

# Controlador basado en redes neuronales para sistemas mecánicos

Martha I. Aguilera Hernández \*  
Jesús de León Morales \*\*

**Resumen:** Este artículo presenta un estudio experimental de un controlador basado en redes neuronales diseñado para sistemas mecánicos que tienen menos actuadores que grados de libertad. El controlador es aplicado a un equipo de péndulo invertido para mostrar su desempeño.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los controladores se utilizan en muy diversas áreas, básicamente en aquellas en donde la automatización es el elemento primordial para el desarrollo de sus aplicaciones.

Estos controladores deben ser robustos para asegurar estabilidad y mantener un desempeño aceptable bajo condiciones adversas de operación.<sup>9</sup>

En el área de los sistemas mecánicos se ha presentado como un problema de control el caso cuando el número de entradas (actuadores) es menor que el número de salidas (grados de libertad). Un ejemplo de ello son los robots subactuados (sistemas con menos controles que variables a controlar), el péndulo invertido en donde la velocidad lineal del carro representa la entrada del sistema, la posición angular del péndulo y lineal del carro son las correspondientes salidas medibles del sistema.

El péndulo invertido es un ejemplo clásico usado como prototipo de prueba. Es un sistema mecánico inestable cuando se encuentra en posición vertical, y el estudio de sus dinámicas es importante para el análisis de sistemas que tienen que mantenerse próximos a un punto de equilibrio inestable. Ejemplo de ello son los sistemas robóticos móviles con patas, sistemas de navegación o antenas espaciales.

En la literatura, se pueden encontrar diferentes enfoques para resolver este problema de diseño de

controladores. Por ejemplo, la linealización por retroalimentación de estado,<sup>1,3,4</sup> pasividad, linealización de entrada-salida<sup>8</sup> y técnicas basadas en métodos de Lyapunov. Sin embargo, el problema no se ha resuelto completamente, sobretodo para los sistemas subactuados, y el estudio continúa para encontrar caminos alternativos.

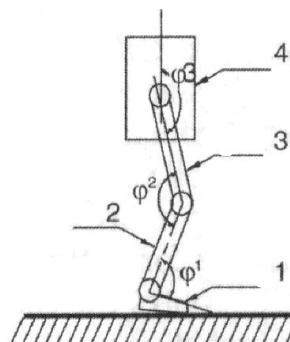


Fig. 1. Modelo de un robot caminante.

Por otra parte, las redes neuronales han sido utilizadas en la última década en diferentes aplicaciones, principalmente en la adaptación de los parámetros de un sistema cuando el modelo se desconoce. Entonces, vale la pena preguntarse ¿es posible utilizar las técnicas de redes neuronales para resolver el problema de control de sistemas subactuados?

En este artículo se presenta una propuesta en donde se introduce un método para diseñar un controlador basado en redes neuronales que, combinado con técnicas de control lineal, resuelve el problema de control que se presenta en sistemas

\* Instituto Tecnológico de Nuevo Laredo, Departamento de Ing. Eléctrica, 88240 Nuevo Laredo, Tam., México  
E-mail: aguilera@teclaredo.edu.mx,

\*\*Universidad de Nuevo León, Departamento de Ingeniería Eléctrica, 66450 San Nicolás de los Garza, N. L., México, E-mail: jleon@ccr.dsi.uanl.mx

con menos entradas que salidas. En este procedimiento, la idea principal consiste en definir una nueva salida que iguale el número de entradas y salidas. Esta nueva salida es diseñada mediante técnicas de redes neuronales que garantizan el desempeño del controlador propuesto. Además, se presenta el análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado.

El artículo está organizado como sigue: En la sección 2, se presenta el modelo matemático que representa al Péndulo Invertido. El controlador basado en redes neuronales será derivado en la sección 3. En la sección 4, se muestran los resultados de simulación y de experimentación obtenidos. Finalmente, se presentan las conclusiones de este trabajo.

## 2. MODELO DEL PÉNDULO INVERTIDO

El péndulo invertido consiste de una barra (péndulo) colocada en la parte superior de un carro con ruedas el cual se mueve a través de un riel. Este sistema se muestra en la Fig. 2.1 El carro y el péndulo están restringidos a tener un movimiento horizontal.

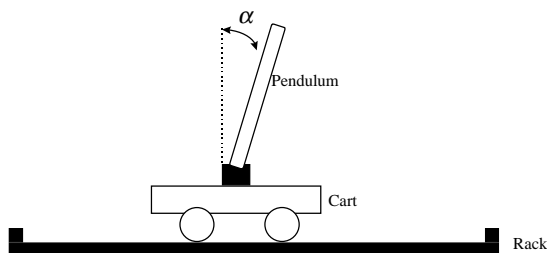


Fig. 2.1 Péndulo Invertido

El equipo de instrumentación consiste de un actuador que controla la velocidad lineal del carro y dos sensores que miden la velocidad lineal del carro y la posición angular del péndulo. El objetivo de control es mantener en equilibrio al péndulo en la

posición vertical y colocar al carro en una posición deseada.

La velocidad lineal y angular pueden ser determinadas en forma indirecta por medio de la medición de la posición lineal del carro y el ángulo del péndulo. El equipo de péndulo invertido utilizado para estos experimentos se muestra en la Fig. 2.2.

El carro está equipado con un motor y un potenciómetro y se desliza por un riel. Estos están acoplados a un mecanismo que introduce la fuerza al sistema y mide la posición del carro y la posición del péndulo. Los datos se retroalimentan a una computadora 80486 por medio de una tarjeta de adquisición de datos. En esta computadora se realiza el tratamiento de los datos y la programación del control utilizando lenguaje C.

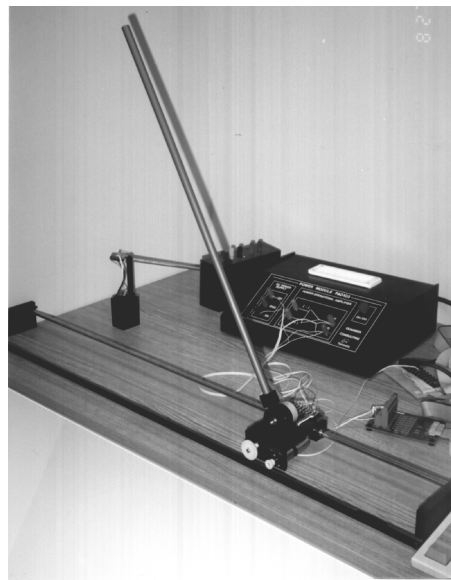


Fig. 2.2. Equipo de Péndulo Invertido

El tiempo de muestreo es de 4 ms, la masa del carro es de 455 grms., la máxima velocidad es de 1.09m/s, la máxima aceleración es de 3.0 m/s<sup>2</sup>, la

longitud del riel es de 0.914m., el diámetro del péndulo es de 1.27 cm., la longitud de 0.61 m., la masa es de 210 grms y el motor tiene una velocidad máxima de 6000 rpm.

El modelo matemático del péndulo invertido está dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, basadas en consideraciones Lagrangianas.

$$\sum_p : \begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{z} + m_2 l \ddot{\alpha} \cos(\alpha) - m_2 l \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha) = u \\ m_2 l \ddot{\alpha} \cos(\alpha) - \frac{4}{3} m_2 l^2 \ddot{\alpha} - m_2 g \sin(\alpha) = 0 \end{cases}$$

donde  $z$  representa la posición lineal,  $u$  = fuerza de entrada al carro (N),  $m_1$  = masa de la barra (péndulo, unidades Kg),  $m_2$  = masa del carro (Kg),  $l$  = longitud del péndulo,  $\alpha$  = ángulo de desviación con respecto a la posición vertical,  $g$  = fuerza gravitacional.

Definiendo el vector  $q = (z, \alpha)$ , entonces  $\sum_p$  tiene la forma descrita por <sup>3</sup>

$$\sum_{MS} : \left\{ M(q)\ddot{q} + C\left(q, \dot{q}\right)\dot{q} = Qu \right.$$

donde  $q$  es el vector  $(n \times 1)$  de coordenadas generalizadas de la articulación.  $M(q)$  es una matriz simétrica, positiva definida de dimensión  $(n \times n)$ , la cual es llamada matriz de inercia.

$C\left(q, \dot{q}\right)\dot{q}$  es el vector  $(n \times 1)$  de las fuerzas centrífugas y de coriolis.  $Q$  es una matriz constante de dimensión  $n \times m$  de rango  $m$ ,  $u$  es el vector de control  $(m \times 1)$  con  $m \leq n$ . En este modelo, la fricción no se ha tomado en cuenta.

Si se utiliza el siguiente cambio de coordenadas

$$X = \begin{bmatrix} X_1^T & X_2^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} q^T & \dot{q}^T \end{bmatrix}^T$$

el sistema  $\sum_{MS}$  se puede escribir en una representación de espacio de estado estándar

$$\sum_{NL} : \begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ -M^{-1}(X_1)C(X_1, X_2)X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}(X_1)Qu \end{pmatrix}$$

que es un sistema no lineal afín en la entrada que se representa en la forma compacta por  $\dot{X} = f(X) + g(X)u$ . La salida está dada por

$$y = q = h(x) = X_1$$

Aplicando linealización tangente al sistema mecánico  $\sum_{NL}$  alrededor del punto de equilibrio  $x_c = \begin{bmatrix} x_{c1}^T & 0 \end{bmatrix}^T$  con  $x = X - x_c$  se obtiene la siguiente representación lineal

$$\sum_L : \dot{x} = Ax + Bu$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ \frac{\partial M^{-1}(x_c)C(x_c)}{\partial x} & M^{-1}(x_c)\frac{\partial C}{\partial \dot{x}}(x_c) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0_{n \times m} \\ M^{-1}(x_c)Q \end{pmatrix}$$

**Nota 1:** De <sup>3</sup>, la estabilidad asintótica de  $\sum_L$  depende de los ceros finitos no lineales en  $x_c$ . Además, el sistema no lineal, bajo la acción de linealización tangente, puede ser estabilizado si el sistema lineal obtenido es controlable. La

importancia de la linealización tangente es que el sistema  $\Sigma_{NL}$  en lazo cerrado mediante un control no lineal es equivalente al sistema  $\Sigma_L$  en lazo cerrado con un control lineal de la forma  $u = \frac{\partial h}{\partial x}(x_c)x = Kx$ .

### 3. DISEÑO DEL CONTROLADOR BASADO EN REDES NEURONALES

Las señales de referencia consideradas pueden ser modeladas por medio de un sistema dinámico denominado exosistema, que está representado por

$$\Sigma_e : \begin{cases} \dot{\omega} = S\omega \end{cases}$$

donde  $\omega \in R^r$  es el conjunto de variables de entrada exógenas. El exosistema tiene la propiedad de Estabilidad Neutral, es decir, todos los eigenvalores se encuentran en el eje imaginario alrededor de  $\omega=0$ . La utilidad básica del exosistema es la de proveer una señal de referencia "persistente" al sistema.

El problema de regulación de salida consiste en probar la estabilidad en lazo cerrado del sistema  $\Sigma_L$  usando el control dado por

$$u = Kx + L\omega$$

donde  $K$  y  $L$  son matrices que se eligen tal que el error de seguimiento  $e$  definido como  $e = Hx + Q\omega$  tienda a cero cuando el tiempo tiende a infinito, para todo estado inicial y para toda entrada exógena.<sup>7</sup>

Definiendo una nueva entrada a ser controlada como  $y_c = Hx$  (donde  $H$  es una combinación lineal de estados conocida) se procede a diseñar una ley de control que siga una señal de referencia tal que el error de seguimiento tienda a cero

exponencialmente. Para esto, primeramente se consideran las siguientes suposiciones

**Suposición 1.** El exosistema es estable neutralmente.

**Suposición 2.** El par  $(A, B)$  es estabilizable.

**Suposición 3.** Todas las componentes del vector de estado de la planta,  $H$  y las variables exógenas son conocidas.

**Lema 1.** Bajo las suposiciones 1 a la 3. Considere el sistema lineal  $\Sigma_c$  con un controlador de la forma  $u = Kx + L\omega$

$$\Sigma_c : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y_c = Hx \end{cases} \quad \text{con} \quad H \in R^{m \times n}$$

y un exosistema descrito por

$$\Sigma_e : \begin{cases} \dot{\omega} = S\omega \\ y_{ref} = -Q\omega \end{cases}$$

donde  $\omega \in R^r$  es el conjunto de variables exógenas de entrada. Si se define el error de seguimiento como  $e = Hx + Q\omega$ . Entonces, el error de seguimiento tiende exponencialmente a cero cuando el tiempo tiende a infinito si

$$H(A + BK) = -a_o H; \quad HBL = -QS - a_o Q; \quad a_o \in R^+ \tag{1}$$

*Prueba:* Del teorema 4 (sección 6 y detalles en [7]), se tiene

$$\Sigma_s : \begin{cases} \Pi S = (A + BK)\Pi + BL \\ H\Pi + Q = 0 \end{cases}$$

donde  $\Pi$  se selecciona de modo que sea solución de estas ecuaciones.

Si se selecciona  $H(A + BK = -a_o H)$ , donde  $H$  representa el eigen-vector izquierdo de la matriz  $(A + BK)$  asociado al eigen-valor  $-a_o$ , y se multiplica por  $H$  la parte izquierda de la primera ecuación de  $\dot{x}$ , y sustituyendo en la segunda  $(H\dot{\omega} = -Q\omega)$ , se obtiene

$$-Q\dot{x} - a_o Q\omega = HBL \quad (2)$$

Entonces, las dinámicas del error de seguimiento  $e$  están dadas por

$$\dot{e} = H\dot{x} + Q\dot{\omega} = HAx + HBu + QS\omega$$

Sustituyendo el control  $u = Kx + L\omega$ , en la ecuación anterior, se obtiene

$$\dot{e} = H(A + BK)x + HBL\omega + QS\omega$$

Al aplicar (1) en la ecuación anterior resulta que la dinámica del error está dada por

$$\dot{e} = -a_o(Hx + Q\omega) = -a_o e$$

Esto demuestra que el error de seguimiento tiende a cero exponencialmente con una razón de convergencia dada por  $a_o$ . ■

En la demostración anterior, se hizo la suposición de que  $H$  es conocida Sin embargo, esto no es siempre posible. Para resolver este caso, se utiliza una Red Neuronal Multicapa (Multilayered Neural Network (MNN)) para identificar los coeficientes de  $H$ . Unas de las arquitecturas de redes más populares es la de Propagación hacia atrás. Una red de este tipo con tres capas es utilizada y permite aproximar una gran variedad de funciones lineales y no lineales con una precisión aceptable.<sup>5</sup>

El cálculo de  $H$  usando la Red de Tres Capas (MNN) se muestra en la Fig. 3.1, donde  $x$  representa los estados,  $h$  representa los pesos de la MNN,  $q$  representa las cantidades en la capa escondida. El vector de entrada dado por  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$  se aplica a la capa de entrada. Las unidades de entrada distribuyen estos valores a las unidades escondidas. Sin pérdida de generalidad, se asume que la activación del nodo es igual a la entrada de la capa, por lo tanto se tiene que la salida de la capa escondida es dada por  $x_i^T$ . El algoritmo de aprendizaje (es decir encontrar el conjunto de pesos adecuados) que se utilizó es una técnica denominada de descenso acelerado.

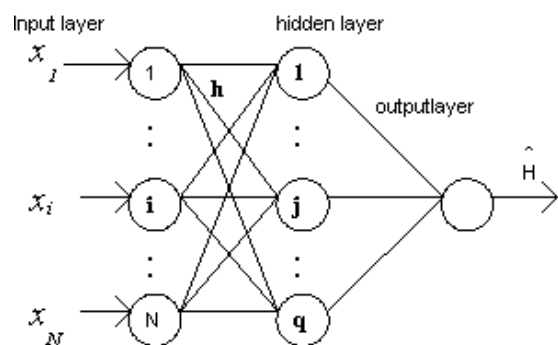


Fig. 3.1. Red Neuronal de tres capas.

El objetivo de utilizar MNN es minimizar el error de seguimiento dado por  $e = y_c - y_{ref}$  usando la técnica de descenso acelerado. De acuerdo a <sup>6(p.98)</sup> los pesos de la capa de salida pueden ser determinados por medio de

$$h(t + 1) = h(t) + \Delta h(t)$$

En particular, para una salida lineal, se tiene

$$h^o(t + 1) = h^o(t) + \zeta e x^T.$$

donde el factor positivo  $\zeta < 1$  es llamado el parámetro de razón de aprendizaje y el superíndice "o" se utiliza para definir los valores de salida. Entonces, se tiene que el gradiente de  $H$  está dado por

$$\frac{dH}{dT} = -\zeta e x^T$$

Ahora, considere el sistema lineal  $\sum_c$  controlado por la entrada  $u$  y teniendo como salida  $y_c$  donde los coeficientes de  $H$  son determinados mediante la ley de adaptación dada por  $\zeta e x^T$ , tal que el error de seguimiento  $e$  tienda a cero exponencialmente. El esquema general se muestra en la Fig. 3.2.

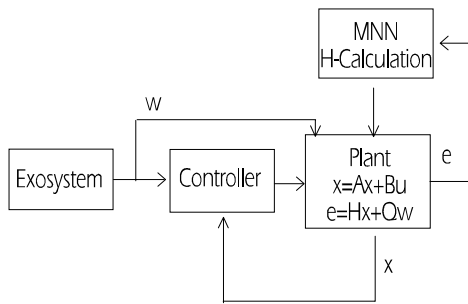


Fig. 3.2. Esquema General

El problema de regulación de salida con  $H$  determinada por la Red de tres capas (MNN) se establece mediante el siguiente lema.

**Lema 2** Considere el sistema

$$\sum_{cl} : \begin{cases} \dot{x} = (A + BK)x + BL\omega & H \in R^{m \times n} \\ \dot{\omega} = S\omega & S \in R^{m \times r} \\ e = Hx + Q\omega & Q \in R^{m \times r} \end{cases} ;$$

con ley de control  $u = Kx + L\omega$  y ley de adaptación dada por  $\dot{H} = \zeta e x^T$ , donde  $\zeta > 0$  es el parámetro de razón de aprendizaje de la red. Entonces el problema de regulación de salida mediante información total está resuelto si y sólo si las ecuaciones

$$\begin{cases} \Pi S = (A + BK)\Pi + BL \\ H\Pi + Q = 0 \end{cases}$$

tienen solución. Además, el error de seguimiento tiende a cero exponencialmente con una razón de convergencia dada por  $(a_o + \zeta \|x\|^2)$ .

**Prueba.** La primera parte del lema se demuestra en forma similar al lema 1. Solamente se probará aquí que el error de seguimiento tiende a cero exponencialmente. La dinámica del error de seguimiento está dada por

$$\dot{e} = \dot{H}x + H\dot{x} + Q\dot{\omega}$$

Usando la ley de adaptación  $\dot{H} = \zeta e x^T$ , la dinámica del error toma la forma

$$\dot{e} = -\zeta e x^T x + H(A + BK)x + HBL\omega + Q\dot{\omega}$$

Aplicando las mismas condiciones dadas en (1) del lema 1, se tiene que la dinámica del error de seguimiento está dada por

$$\dot{e} = -\zeta \|x\|^2 e - a_o(Hx + Q\omega) = -(a_o + \zeta \|x\|^2)e$$

Entonces el error de seguimiento tiende a cero exponencialmente con una razón de convergencia dada por  $(a_o + \zeta \|x\|^2)$ . Esto completa la prueba. ■

#### 4. RESULTADOS DE SIMULACIÓN Y EXPERIMENTACIÓN

La aproximación lineal de  $\sum_p$  alrededor del punto de equilibrio  $x_o$  está representada por

$$\sum_L \dot{x} = Ax + Bu$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3m_2g}{4m_1 + m_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3gl(m_1 + m_2)}{l(4m_1 + m_2)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ \frac{-3}{l(4m_1 + m_2)} \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones  $\sum_L$  que describen al péndulo invertido fueron simuladas con los siguientes valores nominales

$$g = 9.8, l = 0.61, m_1 = 0.455, m_2 = 0.210$$

El valor del parámetro  $\zeta$  utilizado en la ley de adaptación fue de 0.005. Los valores iniciales de los pesos se fijaron a 0.5. Las simulaciones se desarrollaron con Matlab <sup>®</sup>. La razón de aprendizaje de la MNN se muestra en 4.1. Se puede observar como la red MNN se entrena hasta que el error se reduce a un valor menor de 0.001. Las gráficas 4.2 a 4.5 muestran el comportamiento obtenido en simulación y experimentación del sistema en lazo cerrado. La Fig. 4.2 muestra la posición del ángulo  $\alpha$ , donde a pesar de mostrar unas oscilaciones al inicio, éstas se van haciendo más pequeñas hasta que alcanza el objetivo. El tiempo en que lo logra es menor a 4 segundos. La posición del carro y la velocidad lineal se muestra en las Fig. 4.3 y 4.4. respectivamente.

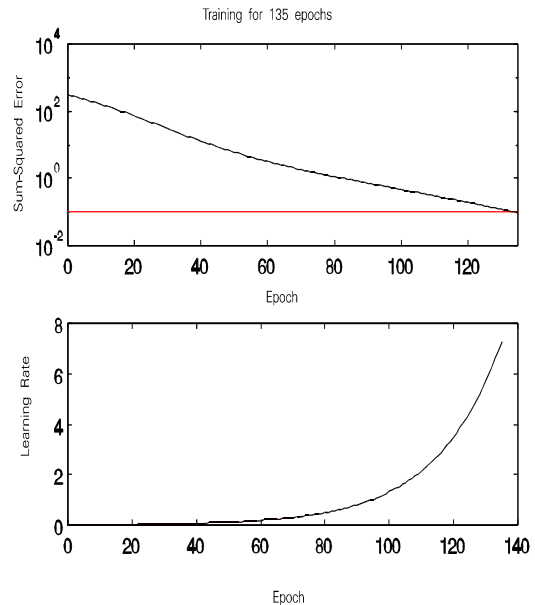


Fig. 4.1. Error y Razón de aprendizaje de MNN.

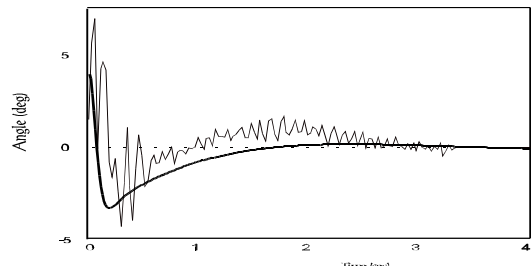


Fig. 4.2. Posición Angular

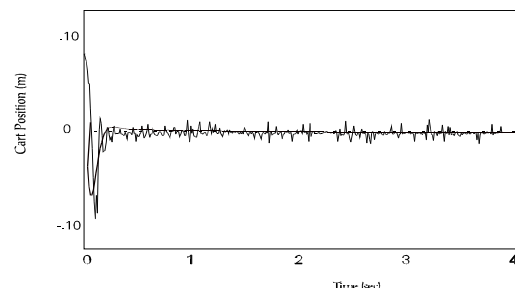


Fig. 4.3. Posición del carro

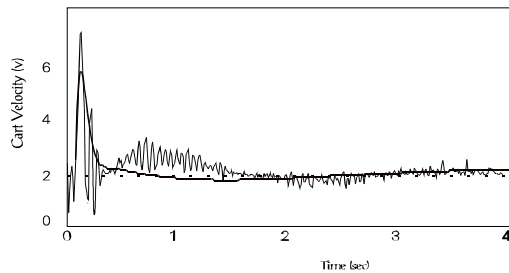


Fig. 4.4. Velocidad del carro

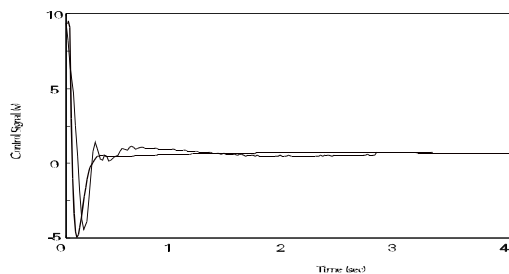


Fig. 4.5. Señal de Control

También se puede observar que las gráficas de simulación y experimentación son semejantes. El péndulo se mantiene cerca del cero durante los movimientos del carro hasta alcanzar la posición deseada. En la Fig. 4.3, la posición del carro se mantiene en su punto fijo mostrando pequeñas fluctuaciones, las que le permiten mantener en equilibrio al péndulo. La demanda de acción de control (voltaje) es aceptable de modo que no se tendrá una saturación del actuador.

## 5. CONCLUSIONES

Los resultados de simulación y experimentación obtenidos, vía un prototipo de laboratorio de un péndulo invertido, muestran que el uso de redes neuronales es una opción viable de control. Al aplicarse el control propuesto al péndulo invertido, este alcanza el punto de equilibrio deseado y se mantiene muy cerca de él. Los resultados muestran que el método utilizado además de ser simple, tiene

una gran aplicación ya que con la ayuda de técnicas lineales, la red neuronal puede resolver el problema de control de los sistemas mecánicos que tienen menos actuadores que grados de libertad. Como trabajo futuro se considerara la introducción de la fricción en la derivación del modelo.

## BIBLIOGRAFIA

1. A. Isidori, "Nonlinear Control Systems", Second Edition, Ed. Springer Verlag, N. Y., 1989.
2. H. Nijmeijer, and A. J. van der Shaft, "Nonlinear Dynamical Control Systems", Ed. Springer Verlag, N. Y., 1990.
3. B. Andréa-Novel, "Commande non linéaire des robots", Thesis, Traité des Noveulles Technologies. série Automaitique, 1988.
4. R. Mariano, P. Tomei, "Nonlinear Control Design", Ed Prentice Hall, 1995.
5. L. Jin, P. N. Nikiforuk, M. M. Gupta, "Direct adaptive output tracking control using multilayered neural networks, IEEE Proceedings, Nov. 1993, pp. 393-398.
6. J. A. Freeman, D. M. Skapura, "Neural Networks: Algorithms, Applications and Programming Techniques". Ed. Addison Wesley, 1992.
7. Knoblauch, Isidori, Flockerzi, "Topics in Control Theory". Ed. Birkhauser.
8. Hauser, Sastry, Kokotovic, "Nonlinear Control Via Aproximate Input-Output Linearization: The Ball and Beam Example" IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 37, No. 3, March 1992.
9. H. Iordanou, B. Surgenor, "Experimental Evaluation of the robustness of Discrete Sliding Mode Versus Linear Quadratic Control", IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 5, No. 2, March 1997.