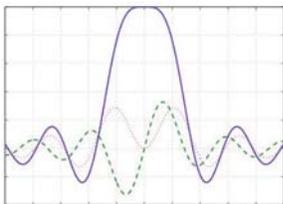


Diferenciadores máximamente lisos mediante descomposición de Taylor por mínimos cuadrados ponderados

José Antonio De la O Serna, Miguel Ángel Platas-Garza
Doctorado en Ingeniería Eléctrica, FIME-UANL
jdela@ieee.org , miguel.platas@gmail.com



RESUMEN

Se propone un método para estimar las derivadas instantáneas de una señal mediante una aproximación por mínimos cuadrados ponderados (WLS) del modelo de señal de Taylor (WLST), utilizando las ventanas clásicas como factores de ponderación. La aplicación sucesiva de la aproximación WLST conduce a un banco de filtros cuyas respuestas en frecuencia se aproximan al conjunto de ganancias de diferenciadores ideales en la banda base, produciendo diferenciadores máximamente lisos en dicha banda. Se diseñaron bancos de estos diferenciadores con las ventanas Rectangular, Kaiser y Hamming, y se ilustran sus respuestas al impulso y en frecuencia. Debido a la fuerte simetría del modelo de señal, este método logra bancos de filtros de fase lineal con idéntico retraso para todas las derivadas estimadas, lo que los hace idóneos para aplicaciones donde se desean estimaciones sincronizadas.

PALABRAS CLAVE

Diferenciadores digitales, filtros de fase lineal, diferenciadores máximamente lisos, expansión de Taylor, mínimos cuadrados, expansión biortogonal, ventanas, interpolación digital.

ABSTRACT

A method for instantaneous derivative estimation of a signal, obtained using the wighted least square (WLS) approximation of a Taylor (WLST) signal model, using classical windows as weighting factors is proposed. The successive application of the WLST approximation leads to a filter bank whose frequency responses approach the set of ideal differentiator gains on the baseband, providing maximally flat differentiators on that band. Examples of these differentiator banks are designed with the Rectangular, Kaiser and Hamming windows, and their frequency and impulse responses are illustrated. Due to the strong symmetry of the signal model, this method achieves linear phase filter banks with equal delay for all the derivative estimates, which are very useful in applications where synchronized derivative signals are desired.

KEYWORDS

Digital differentiator, linear phase filter, maximally flat differentiator, Taylor expansion, least squares, biorthogonal expansion, windows, interpolation.

INTRODUCCIÓN

Los diferenciadores digitales son muy útiles en muchas aplicaciones. Las estimaciones de derivadas se necesitan para controlar o monitorear sistemas dinámicos. Uno de los métodos más conocidos de diseño de diferenciadores es el error relativo minimax¹ basado en la aproximación de Chebyshev² a la ganancia diferenciadora ideal. Se obtiene un filtro de respuesta impulsional finita (FIR) con el programa escrito por Parks y McClellan,³ implementando el criterio de Chebyshev con el algoritmo de intercambio de Remez⁴. Este método produce errores de aproximación oscilatorios. Su descripción completa se encuentra en la ref.⁵, Sec. 10.2.5.

La mayoría de los diferenciadores propuestos en la literatura aluden únicamente a la primera derivada. Los diferenciadores basados en métodos de diferencias finitas son bastante sensibles al ruido e incapaces de estimar con suficiente precisión las derivadas de alto orden. Esto explica por qué los derivadores digitales pasabajos máximamente lisos⁶ o equirizados^{7,8,9,10} han sido propuestos para estimar la primera derivada.

En contraste con el diseño de un único diferenciador, la metodología propuesta en este artículo (disponible en inglés)¹¹ permite diseñar bancos de diferenciadores FIR con ganancias máximamente lisas en la banda de paso y pequeñas ganancias en la de paro. El método se basa en la aproximación por mínimos cuadrados ponderados (WLS) de un modelo de señal de Taylor (WLST) a una señal dada en un corto período de tiempo. Las derivadas son estimadas en el centro del intervalo temporal. El banco diferenciador ofrece estimaciones sincronizadas de las derivadas de la señal en un vector de estados.

Las ganancias en la banda de paro se reducen utilizando ventanas clásicas para ponderar el error en la solución WLS. Se presentan los bancos de filtros obtenidos con las ventanas de Kaiser y Hamming. Este método no corresponde al método clásico de diseño de filtros FIR por inventaneo. En vez de solamente configurar la respuesta impulsional con la ventana correspondiente, la solución WLS también modifica la matriz de Gram. Se demuestra que el método WLST, ajusta simultáneamente las



Brook Taylor [1685-1731].

representaciones temporal y espectral del modelo de señal a las de la señal de entrada respectivamente, y con ello adapta las ganancias de sus derivadores a las respuestas en frecuencia de derivadores ideales junto a la frecuencia nula, produciendo filtros máximamente lisos en la banda base.

La ortogonalización inherente al método WLST logra interesantes estructuras simétricas en los dominios del tiempo y de la frecuencia. Al aproximar el espectro de la señal con un polinomio de Taylor de κ -ésimo orden en $\omega=0$, se produce el consecuente error máximamente liso. También aproxima las primeras κ derivadas del espectro de la ventana con los correspondientes polinomios de Taylor de κ -ésimo orden, (y con error máximamente liso) en $\omega=0$. Se demuestra que las respuestas en frecuencia del banco de diferenciadores se construyen con combinaciones lineales del espectro de la ventana y sus derivadas. Esto explica el ensanchamiento de la banda de paso y la reducción del nivel de lóbulos laterales cuando se aplica una ventana no rectangular. Debido a que los primeros κ términos de la serie de Taylor de las primeras derivadas del espectro de la ventana se ajustan exactamente, las respuestas en frecuencia del banco de filtros serán dadas por una sucesión de series de Taylor en las cuales cada polinomio de κ -ésimo orden tendrá únicamente un único término no nulo en $\omega=0$: el correspondiente a cada diferenciador ideal. El resto de la serie de Taylor será el residuo del polinomio de κ -ésimo orden, y por lo tanto será máximamente liso, como cualquier

residuo de Taylor. En consecuencia el banco de filtros contendrá una sucesión de diferenciadores máximamente lisos.¹²

En la ref.¹³ también se proponen filtros máximamente lisos pero ellos usan la fórmula de interpolación hacia atrás de Newton con el operador de diferencias hacia atrás. Este operador es utilizado ampliamente en análisis numérico pero es muy sensible al ruido. Otros diferenciadores obtenidos con mínimos cuadrados (LS) en la literatura son de banda completa y equirizada,^{8,9} los obtenidos con series de Taylor¹⁰ estiman las derivadas con aproximaciones de diferencias centrales, las cuales son esencialmente ecuaciones de diferencias finitas en las cuales cada estimación se obtiene en el centro del intervalo intermuestra.

Finalmente, los obtenidos en la ref.¹⁴ son filtros de respuesta impulsional infinita (IIR) sin retraso de grupo constante, tienen respuestas en magnitud lineales en bandas amplias, y sus ganancias regresan suavemente a cero en el segundo cuarto de la frecuencia de muestreo. Pero insistimos, todos estos métodos se refieren al diseño de un único diferenciador. El método WLST propuesto en este artículo fue desarrollado trabajando en la estimación del fasor dinámico (o envolvente compleja), para la cual se requieren filtros pasabanda.¹⁵ Un ejemplo de esta aplicación se ilustra al final.

Este trabajo se desarrolla como sigue: En la primera sección se formula el algoritmo WLS para una aproximación de Taylor usando ventanas clásicas como factores de ponderación, y se ilustran las respuestas impulsionales y en frecuencia obtenidas con la ventana rectangular y de Kaiser. Luego, se desarrolla el diseño del banco de filtros pasabajos en el caso continuo para probar que la solución WLS aproxima el modelo simultáneamente en el tiempo y en la frecuencia, y se explica porqué se obtienen diferenciadores máximamente lisos en la banda base. Finalmente, se ilustran las respuestas en frecuencia teóricas del banco de diferenciadores obtenidos con la ventana rectangular y de Hamming. El artículo ilustra las bellas estructuras simétricas generadas por la aproximación WLST. Para señales limitadas en banda con el espectro constreñido bajo las ganancias ideales de diferenciación, el procedimiento puede considerarse como una transformada digital de Taylor, pues el error de la aproximación en ese caso

sería nulo. También podría considerarse como un nuevo método de muestreo (de estados) en el que no sólo se obtienen muestras de la señal, sino también de sus derivadas instantáneas.

PRELIMINARES

Iniciamos asumiendo una señal de entrada limitada en banda $s(t)$ que pueda ser aproximada por un polinomio de Taylor de κ -ésimo orden:

$$s_{\kappa}(t) = s(0) + s'(0)t + s''(0)\frac{t^2}{2!} + \dots + s^{(\kappa)}(0)\frac{t^{\kappa}}{\kappa!}, \quad \text{en } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}, \quad (1)$$

junto a $t=0$. Si el modelo de señal de Taylor es lo suficientemente preciso en ese corto intervalo de tiempo, entonces la base de la expansión es casi completa, y por tanto es posible obtener estimados precisos de las derivadas en el centro del intervalo mediante el algoritmo LS.

La κ -ésima aproximación a la señal discreta y limitada en banda junto al centro del ℓ -ésimo intervalo de tiempo se escribe en la siguiente forma matricial:

$$\mathbf{s}_{\kappa,\ell} = \mathbf{B}_{\kappa}\boldsymbol{\sigma}_{\kappa,\ell} \quad (2)$$

o con más detalle:

$$\begin{pmatrix} s_{\kappa}(-N_h) \\ \vdots \\ s_{\kappa}(-n) \\ \vdots \\ s_{\kappa}(0) \\ \vdots \\ s_{\kappa}(n) \\ \vdots \\ s_{\kappa}(N_h) \end{pmatrix}_{\ell} = \begin{pmatrix} 1 & (-\frac{1}{2}) & \dots & (-\frac{1}{2})^{\kappa} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & (-\frac{n}{2N_h}) & \dots & (-\frac{n}{2N_h})^{\kappa} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & (\frac{n}{2N_h}) & \dots & (\frac{n}{2N_h})^{\kappa} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & (\frac{1}{2}) & \dots & (\frac{1}{2})^{\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_{\kappa} \end{pmatrix}_{\ell}. \quad (3)$$

Asumiremos que la señal fue muestreada a N muestras por intervalo de tiempo de tamaño T , con N impar de la forma $N=2N_h+1$, de manera que la muestra en $t=0$ sea incluida, ya que ahí el error de Taylor es nulo. Note que los elementos de la base

en \mathbf{B}_κ son de la forma $1, n, n^2, \dots, n^\kappa$, $n \in [-N_h, N_h]$, y no son ortogonales. Finalmente, los coeficientes σ_k se relacionan con las derivadas de la señal $\sigma_k = T^k s^{(k)}(0) / k!$, para $k=0, 1, \dots, \kappa$.

El error de Taylor para la κ -ésima aproximación es dado por:

$$\mathbf{e}_\kappa = \mathbf{s} - \mathbf{B}_\kappa \boldsymbol{\sigma}_\kappa \quad (4)$$

y los mejores estimados de $\boldsymbol{\sigma}_\kappa$, en el sentido de mínimos cuadrados, son:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_\kappa = (\mathbf{B}_\kappa^T \mathbf{B}_\kappa)^{-1} \mathbf{B}_\kappa^T \mathbf{s} \quad (5)$$

donde T es el operador matricial de transposición. Las ecuaciones normales en (5) ofrecen entonces la mejor aproximación de Taylor (LST) a la señal s . Si ésta se encuentra en el subespacio de la base, el error de aproximación es nulo, y por tanto en (5) expresa la transformada digital de Taylor (TDT) de la señal. La transformada inversa sería entonces expresada en (2).

Para un intervalo de tiempo dado, el error de Taylor puede reducirse incrementando el orden κ del polinomio aproximado. También es sabido que el error de Taylor es expansivo, es decir, crece hacia los extremos del intervalo. Por tanto una manera de reducirlo es atemperar las extremidades del intervalo con una ventana. De esta forma (4) se transforma en:

$$\mathbf{W} \mathbf{e}_\kappa = \mathbf{W} \mathbf{s} - \mathbf{W} \mathbf{B}_\kappa \boldsymbol{\sigma}_\kappa \quad (6)$$

donde:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & w_N \end{pmatrix} \quad (7)$$

La solución WLS de (6) será¹⁶ ahora:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\kappa WLS} = (\mathbf{B}_\kappa^T \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{B}_\kappa)^{-1} \mathbf{B}_\kappa^T \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{s} \quad (8)$$

Note en (8) que la solución WLS consiste en modificar tanto la base vectorial como la señal con los pesos en \mathbf{W} . Las ecs. (2) y (8) forman una expansión biortogonal, ya que los renglones de la pseudoinversa:

$$\mathbf{B}_{W, \kappa}^+ = (\mathbf{B}_\kappa^T \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{B}_\kappa)^{-1} \mathbf{B}_\kappa^T \mathbf{W}^T \mathbf{W} \quad (9)$$

son ortogonales a los vectores en \mathbf{B}_κ , formando un par de bases ortogonales.

La solución en (8) minimiza el siguiente criterio de error:

$$J_W = \mathbf{e}_\kappa^T \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{e}_\kappa \quad (10)$$

si y sólo si:

$$\mathbf{B}_\kappa^T \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{B}_\kappa > 0. \quad (11)$$

Pero si $\mathbf{W}^T \mathbf{W}$ es definida positiva, entonces la condición anterior se relaja a:

$$\mathbf{B}_\kappa^T \mathbf{B}_\kappa > 0. \quad (12)$$

Como sabemos de la ref.¹⁷ si una señal analítica es aproximada por un polinomio de Taylor de κ -ésimo orden, la aproximación es buena mientras esté dentro de una vecindad circundando al punto en el cual la señal es aproximada, en el cual los términos de bajo orden son dominantes. Por tanto, al dar más peso a los errores cercanos al centro, se pueden esperar mejores estimados de los coeficientes de bajo orden, debido a que son dominantes en el vecindario central. Y al descartar los errores en los extremos del intervalo, se pueden esperar peores estimados de los coeficientes de más alto orden, pero eso no importa porque éstos no están considerados en el modelo. Además, la mitigación del error expansivo en los extremos del intervalo temporal elimina las discontinuidades que provocan el alto nivel de lóbulos laterales en la respuesta en frecuencia.

Aun cuando en lo que sigue los pesos cuadráticos ω_n^2 en $\mathbf{W}^T \mathbf{W}$ son definidos por ventanas clásicas, es importante enfatizar que la solución en (8) no es la misma que el método tradicional de diseño de filtros de respuesta impulsional finita (FIR) mediante el uso de ventanas ref.⁵ p. 664. Si la matriz pseudoinversa $\mathbf{B}_\kappa^+ = (\mathbf{B}_\kappa^T \mathbf{B}_\kappa)^{-1} \mathbf{B}_\kappa^T$ contiene la respuesta impulsional de los filtros originales, los filtros enventaneados en⁵ serán dados por $\mathbf{B}_\kappa^+ \mathbf{W}^T \mathbf{W}$, la cual no corresponde a la de (8), ya que en esta solución la gramiana es también modificada por los pesos cuadráticos $(\mathbf{B}_\kappa^T \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{B}_\kappa)$.

Finalmente, con respecto a la carga computacional, note en (8) que la respuesta impulsional de los diferenciadores puede calcularse una sola vez en la matriz $(\kappa + 1) \times N$ $\mathbf{B}_{W, \kappa}^+$, la cual depende solamente del modelo de señal de Taylor y de la ventana aplicada, y puede quedar almacenada en memoria.

RESPUESTA EN FRECUENCIA DE LOS FILTROS

La respuesta en frecuencia de los filtros de estimación es muy útil para evaluar su comportamiento en términos del contenido de frecuencia de la señal, en particular su comportamiento ante el ruido.

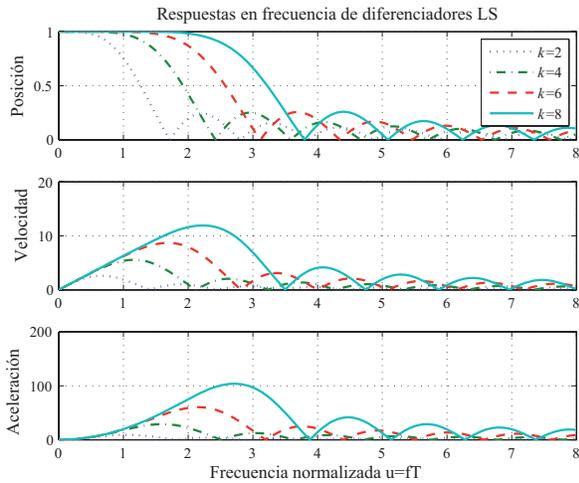


Fig. 1. Respuestas en frecuencia de diferenciadores obtenidos mediante LS con polinomios de Taylor de diferentes órdenes, $\kappa=2,4,6$ y 8 .

La figura 1 muestra las respuestas en frecuencia de los primeros tres diferenciadores obtenidos con el algoritmo LS, y órdenes progresivos de aproximación $\kappa=2,4,6$ y 8 . Note que las ganancias ideales de diferenciación son alcanzadas en la banda base, y que el ancho de banda aumenta con el orden de aproximación. Para un mismo diferenciador, los órdenes impares tienen la misma respuesta en frecuencia del orden precedente par, como será explicado en la próxima sección. Finalmente, note que la banda de paro de los filtros hereda el nivel de lóbulo lateral de la ventana rectangular. La idea de utilizar enventaneo en WLS es menguar las discontinuidades de los extremos de la ventana rectangular. Las respuestas en frecuencia cuando la ventana de Kaiser con $\alpha=8$ es aplicada para mitigar el error, se muestran en la figura 2. Se nota que la ventana reduce el nivel de lóbulos laterales, mientras preserva las ganancias ideales de diferenciación en la banda base, pero ensanchando la banda de transición como era de esperarse. La descomposición de Taylor de la señal será perfecta a condición de que su espectro se encuentre bajo las ganancias de diferenciación ideal.

La figura 3 ilustra las respuestas impulsionales de los diferenciadores de la figura 2. De acuerdo con (8), todas ellas son polinomios de Taylor de κ -ésimo orden enventaneados por factores cuadráticos de ponderación. El conjunto de respuestas impulsionales están en los renglones de la matriz pseudoinversa, y son ortonormales al conjunto de términos de Taylor

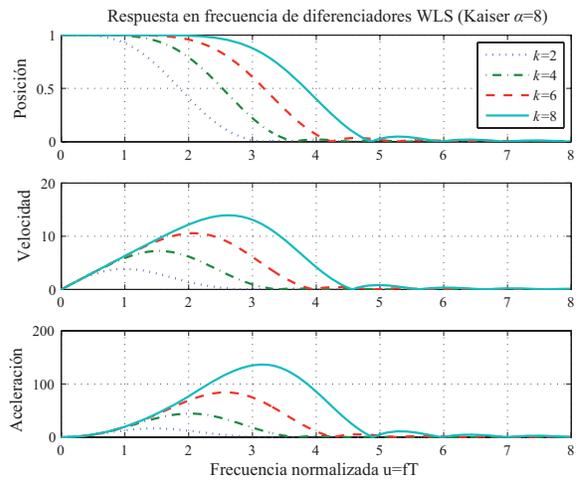


Fig. 2. Respuestas en frecuencia de diferenciadores WLS usando ventana de Kaiser ($\alpha=8$) con polinomios de Taylor de diferente orden, $\kappa=2,4,6$ y 8 .

de la base vectorial en \mathbf{B}_κ , y definen la base dual de la expansión de la señal. Note que al aumentar el orden κ del polinomio de Taylor, las respuestas impulsionales se contraen en concordancia con la dilatación espectral de las correspondientes respuestas en frecuencia. La ventana también contribuye con este efecto contractivo de κ .

Diferenciadores máximamente lisos

Los anteriores resultados merecen una explicación. ¿Por qué la aproximación WLS del modelo de Señal de Taylor logra estructuras espectrales tan interesantes como las ilustradas en la sección precedente? Una

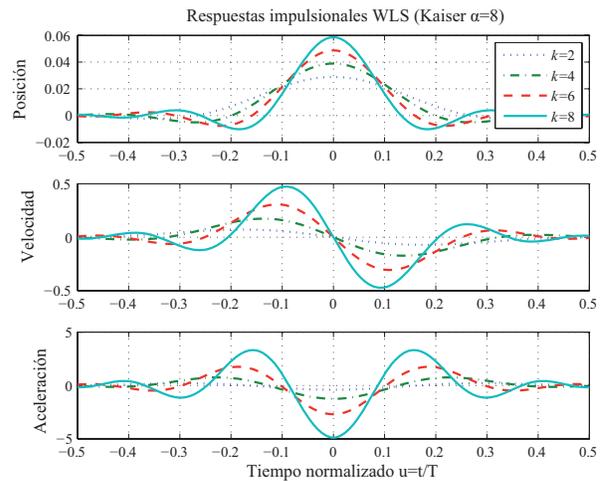


Fig. 3. Respuestas impulsionales WLS usando ventana de Kaiser ($\alpha=8$) para diferentes órdenes de polinomio de Taylor, $\kappa=2,4,6$ y 8 .

propiedad interesante del algoritmo WLST es que la aproximación a la función temporal corresponde a una aproximación de Taylor a su espectro. Este resultado es bien conocido¹⁸ en estimación espectral con modelos autoregresivos y de promedio móvil (ARMA) y es una consecuencia de la fórmula de Parseval.¹⁹ Un reciente artículo con muchas referencias puede encontrarse en la ref.²⁰ En lo que sigue, se presenta la prueba para nuestra aplicación determinística.

Aproximación WLST a la función temporal

Sea $f(t)$ una función del tiempo y $f_{\kappa}(t)$ su κ -ésimo polinomio de Taylor en $t=0$:

$$f_{\kappa}(t) = f(0) + f'(0)t + f''(0)\frac{t^2}{2!} + \dots + f^{(\kappa)}(0)\frac{t^{\kappa}}{\kappa!} \quad (13)$$

y sea $\omega(t)$ una ventana definida en el intervalo temporal $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$, el error de la aproximación inventaneada a la función temporal en ese intervalo será:

$$\omega(t)e_{\kappa}(t) = \omega(t)(f(t) - f_{\kappa}(t)) = f_{\omega}(t) - \omega(t)f_{\kappa}(t) \quad (14)$$

En notación vectorial se tiene:

$$\omega(t)f_{\kappa}(t) = \begin{bmatrix} \omega(t) & t\omega(t) & \dots & t^{\kappa}\omega(t) \end{bmatrix} \varphi(0) = T\varphi(0) \quad (15)$$

donde $\varphi(0) = [f(0) f'(0) f''(0)/2! \dots f^{(\kappa)}(0)/\kappa!]^T$. Consecuentemente las ecuaciones normales que conducen a la aproximación óptima WLS (14) serán dadas por:

$$T^T T \hat{\varphi}(0) = T^T f_{\omega} \quad (16)$$

Para cada renglón $r = 0, 1, \dots, \kappa$ tenemos:

$$\sum_{k=0}^{\kappa} \langle t^r \omega(t), t^k \omega(t) \rangle \frac{\hat{f}^{(k)}(0)}{k!} = \langle t^r \omega(t), \omega(t) f(t) \rangle \quad (17)$$

$$\text{o } \sum_{k=0}^{\kappa} \left(\frac{\hat{f}^{(k)}(0)}{k!} \int_{-T/2}^{T/2} t^{k+r} q(t) dt \right) = \int_{-T/2}^{T/2} t^r p(t) dt \quad (18)$$

donde $q(t) = |\omega(t)|^2$ y $p(t) = q(t)f(t)$. En forma matricial se tiene:

$$\begin{pmatrix} Q_0 & Q_1 & \dots & Q_{\kappa} \\ Q_1 & Q_2 & \dots & Q_{\kappa+1} \\ Q_2 & Q_3 & \dots & Q_{\kappa+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{\kappa} & Q_{\kappa+1} & \dots & Q_{2\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{f}(0) \\ \hat{f}'(0)/1! \\ \hat{f}''(0)/2! \\ \vdots \\ \hat{f}^{(\kappa)}(0) \\ \kappa! \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{\kappa} \end{pmatrix} \quad (19)$$

donde Q_{κ} y P_{κ} es el κ -ésimo momento de $q(t)$ y $p(t)$, respectivamente (ver Apéndice)²¹. Note que cada renglón del lado izquierdo de las ecuaciones normales en (19) corresponde al momento r del polinomio de Taylor estimado $\hat{p}_{\kappa}(t) = q(t)\hat{f}_{\kappa}(t)$ el cual se ajusta al r momento de $p(t)$ en el lado derecho. De manera que la condición ortogonal de la solución óptima requiere la igualación de hasta el momento κ de ambas funciones temporales. Esto es equivalente a la cancelación de los primeros κ momentos del error ponderado residual $q(t)\hat{e}_{\kappa}(t)$.

La matriz a la izquierda de (19) es una matriz Hankel, con líneas nulas intercaladas en las perpendiculares a la diagonal ya que los momentos impares de $q(t)$ son nulos; de manera que la matriz se define completamente con los puros elementos de su diagonal (momentos pares). Esta estructura simétrica explica porqué las respuestas en frecuencia de los diferenciadores cambian cada dos órdenes: los diferenciadores pares (impares) cambian cada orden κ par (impar), esto puede explicarse también por el hecho de que los términos impares de los polinomios de Taylor son ortogonales a los pares.

En lo que sigue, mostramos que el ajuste de momentos en el dominio del tiempo es equivalente al ajuste de las derivadas del lado espectral en $\omega=0$. Además la igualación de las primeras κ derivadas espectrales a su vez corresponde a la aproximación de un polinomio de Taylor de orden κ al espectro de la función inventaneada $P(\omega)$ en $\omega=0$, con error máximamente liso junto a ese punto.

Error espectral máximamente liso

Teorema 4.1 Sea $\hat{E}_{\kappa}(\omega) = P(\omega) - \hat{P}_{\kappa}(\omega)$ el error espectral de la aproximación WLST obtenida de (19). Sostenemos que $\hat{E}_{\kappa}(\omega)$ es máximamente liso junto a $\omega=0$.

Prueba. Sea $p(t) = q(t)f(t)$ la función ponderada y $\hat{p}_{\kappa} = q(t)f_{\kappa}(t)$ el estimado ponderado del κ -ésimo polinomio de Taylor. Sus transformadas de Fourier son: $P(\omega)$ y

$$\hat{P}_{\kappa}(\omega) = \sum_{k=0}^{\kappa} \frac{\hat{f}^{(k)}(0)}{k!} \int_R t^k q(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=0}^{\kappa} \frac{\hat{f}^{(k)}(0)}{k!} j^{(k)} Q^{(k)}(\omega). \quad (20)$$

Necesitamos demostrar que:

$$\hat{E}_\kappa^{(r)}(\omega) = P^{(r)}(\omega) - \hat{P}_\kappa^{(r)}(\omega) = 0 \quad r = 0, \dots, \kappa \quad (21)$$

en $\omega=0$. La derivada r con respecto a ω de $P(\omega)$ es:

$$P^{(r)}(\omega) = (-j)^r \int_{-\infty}^{\infty} t^r p(t) e^{-j\omega t} dt \quad (22)$$

y la de $\hat{P}_\kappa^{(r)}(\omega)$ es:

$$\hat{P}_\kappa^{(r)}(\omega) = \sum_{k=0}^{\kappa} \frac{\hat{f}^{(k)}(0)}{k!} j^k Q^{(k+r)}(\omega). \quad (23)$$

En $\omega=0$, usando (36) del Apéndice, tenemos:

$$P^{(r)}(0) = (-j)^r \mathcal{P}_r \quad (24)$$

y

$$\hat{P}_\kappa^{(r)}(0) = (-j)^r \sum_{k=0}^{\kappa} \frac{\hat{f}^{(k)}(0)}{k!} Q_{k+r} \quad (25)$$

Finalmente, sustituyendo (24) y (25) en (21) obtenemos las ecuaciones normales en (19).

Así que, de acuerdo con (21), la aproximación WLST en $t=0$ corresponde a una aproximación sencilla de Taylor al espectro de la señal $P(\omega)$ en ω , con el correspondiente error máximamente liso de toda aproximación de Taylor. La cancelación de las derivadas espectrales del error en $\omega=0$ significa que las bajas frecuencias se han excluido del error espectral, por lo que la aproximación WLST procesa el error como un filtro pasa altas. Mientras más términos de Taylor se incluyan en el subespacio, la banda de exclusión se hace más ancha. En las próximas subsecciones, mostraremos que el método WLST puede ser considerado como un banco de filtros compuestos por diferenciadores con respuestas en frecuencia cercanas a la de los diferenciadores ideales junto a $\omega=0$. El error de la aproximación espectral será de nuevo máximamente liso en ese punto en todos los diferenciadores.

Aproximaciones simultáneas de Taylor a las derivadas del espectro de la ventana

Ahora consideramos la solución sucesiva de las ecuaciones normales cuando la función temporal se traslada $f(t+\tau)$ sobre el intervalo de tiempo. Esto corresponde a estimaciones instantáneas centradas en el instante τ . Esta suposición conduce a considerar las estimaciones WLST sucesivas como la salida de un banco de filtros. La respuesta en frecuencia de sus filtros, cuyas respuestas impulsionales están en la matriz pseudoinversa, puede encontrarse aplicando

al proceso de estimación traslaciones de la señal de entrada $f(t) = e^{j\omega t}$.

Proposición: La aproximación WLST consecutiva a una señal temporal aproxima un polinomio de Taylor de orden κ a cada una de las primeras κ derivadas del conjugado complejo del espectro de la ventana de ponderación $\bar{Q}^{(r)}(\omega), r = 0, \dots, \kappa$.

Prueba. La respuesta en frecuencia de los elementos a la derecha de las ecuaciones normales $T^T f_\omega$ en (16) pueden obtenerse en cualquier instante τ como:

$$\mathcal{P}_r(\tau) = \int_{-T/2}^{T/2} t^r q(t) f(t + \tau) dt, r = 0, 1, \dots, \kappa. \quad (26)$$

Tomando en cuenta que $q(t) \xleftrightarrow{F} Q(\omega)$, tenemos

$$\mathcal{P}_r(\tau) = (-j)^r \bar{Q}^{(r)}(\omega) e^{j\omega \tau} \quad (27)$$

y entonces el vector con las correspondientes respuestas en frecuencia es dado por:

$$\mathcal{P}(\omega) = \begin{pmatrix} \bar{Q}(\omega) \\ (-j) \bar{Q}'(\omega) \\ (-j)^2 \bar{Q}''(\omega) \\ \vdots \\ (-j)^\kappa \bar{Q}^{(\kappa)}(\omega) \end{pmatrix} \quad (28)$$

Las funciones de transferencia a la izquierda de las ecuaciones normales $(T^T T) \hat{\phi}(t)$ en (16) son:

$$\mathcal{P}_\kappa(\omega) = \begin{pmatrix} Q_0 & Q_1 & Q_2 & \dots & Q_\kappa \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & \dots & Q_{\kappa+1} \\ Q_2 & Q_3 & Q_4 & \dots & Q_{\kappa+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_\kappa & Q_{\kappa+1} & Q_{\kappa+2} & \dots & Q_{2\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ j\omega \\ \frac{(j\omega)^2}{2!} \\ \vdots \\ \frac{(j\omega)^\kappa}{\kappa!} \end{pmatrix} \quad (29)$$

Entonces, igualando ambos lados de las ecuaciones normales se tiene:

$$\mathcal{P}(\omega) = \mathcal{P}_\kappa(\omega) \quad (30)$$

Extrayendo los factores escalares imaginarios del lado izquierdo, puede verse que cada elemento r del lado derecho corresponde a un polinomio de Taylor de orden κ en $\omega=0$ de la función espectral aislada a la izquierda $\bar{Q}^{(r)}(\omega)$ (ver Apéndice).

Definiendo el vector $\mathcal{R}_\kappa(\omega)$ con los correspondientes residuos de $\mathcal{P}_\kappa(\omega)$ tenemos:

$$\mathcal{P}(\omega) = \mathcal{P}_\kappa(\omega) + \mathcal{R}_\kappa(\omega). \quad (31)$$

Esta expresión muestra claramente que la

condición impuesta por las ecuaciones normales a la solución óptima en (30) consiste simplemente en descartar los residuos de Taylor $\mathcal{R}_\kappa(\omega)$ en (31). Consecuentemente, los elementos de los residuos son otra vez máximamente lisos $\omega=0$.

Diferenciadores máximamente lisos

Teorema. Las respuestas en frecuencia del banco de filtros resultante de la aproximación WLST corresponden a diferenciadores máximamente lisos con ganancias ideales junto a $\omega=0$.

Prueba. La salida del banco de filtros de la aproximación WLS de Taylor es:

$$\hat{\phi}(\tau) = (\mathcal{T}^T \mathcal{T})^{-1} \mathcal{T}^T f_\omega(\tau), \tag{32}$$

por lo que las respuestas en frecuencia de los filtros del banco serán:

$$\mathcal{H}(\omega) = (\mathcal{T}^T \mathcal{T})^{-1} \mathcal{P}(\omega) = \begin{pmatrix} 1 \\ j\omega \\ \frac{(j\omega)^2}{2!} \\ \vdots \\ \frac{(j\omega)^\kappa}{\kappa!} \end{pmatrix} + (\mathcal{T}^T \mathcal{T})^{-1} \mathcal{R}_\kappa(\omega) \tag{33}$$

que corresponde a una serie de ganancias de diferenciador ideal más una combinación lineal de los residuos de Taylor en (31). Sabemos (31) que todos estos residuos son máximamente lisos junto a $\omega=0$, de manera que cualquier combinación lineal, como la de la parte derecha de (33), heredará dicha propiedad. Por tanto, el banco de filtros contiene diferenciadores máximamente lisos¹² junto a $\omega=0$.

Note en (33) que las funciones de transferencia del banco de filtros se construyen con combinaciones lineales de las derivadas del espectro de la ventana en $\mathcal{P}(\omega)$ (28). Las ganancias ideales resultan de los términos de los polinomios de Taylor en $\mathcal{P}_\kappa(\omega)$ que satisfacen las ecuaciones normales, y las diferencias de sus residuos, que son máximamente lisos en la frecuencia nula. Cada filtro tiene entonces una respuesta en frecuencia muy cercana al diferenciador correspondiente ideal junto a $\omega=0$ (donde el residuo es máximamente liso). La inversa de la matriz de Gram en (29) hereda el intercalamiento de líneas con ceros en las perpendiculares a la diagonal. Es por eso que las combinaciones lineales de diferenciadores de

orden par (impar) contienen únicamente derivadas pares (impares) del espectro de la ventana, resultando en funciones de transferencia reales (imaginarias), con la consecuente alternancia de respuestas impulsionales simétricas (antisimétricas) para órdenes pares (impares), ver figuras 1, 2, y 3.

De acuerdo con (33), cada función de transferencia se puede separar en dos términos: un filtro con la ganancia diferenciadora ideal en toda la banda de frecuencia angular y un filtro pasa altas, formado con la combinación lineal de los residuos de Taylor. Entonces, los estimados serán también de la forma:

$$\hat{\phi}^{(k)}(\tau) = \frac{f^{(k)}(\tau)}{k!} + r_k(\tau) * f(\tau) \tag{34}$$

donde $r_k(t)$ es la respuesta impulsional de la combinación lineal de los residuos de Taylor en el κ -ésimo renglón. Si el espectro de $f(t)$ está limitado en banda y su espectro está bajo la ganancia nula (lisamente nula) del filtro pasaalts, el error será muy pequeño y las estimaciones serán mediciones de las derivadas. Por el contrario, si el espectro de la señal sobrepasa la banda de ganancia nula, las estimaciones contendrán un error apreciable.

Ventana rectangular

La ventana implícita de la solución LS es la ventana rectangular. La figura 4 ilustra las respuestas en frecuencia de los filtros obtenidos con la ventana rectangular. Note que en la banda base $|u| < 0.3$ las ganancias son constantes, lineales y cuadráticas, correspondientes a las ganancias ideales de los

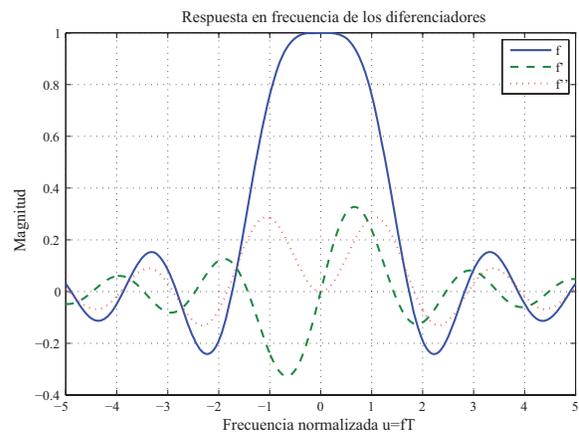


Fig. 4. Respuestas en frecuencia de diferenciadores obtenidos con la ventana rectangular: orden cero (línea continua), primera (línea punteada), y segunda (línea punteada delgada).

primeros tres diferenciadores. Si el espectro de la señal de entrada está bajo las ganancias ideales, los errores serán insignificantes, lo que a su vez significa que el segmento de señal es lo suficientemente liso como para ser aproximado con bastante precisión por un polinomio de Taylor de segundo orden. De manera que escogiendo el tamaño del intervalo y la frecuencia de muestreo es posible hacer que dicha condición se cumpla.

Ventana de Hamming

Las respuestas en frecuencia de los filtros obtenidos por la solución WLST con la ventana de Hamming se ilustran en la figura 5. Note que se obtienen lóbulos laterales más pequeños y una banda de paso más amplia.

Finalmente, la diferencia en ganancia ($R(u)$) entre la respuesta en frecuencia $D(u)$ del filtro logrado y la del diferenciador ideal unitario ($P_0(u)=1$) y lineal ($P_1(u)=2\pi u$) se ilustran en la figura 6 para las ventanas Rectangular y de Hamming. Note que ambas diferencias corresponden a formas típicas del residuo de Lagrange de la aproximación de Taylor, indicando intervalos de máxima suavidad junto a $\omega=0$. Es notorio que corresponden a filtros pasa altas.

EJEMPLOS

Un caso de estimación de derivadas instantáneas y la consecuente reconstrucción de señal por

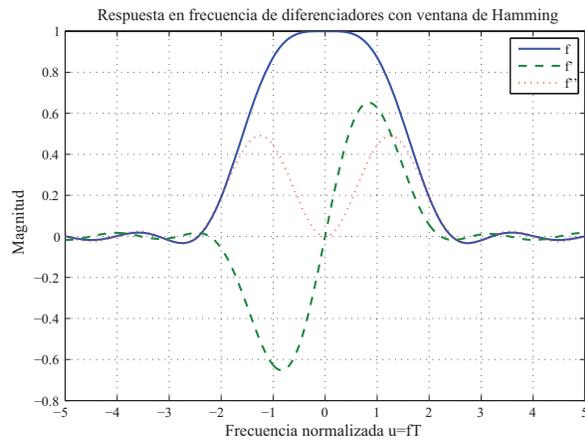


Fig. 5. Respuestas en frecuencia de diferenciadores obtenidos con la ventana de Hamming: orden cero (línea continua), primera (línea punteada), y segunda (línea punteada delgada).

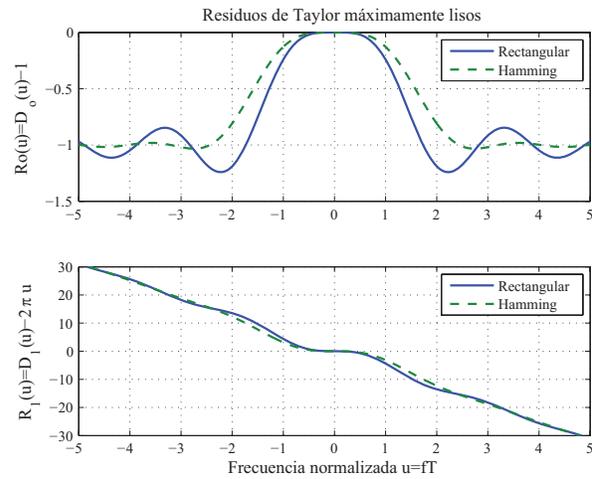


Fig. 6. Residuos de Taylor de los primeros dos diferenciadores (0 y 1) obtenidos con las ventanas Rectangular y de Hamming.

interpolación con dichos estimados se muestra en la figura 7. En la primera figura, se obtienen estimados (LS, $\kappa=3$) de la señal $s(t)=1-e^{-t/2}\cos(t)$ y sus dos primeras derivadas en cada muestra, deslizándose la ventana muestra a muestra. Los estimados se muestran en líneas punteadas para ver qué tan cerca están de los valores teóricos de las líneas continuas. En la gráfica de abajo se muestran la señal y su reconstrucción (línea punteada). La interpolación se hace sobre intervalos unitarios con las estimaciones tomadas en el centro. Las estimaciones ilustradas se obtienen con los métodos LS y WLS (Kaiser, $\alpha=8$) para $\kappa=3$.

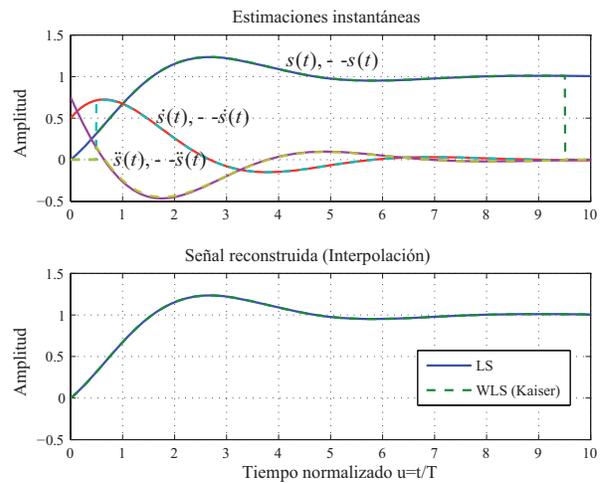


Fig. 7. Arriba, las derivadas de la señal $s(t) = 1 - e^{-t/2}\cos(t)$, y sus estimaciones; y abajo, la señal reconstruida por interpolación con estimaciones LS y WLS tomadas al centro de cada intervalo unitario.

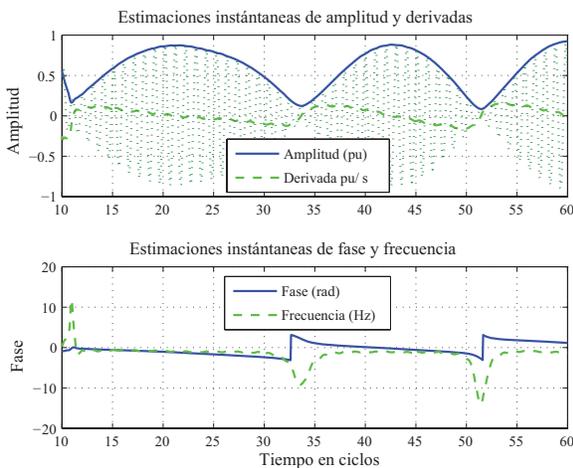


Fig. 8. Arriba, las estimaciones instantáneas de la amplitud (línea continua) y su derivada (línea punteada) de la señal de corriente (punteada) de un sistema de potencia de Hz bajo condiciones de oscilación. Al fondo, las estimaciones de su fase (línea continua) y frecuencia instantánea (línea punteada).

Otro caso es tomado con señales de campo. La figura 8 ilustra una señal de corriente de una oscilación de potencia correspondiente a una perturbación de un sistema eléctrico de 50Hz. La señal, muestreada a 20 muestras por ciclo, se presenta mediante la línea punteada en la gráfica de arriba. En ésta también se ilustran estimaciones instantáneas de la amplitud (línea continua) y su derivada (línea punteada) obtenidas con filtros de dos ciclos, formados con la ventana rectangular; y en la gráfica de abajo, su fase (línea continua) y frecuencia instantánea (línea punteada), con respecto a 50Hz. En este caso las respuestas en frecuencia del banco de diferenciadores se trasladaron a la frecuencia fundamental (formando filtros pasa banda).¹⁵ Note que estos estimados son suficientemente buenos a pesar de que la desviación frecuencial es grande, sobretodo en los intervalos de baja amplitud (± 10) Hz. Las estimaciones de frecuencia (derivada de la fase) suaves, como las logradas con este método son raras. Normalmente, las estimaciones de frecuencia se obtienen a partir de las de fase, usando ecuaciones de diferencias finitas con ruido perceptible.

En ambos ejemplos, la aproximación de Taylor es muy buena. Note que en ambos casos los segmentos de señal bajo la ventana deslizante son lo suficientemente lisos como para ser sustituidos con alta precisión por un polinomio de Taylor de bajo orden en cada posición de la ventana.

Tales segmentos están entonces contenidos en el subespacio de Taylor, y consecuentemente el error cuadrático de la aproximación WLS es muy pequeño. Entre más suaves sean los segmentos de señal, mejor serán sus estimados. El error se eleva cuando hay discontinuidades o transitorios en el intervalo de observación. En este caso, el espectro de señal se ensancha sobrepasando la banda frecuencial con las ganancias máximamente lisas.

CONCLUSIONES

Se presentó un método general para el diseño de diferenciadores máximamente lisos, el cual resulta de la aproximación WLS de un modelo de señal de Taylor. El método WLST aproxima simultáneamente las representaciones temporal y frecuencial de la señal eventaneada. También aproxima las funciones de transferencia de los diferenciadores ideales con funciones máximamente suaves en la banda de paso. Las estimaciones de las derivadas son muy buenas (mediciones), a condición de que el espectro de la señal de entrada caiga bajo las ganancias de diferenciación ideales. Además, la sensibilidad al ruido fuera de banda se reduce significativamente eventaneando el error de aproximación. El método estima a la vez las primeras derivadas, con un banco de filtros FIR, con retraso de grupo constante, ofreciendo estimaciones instantáneas sincronizadas.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Universidad Autónoma de Nuevo León por su apoyo económico a través del proyecto PAICYT IT-257-2009: Comparación del observador con diferenciadores máximamente lisos con los observadores clásicos.

APÉNDICE

La expansión de Taylor de la respuesta en frecuencia $Q(\omega)$ junto a $\omega=0$ es dada por:

$$Q_{\kappa}(\omega) = Q(0) + Q'(0)\omega + Q''(0)\frac{\omega^2}{2!} + \dots + Q^{(\kappa)}(0)\frac{\omega^{\kappa}}{\kappa!} \quad (35)$$

Para $k=0,1,\dots,\kappa$ y $Q(\omega)$ se tiene:

$$Q^{(k)}(0) = (-j)^k Q_{\kappa}, \quad (36)$$

donde Q_{κ} es el κ -ésimo momento de $q(t)$:

$$Q_{\kappa} = \int_{-\infty}^{\infty} (t^{\kappa} q(t)) dt. \quad (37)$$

Entonces, en términos de los momentos de $q(t)$, también tenemos:

$$Q_{\kappa}(\omega) = Q_0 + Q_1(-j\omega) + Q_2 \frac{(-j\omega)^2}{2!} + \dots + Q_{\kappa} \frac{(-j\omega)^{\kappa}}{\kappa!}, \quad (38)$$

y por lo tanto:

$$\bar{Q}_{\kappa}(\omega) = Q_0 + Q_1(j\omega) + Q_2 \frac{(j\omega)^2}{2!} + \dots + Q_{\kappa} \frac{(j\omega)^{\kappa}}{\kappa!}. \quad (39)$$

El error de Taylor (o residuo) es:

$$E_{\kappa}(\omega) = Q(\omega) - \bar{Q}_{\kappa}(\omega) \quad (40)$$

el cual es máximamente liso junto a $\omega=0$, es decir, sus primeras κ derivadas son nulas en $\omega=0$.

REFERENCIAS

1. L.R. Rabiner and R. W. Schaefer. On the behavior of minimax relative error FIR digital differentiators. *Bell Syst. Tech. J.*, 53:pp 363–394, February 1974.
2. T. W. Parks and J. H. McClellan. Chebyshev approximation for nonrecursive digital filters with linear phase. 19:pp 189–194, March 1972.
3. T. W. Parks and J. H. McClellan. A program for the design of linear phase finite impulse response digital filters. 20:pp 195–199, August 1972.
4. L.R. Rabiner and J. H. T.W. McClellan Parks. FIR digital filter design techniques using weighted Chebyshev approximation. 63:pp 595–610, April 1975.
5. J. G. Proakis and D. G. Manolakis. *Digital Signal Processing*. Prentice Hall, New Jersey, fourth edition, 2007.
6. I.W. Selesnick. Maximally flat low-pass digital differentiators. 49(3):219–223, Mar. 2002. p. 219.
7. I. R. Khan and M. Okuda. Finite-impulse-response digital differentiators for midband frequencies based on maximal linearity constraints. 54(3):242–246, Mar. 2007. p. 243.
8. Y.D. Jou. Least-squares design of digital differentiators using neural networks with closed-form derivations. 12(11):760–763, Nov 2005. p. 760.
9. S. Sunder and R.P. Ramchandran. Design of equiripple nonrecursive digital differentiators and Hilbert transformers using a weighted leastsquares technique. 42(9):2504–2509, Sep 1994.
10. I.R. Khan, M. Okuda, and R. Ohba. Higher degree FIR digital differentiators based on Taylor series. *The 2004 47th Midwest Symposium on Circuits and Systems*, 2:57–60, Jul. 2004.
11. J. A. de la O and M. A. Platas. Maximally flat differentiators through wls taylor decomposition. *Elsevier, Digital Signal Process*, 21(2), March 2011.
12. S. Samadi, H. Iwakura, and A. Nishihara. Multiplierless and hierarchical structures for maximally flat half-band filters. 46(9):1225–1230, Sept. 1999. p. 1226.
13. S. Samadi, O. Ahmad, and M.N.S. Swamy. Complete characterization of systems for simultaneous lagrangian upsampling and fractional-sample delaying. 52(3):656–667, Mar. 2005. p. 658.
14. M. A. Al-Alaoui. Linear phase low-pass IIR digital differentiators. 2:697–706, Feb. 2007.
15. M. A. Platas and J. A. de la O. Dynamic phasor and frequency estimates through maximally flat differentiators. In Press. Also in 2008 IEEE PES General Meeting, Pittsburgh, July 2008.
16. D. C. Lay. *Linear Algebra and its Applications*. Adison Wesley, New York, 2006. Ch. 6.8.
17. Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2nd edition, 1996.
18. M. H. Hayes. *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*. Wiley, New Jersey, 1996. Ch. 4, Sections 7.2-4.
19. Martin Vetterli and Jelena Kovacevic. *Wavelets and subband coding*. Prentice Hall, New Jersey, fourth edition, 1995. p. 40.
20. M. Jachan, G. Matz, and F. Hlawatsch. Time-frequency arma models and parameter estimators for underspread nonstationary random process. 55(9):4366–4381, Sept. 2007.
21. A. Papoulis. *Signal Analysis*. McGraw Hill, New York, 1977. p 62.