenezcan al mismo territorio. En Teoría de Grafos a esta propiedad se le llama conexidad. Un ejemplo de territorio no conexo se puede ver en el inciso b) de la figura 3, ya que para poder llegar de los nodos con valor de 4 y 3 al otro nodo con valor 2 se necesita salir del territorio, es decir no hay un arco que los una. Por el contrario los incisos a) y c) muestran territorios conexos.

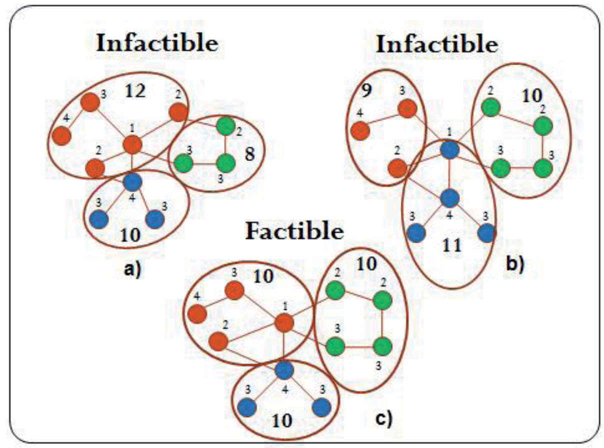

Fig. 3. Ejemplo donde se muestra el balance de una actividad medible y la conexidad.

Al mismo tiempo que se considera la conexidad y el balance de los territorios, se busca que cada territorio sea lo más compacto posible, es decir, que las unidades básicas en cada territorio estén lo más cerca posible entre ellas (figura 4).

Se conoce el número de UBs, el cual está identificado por n. Todas estas unidades se analizan dentro del plano cartesiano, por lo tanto, se tienen las coordenadas geográficas que representan la ubicación de cada unidad. Se tienen los valores de las dos actividades medibles (número de clientes y demanda) asociadas a cada UB.

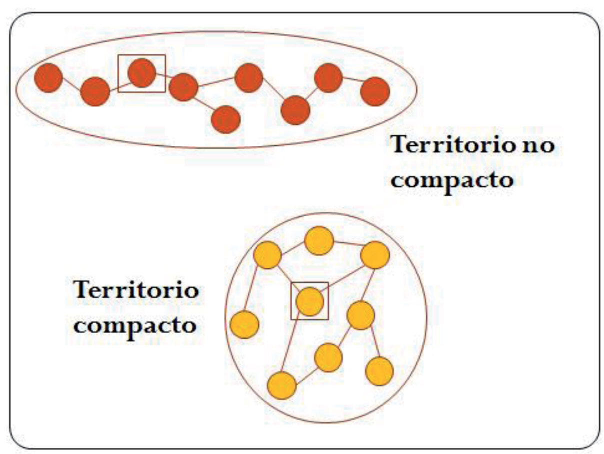

Fig. 4. Ejemplo de territorio compacto y no compacto.

El número de territorios a formar se conoce y se denota por p. Como se ha comentado, es muy difícil lograr un balance simultáneo para las dos actividades medibles, por tal motivo se fija un valor de tolerancia (τ^a) el cual permite decidir que tan balanceados se desean que estén los territorios para cada actividad. Se supone que la demanda y el número de clientes se conocen con certeza, y que el número de clientes es fijo. Resumiendo lo anterior, se desean formar p territorios de forma que:

- Cada UB pertenezca solamente a un territorio.
- Los territorios estén balanceados con respecto a las dos medidas de actividad.
- Los territorios sean contiguos.
- Los territorios sean compactos.

FORMULACIÓN ENTERA MIXTA LINEAL (PEML)

Desde el punto de vista de la programación matemática, el problema puede modelarse como un programa entero mixto lineal.

Índices y conjuntos

n número de unidades básicas o nodos

p número de territorios

i, j índices de las unidades básicas; $i, j \in V = \{1,2,...,n\}$

a índices de las actividades; $a \in A = \{1, 2\}$

N^i $(=\{j \in V : (i,j) \in E \vee (j,i) \in E\})$ conjunto de nodos que son adyacentes al nodo i; $i \in V$

Parámetros

w_i^a valor de la actividad a en el nodo i; $i \in V, a \in A$

d_{ij} distancia euclidiana entre i y j; $i, j \in V$

τ^a tolerancia relativa con respecto a la actividad a; $a \in A, \tau^a \in [0,1]$

Parámetros calculados

$w^a(B) (= \sum_{j \in B} w_j^a)$ tamaño del conjunto B con respecto a a; $a \in A$, $B \subset V$

$\mu^a (= w^a(V)/p)$ valor promedio (meta) de la actividad a; $a \in A$

Variables de decisión

Se introducen variables binarias basadas en centros para modelar la medida de dispersidad.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la unidad } j \text{ es asignada al territorio con centro en } i;\ i, j \in V \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Por consiguiente, esto implica la definición de x_{ii} como:

$$x_{ii} = \begin{cases} 1 & \text{si el nodo } i \text{ es el centro de un territorio; } i \in V \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Modelo A

$$\text{Minimizar} \quad f(x) = \max_{i,j \in V} \{d_{ij} x_{ij}\} \tag{1}$$

sujeto a:

$$\sum_{i \in V} x_{ij} = 1 \qquad j \in V \tag{2}$$

$$\sum_{i \in V} x_{ii} = p \tag{3}$$

$$\sum_{j \in V} w_j^a x_{ij} \leq (1+\tau^a)\mu^a x_{ii} \qquad i \in V,\ a \in A \tag{4}$$

$$\sum_{j \in V} w_j^a x_{ij} \geq (1-\tau^a)\mu^a x_{ii} \qquad i \in V,\ a \in A \tag{5}$$

$$\sum_{j \in \cup_{v \in S} N^v \setminus S} x_{ij} - \sum_{j \in S} x_{ij} \geq 1 - |S| \qquad i \in V;\ S \subset V \setminus (N^i \cup \{i\}) \tag{6}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i, j \in V \tag{7}$$

La función objetivo (1) mide la dispersidad de los territorios usando la función conocida como p-centro. Las restricciones (2) y (3) garantizan que cada nodo j sea asignado solamente a un territorio y que el número de territorios diseñados sea el deseado, respectivamente. Las restricciones (4) y (5) representan el balance en cada territorio con respecto a cada medida de actividad, ya que se sabe que el tamaño de cada territorio debe encontrarse dentro de un rango (medido por el parámetro de tolerancia τ^a) alrededor de este promedio. Además las cotas superiores de las restricciones de balance (4) aseguran o garantizan que si el nodo i no es un centro, los clientes no sean asignados a él. Las restricciones (6) garantizan la contigüidad de los territorios.

Nótese, que el número de estas restricciones crece exponencialmente dependiendo del tamaño del conjunto V. Las restricciones (7) garantizan un valor binario para cada variable de decisión. El problema en estudio es NP-duro.[1]

Este modelo no es precisamente lineal debido a que la función objetivo (1) no es una función lineal. Sin embargo, el modelo A puede ser linealizado si se reemplaza la ecuación (1) por la (8) y las restricciones (9) dadas a continuación.

$$\text{Minimizar} \quad g(x)=z \tag{8}$$

$$z \geq d_{ij} x_{ij} \quad i,j \in V \tag{9}$$

A su vez, las restricciones (9) se reemplazan por

$$z \geq \sum_{i \in V} d_{ij} x_{ij} \quad j \in V \tag{10}$$

ya que éstas proporcionan una formulación más robusta.[8]

Como se mencionó anteriormente, el número de restricciones dadas en (6) es exponencial y por tanto no pueden escribirse explícitamente ni para valores relativamente medianos de n. La fórmula para calcular el número de restricciones que se desprenden de las restricciones de conexidad (6) es:

$$\sum_{i=1}^{|V|}\left[\sum_{l=1}^{c_i}\binom{c_i}{1}\right], \text{ donde } c_i = \left|V \backslash (N^i) \cup \{i\}\right|;\ i \in V$$

En la tabla I se muestra el número de restricciones para algunos valores de n.

Tabla I. Número de restricciones de conexidad.

n	*p*	Número de restricciones (6)
10	3	854
20	5	1,834,988

Por tal motivo, en el presente trabajo se procedió a trabajar con una relajación del modelo A que consiste en ignorar (6).

Modelo A_R (Modelo A linealizado y relajado)

$$\text{Minimizar} \quad g(x)=z \tag{11}$$

$$\text{sujeto a: } z \geq \sum_{i \in V} d_{ij} x_{ij} \quad j \in V \tag{12}$$

$$\sum_{i \in V} x_{ij} = 1 \quad j \in V \tag{13}$$

$$\sum_{i \in V} x_{ii} = p \tag{14}$$

$$\sum_{j \in V} w_j^a x_{ij} \leq (1+\tau^a)\mu^a x_{ii} \quad i \in V,\ a \in A \tag{15}$$

$$\sum_{j \in V} w_j^a x_{ij} \geq (1-\tau^a)\mu^a x_{ii} \quad i \in V,\ a \in A \tag{16}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad j \in V \tag{17}$$

$$z \geq 0 \tag{18}$$

MÉTODO DE RAMIFICACIÓN Y ACOTAMIENTO (MRA)

El MRA es uno de los métodos más populares en la solución exacta de problemas de programación entera.[9] El método consiste en ir acotando superior e inferiormente el valor de la función objetivo hasta que ambas cotas sean iguales, es decir, se haya llegado al valor óptimo. El pseudocódigo del MRA se muestra a continuación:

Inicialización

Problema inicial P está en una Lista. $Z^U=+\infty$; solución actual x^* es vacío.

While la Lista no esté vacía.

  Elegir problema P^i de la Lista. Resolver la relajación lineal PL sobre P^i. Z^i = valor de PL.

  x^i (PL) = solución de PL.

  if P^i no es factible, se poda por infactibilidad.

  else if $Z^i \geq Z^U$, se poda por cota.

  else if x^i (PL) es entera, actualizar la cota primal $Z^U = Z_L^i$ y la solución actual $x^* = x^i$ (PL), se poda por optimalidad.

  else Retornar dos subproblemas a la lista P_1^i y P_2^i.

  end if

  end if

  end if

end while

Al final del proceso se tiene la solución x^* óptima.

Algunas de las muchas preguntas que surgen sobre este método son: ¿Cómo seleccionar el subproblema a explorar? De todas las variables que deben ser enteras y que en la relajación resultaron ser fraccionarias ¿sobre cuál se ramifica o se hace la partición en subproblemas? ¿Afectará el desempeño del método el orden de prioridades sobre las variables a ramificar?

Para cada una de ellas hay respuestas, pero depende de la estructura y de las características de cada modelo. Se puede seleccionar el subproblema que tiene la mejor cota o el que recientemente haya sido introducido en la lista o una combinación de éstos. Cada una de estas formas de seleccionar el subproblema tiene sus ventajas y desventajas dependiendo del modelo y de lo que se busca.

La forma de trabajar del MRA permite tener cierto control sobre algunos de sus parámetros algorítmicos, con el fin de ayudar al método a encontrar resultados que sean óptimos y obtenidos en tiempos razonables.

El parámetro de interés a analizar en este trabajo es el de selección de prioridades de ramificación, es decir, es el parámetro que indica si se da o no prioridad a las variables a ramificar. Este trabajo se enfoca en analizar si el considerar prioridades sobre las variables a la hora de ramificar afecta la calidad de la solución y el tiempo requerido para encontrarla en el modelo bajo estudio.

Dar o no prioridad a las variables a ramificar

Las prioridades se deben asignar basadas en el conocimiento del problema. Las variables con prioridades más altas serán ramificadas antes de las variables con prioridades más bajas.

Esta dirección de búsqueda del árbol puede a menudo reducir dramáticamente el número de subproblemas explorados. Este parámetro es muy importante de analizar en los modelos que presentan restricciones del tipo $x_{ij} \leq x_{ii}$. Si se ramifica primero sobre la variable binaria x_{ii}, entonces esta variable se fija en 1 o en 0, si se fija en 1 la restricción anterior es redundante. Si la variable x_{ii} se fija en cero, automáticamente todas las variables x_{ij} se fijan en cero, lo cual puede reducir dramáticamente el número de subproblemas a explorar.

El modelo A_R en estudio presenta las restricciones (15), las cuales tienen esta estructura especial, ya que si la variable x_{ii} toma el valor de cero, ésta forza a que el lado izquierdo de la desigualdad sea cero, es decir si el nodo *i* no es un centro, los clientes no pueden asignarse a éste. Ramificar primero las variables x_{ii} y después las x_{ij}, lo que implica que si primero se fijan los centros y después se asignan los clientes a los centros ya fijados, se afectará la calidad de la solución y el tiempo requerido para obtenerla.

ESTUDIO COMPUTACIONAL

El diseño de experimentos es el proceso de planear un experimento para obtener datos apropiados, que pueden ser analizados mediante métodos estadísticos, con objetivo de producir conclusiones válidas y objetivas. Se requiere un enfoque estadístico del diseño de experimentos para obtener conclusiones significativas a partir de los datos.[10]

Objetivo y datos de prueba

El objetivo de esta evaluación consiste en determinar, en base a un experimento computacional y análisis estadístico, si el parámetro de selección de prioridades de ramificación afecta positiva o negativamente la calidad de la solución y el tiempo requerido para encontrarla.

Para los experimentos se utilizaron instancias de prueba de una base de datos desarrollada previamente. Los detalles de ésta pueden encontrarse en.[1] Para esta experimentación se consideraron dos tipos de instancias, diferentes en tipo y tamaño (*DS10* y *DS05*), de acuerdo al parámetro τ^a.

Tipos de instancias

- *DS10*: Son los problemas para los cuales el parámetro de tolerancia de las restricciones de balance (ecuación 4 y 5) $\tau^a = 0.10$ (es decir, se permite una desviación de un 10%).
- *DS05*: Son los problemas para los cuales el parámetro de tolerancia de las restricciones de balance (ecuación 4 y 5) $\tau^a = 0.05$ (es decir, se permite una desviación de un 5%).

Tamaño de instancias

- (60,4) Problemas con 60 nodos y 4 territorios.
- (100,5) Problemas con 100 nodos y 5 territorios.

Una solución se considera óptima en los experimentos si dicha solución satisface el criterio de optimalidad relativa de 0.01, es decir cuando se garantiza que la solución obtenida se encuentra a lo mucho a un 1% del valor óptimo. El intervalo de optimalidad relativa (IOR) se calcula de la siguiente manera: $\frac{Z_U - Z_L}{Z_L}$ donde Z_U es la cota superior (solución factible de PEM) y Z_L es la cota inferior (mejor posible encontrada). Si se desea el porcentaje de este intervalo sólo se multiplica por 100.

En la experimentación, se hace uso de GAMS,[11] el cual es un modelador algebraico para problemas de optimización con interfaz a varios métodos de solución de uso comercial. En nuestro caso, los problemas de PL y PEM se resuelven utilizando el módulo GAMS/CPLEX, el cual es la interfaz usada por GAMS para llamar al optimizador CPLEX,[11] que es hoy en día uno de los optimizadores más potentes a nivel mundial en la resolución de problemas de PL y PEML. Los experimentos fueron realizados en un ordenador SunFire V440 con el sistema operativo Solaris 9 propiedad del Laboratorio de Cómputo de Alto Desempeño del Programa de Posgrado en Ingeniería de Sistemas de la FIME, UANL. Se utilizó la versión 9.0 de CPLEX en cada experimento.

DISEÑO EXPERIMENTAL

Consiste en realizar ejecuciones para el modelo A_R, variando el tamaño y el tipo de instancia del problema. Además se modifica un parámetro algorítmico del método exacto:

- El parámetro de selección de prioridades de ramificación.

En este experimento se mide el tiempo que tarda el algoritmo en dar una solución óptima. Para analizar los resultados obtenidos en cada experimento se emplea una prueba no paramétrica llamada Kruskal-Wallis (conocida también como la prueba H), debido a que los datos no cumplen con las condiciones necesarias para aplicar un ANOVA(análisis de varianza), entre ellas que las respuestas no están normalmente distribuidas. La prueba de Kruskal-Wallis[10] es una de las pruebas no paramétricas más poderosas y se aplica cuando se tiene un diseño completamente al azar pero no se puede suponer normalidad. Sirve para determinar la igualdad o diferencia entre tratamientos.

Se utilizó el software MINITAB 14[12] como herramienta estadística para analizar los datos y de esta manera poder establecer conclusiones con validez estadística. Los tiempos de cómputo obtenidos en los experimentos se introducen en MINITAB, se selecciona la prueba Kruskal-Wallis y se comienza el análisis. Esta prueba no paramétrica cuenta con las siguientes hipótesis:

H_0: Dar o no dar prioridades a las variables a ramificar requiere el mismo tiempo de resolución. Es decir, cualquiera de estas opciones requiere el mismo tiempo.

H_1: Dar o no dar prioridades a las variables a ramificar requiere diferente tiempo de resolución. Es decir, una de estas opciones proporciona mejores tiempos.

Esta herramienta estadística calcula las medias de los k tratamientos y un valor q, con el cual determina si se rechaza o no la hipótesis nula (H_0). Si el valor de $q < \beta$ (donde $\beta = 0.05$ es el nivel de significancia) se rechaza H_0 y se toma la alternativa, en otro caso se acepta H_0.

RESULTADOS

En esta parte, se estudia la sensibilidad del algoritmo del método exacto al modificar el parámetro de selección de prioridades de ramificación. Esto se mide con base en la mejora del tiempo de solución. Para esto, se considera dar mayor prioridad para ramificar primeramente sobre las variables x_{ii}, después de estas variables se consideran las x_{ij}. Esto se realiza para el modelo A_R con 20 instancias para cada combinación tipo-tamaño. En total para este experimento son 80 instancias a dos niveles (mipordind_0 y mipordind_1) es decir, se realizan 160 ejecuciones. Los resultados se muestran en la tabla II y figuras 5, 6. La primera columna en la tabla II indica de que tipo son las instancias que se están probando, la segunda el tamaño de éstas, la tercera y cuarta columna indican los tiempos de cómputo promedio (en segundos) que el MRA empleó al ejecutar las 20 instancias sin prioridades y con prioridades, respectivamente. Todas las instancias se resolvieron de manera óptima.

mipordind_0 = Dar prioridades a las variables x_{ii} sobre las x_{ij}.
mipordind_1 = No dar ninguna prioridad.

El valor q obtenido en la prueba estadística para las diferentes instancias del problema A_R es casi 0 el cual es menor que β. Entonces, se establece que hay evidencia suficiente para rechazar H_0, es decir, que el dar prioridades a las variables sí impacta en el tiempo de cómputo. Se puede observar, además, en la tabla II y figuras 5 y 6 que los tiempos de solución disminuyen considerablemente al darle prioridad de ramificar a

Tabla II. Tiempo de cómputo promedio (en segundos), variando las prioridades para el modelo A_R.

Tipo	(n,p)	mipordind_0	mipordind_1
DS05	(60,4)	130.0	79.7
DS10	(60,4)	79.4	51.6
DS05	(100,5)	3,125.5	895.5
DS10	(100,5)	3,783.5	794.1

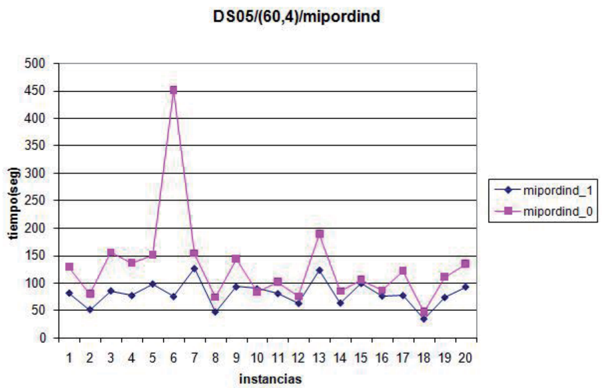

Fig. 5. Evaluación de parámetro de selección de prioridades en instancias de DS05/(60,4).

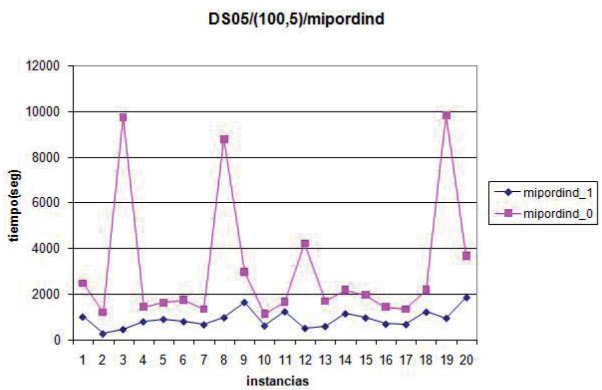

Fig. 6. Evaluación de parámetro de selección de prioridades en instancias de DS05/(100,5).

las variables x_{ii} sobre las x_{ij}. El usar prioridades reduce el tiempo de solución significativamente, por lo cual, se considera importante este parámetro. Se considera dar prioridades a las variables x_{ii} sobre las x_{ij}.

CONCLUSIONES

El Método de Ramificación y Acotamiento (MRA) puede dar soluciones óptimas para algunas instancias (de tamaños chico y mediano) del modelo (A_R) presentado en este trabajo. Sin embargo, para instancias mayores el tiempo de ejecución puede ser extremadamente grande y es importante entonces disponer de mecanismos que ayuden a disminuir los tiempos de ejecución del optimizador. Los resultados obtenidos con este trabajo indican que para el problema bajo estudio es recomendable dar prioridad a las variables x_{ii} sobre las x_{ij} ya que mejoraron los tiempos de solución significativamente. Esto se debe a que el fijar una variable x_{ii} en 0, por ejemplo, implica que todas las variables x_{ij} tienen que ser 0, para todo $j \in V$, lo cual acelera la convergencia del método.

El modificar adecuadamente el parámetro de prioridades del método ayuda a obtener soluciones óptimas del modelo relajado (A_R) en mejores tiempos. Como la estructura del modelo original (A) es similar a la relajación (A_R) se recomienda que en ambos modelos (A y A_R) se dé prioridad a las variables de localización (x_{ii}) para mejorar los tiempos de ejecución. Un estudio mucho más exhaustivo de otros parámetros algorítmicos puede encontrarse en.[13]

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue apoyado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (apoyo SEP-CONACYT 48499-Y), por la UANL (apoyo UANL-PAICYT CA1478-07). El primer autor agradece además al Programa de Verano de Investigación Científica y Tecnológica de la UANL por el apoyo brindado en 2006 y 2007.

REFERENCIAS

1. R. Z. Ríos-Mercado y E. Fernández. A reactive GRASP for a commercial territory design problem with multiple balancing requirements. Computers & Operations Research, 36(3):755-776, 2009.
2. R. Martí. Algoritmos heurísticos en optimización combinatoria. Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad de Valencia. Valencia, España, junio 2005.
3. L. G. Vargas Suárez. Un procedimiento de búsqueda miope, adaptativa y aleatorizada para la definición de territorios de atención comercial. Tesis de maestría. Universidad Autónoma de Nuevo León, San Nicolás de los Garza, N. L., junio 2005.
4. L. Vargas-Suárez, R. Z. Ríos-Mercado y F. López. Usando GRASP para resolver un problema de definición de territorios de atención comercial. En M. G. Arenas, F. Herrera, M. Lozano, J. J. Merelo, G. Romero y A. M. Sánchez, editores. Actas del IV Congreso Español de Metaheurísticas, Algoritmos Evolutivos y Bioinspirados (MAEB), pp. 609-617, Granada, España, septiembre 2005.

5. A. Díaz, F. Glover, H. M. Ghaziri, J. L. González, M. Laguna, P. Moscato y F. T. Tseng. Optimización Heurística y Redes Neuronales. Paraninfo, Madrid, España, 1996.
6. S. I. Caballero Hernández, R. Z. Ríos-Mercado y F. López. Solución heurística a un problema de diseño de territorios comerciales con restricciones de asignación conjunta mediante GRASP. En Actas de las I Jornadas sobre Algoritmos Evolutivos y Metaheurísticas (JAEM'07), pp. 145-153, Zaragoza, España, septiembre 2007.
7. J. A. Segura-Ramiro, R. Z. Ríos-Mercado, A. M. Álvarez-Socarrás y K. de Alba Romenus. A location-allocation heuristic for a territory design problem in a beverage distribution firm. En Proceedings of the 12th Annual International Conference on Industrial Engineering Theory, Applications, and Practice (IJIE'07), pp. 428-434, ISBN: 978-0-9654506-3-8, Cancún, México, noviembre 2007.
8. M. S. Daskin. Network and Discrete Location. Models, Algorithms and Applications. Wiley, New York, EUA, 1995.
9. F. S. Hillier y G. J. Lieberman. Introducción a la Investigación de Operaciones. McGraw-Hill, México, 1997.
10. J. E. Freund, I. Miller y M. Miller. Estadística Matemática con Aplicaciones. Prentice Hall, Naucalpan de Juárez, Estado de México, sexta edición, 2000.
11. GAMS Develpoment Corporation. GAMS. The Solver Manuals. Washington, EUA, 2005.
12. Minitab Inc. Meet MINITAB. Release 14 for Windows. EUA, septiembre 2003.
13. N. Solis García. Evaluación de la Calidad de Métodos de Optimización Exacta para Modelos de Diseño Territorial. Tesis de Licenciatura. Universidad Autónoma de Nuevo León, San Nicolás de los Garza, N. L., julio 2008.