

Estimación de la masa constitutiva de los quarks y de los hadrones usando un modelo de bolsa esférico para el confinamiento de quarks

J. Rubén Morones Ibarra
Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
rubenmorones@yahoo.com.mx

RESUMEN

En este artículo se resuelve de forma exacta el problema de una partícula relativista de Dirac cuando se encuentra en un campo de fuerzas centrales. Como aplicación especial, se trata el problema de un pozo de potencial esférico como una simulación de la fuerza fuerte que confina a los quarks en el interior de los hadrones (MIT BAG MODEL). Las funciones de onda encontradas nos permiten determinar, con un buen grado de aproximación, la masa de los quarks y por consiguiente la de mesones y hadrones.

PALABRAS CLAVE

Quarks, cromodinámica cuántica, modelo de bolsa del MIT.

ABSTRACT

In this paper the Dirac equation is solved for the general case of a particle in a central potential. As a particular case the solutions for a spherical cavity are obtained and the MIT bag model is used to simulate the quark confinement. From the Dirac wave functions for the ground state the constitutive mass of quarks and hadrons are estimated.

KEYWORDS

Quarks, quantic, chromodynamics, MIT bag model.

INTRODUCCIÓN

En la naturaleza existen cuatro interacciones fundamentales: la gravitacional, la electromagnética, y las interacciones nucleares fuerte y débil. Estas interacciones permiten clasificar a las partículas en dos grandes grupos, que son los hadrones y los leptones. Las partículas que son sensibles a la fuerza fuerte se conocen como hadrones y a ellas pertenecen el protón, el neutrón el pion y muchas otras más. Ningún hadrón es una partícula elemental. Como veremos, los hadrones, están formadas por quarks que son partículas consideradas elementales hasta el momento actual. El otro tipo de partículas son los leptones, que no sienten la fuerza fuerte. A esta última categoría pertenecen el electrón, el muón, el neutrino

y el tauón. En este artículo trataremos sólo de los hadrones y los quarks.

Los antecedentes de esta clasificación de las partículas “elementales” como son usualmente llamados también los hadrones, aun cuando no sean elementales, los encontramos en el año de 1961 cuando de forma independiente los físicos Murray Gell-Mann y Ne’emann encontraron ciertas regularidades en las partículas elementales que permitían poner algo de orden en la gran cantidad de partículas que se descubrían en los aceleradores. Estas regularidades encajaban muy bien en la estructura del grupo de simetría SU(3) (grupo unitario espacial). Con esto se inició la búsqueda de algo más profundo que justificara estas coincidencias entre el grupo de simetría SU(3) y el conjunto de partículas descubiertas que parecían seguir la misma historia de la Tabla Periódica de los Elementos propuesta por Mendeleiev.

Después del descubrimiento del núcleo atómico y posteriormente del protón y del neutrón, los físicos creyeron que estas dos últimas partículas junto con el electrón, eran las estructuras fundamentales de la materia. Sin embargo, al finalizar la década de 1960 experimentos de dispersión electrón-nucleón realizados en Acelerador Lineal de Stanford California (SLAC) revelaron que los protones y los neutrones no son partículas fundamentales, sino que están formadas por otras partículas, a las que se les llamó inicialmente Partones. El físico Murray Gell-Mann, quien desarrollo el modelo para explicar la estructura de los hadrones, les dio el nombre de quarks, que es como se conocen actualmente.

Una serie de experimentos han confirmado el modelo de Gell-Mann de los quarks, donde se propone que los protones y neutrones están formados por tres de ellos. Debido a que ni los quarks ni los gluones han sido observados en libertad se presentan varios problemas para determinar sus características. La masa de los quarks, por ejemplo, tiene que determinarse de manera indirecta.

La teoría que describe las interacciones fuertes es la Cromodinámica Cuántica (CDC), cuya formulación matemática tiene un elevado grado de complejidad. Resulta prácticamente imposible resolver las ecuaciones de movimiento que se obtienen de su formulación lagrangiana. Es por ello que para obtener información física de los procesos que ocurren mediante esta interacción, se recurre a modelos matemáticos que contengan información relevante de la teoría fundamental. Entre las características básicas de la CDC encontramos la libertad asintótica y el confinamiento. Estas propiedades de la teoría implican que los quarks están confinados en alguna región y que por lo tanto no pueden ser observados libremente. La libertad asintótica establece que a muy altas energías (pequeñas distancias) la fuerza entre quarks se vuelve muy débil.

El modelo de bolsa del MIT propone que los quarks están encerrados en una esfera con ciertas características que mencionaremos más adelante. Este modelo incorpora dos de las características fundamentales de la CDC: la libertad asintótica y el confinamiento. Con este modelo es posible tratar a los quarks y los gluones como gases libres atrapados en una caja esférica.

Según el Modelo Estándar en teoría de partículas los mesones están formados por un par quark-antiquark.¹ y los bariones están formados por 3 quarks. Dado que los quarks son partículas de espín $\frac{1}{2}$, el tratamiento cuántico relativista que describe su dinámica consiste en resolver la ecuación de Dirac para un potencial propuesto.² Supondremos que los quarks están confinados en una cavidad esférica

de radio R y que en ella se mueven libremente. La forma matemática del potencial $V(r)$ está dada por:

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \infty & r > R \end{cases} \quad (1)$$

Esto corresponde físicamente a una esfera de radio de paredes impenetrables. Nos proponemos resolver la ecuación de Dirac para este potencial cuya forma es

$$H\psi = i\hbar\partial_t\psi \quad (2)$$

donde es el Hamiltoniano de Dirac, dado por: $H = c\alpha\mathbf{p} + \beta mc^2 + V(r)$, siendo α y β las matrices de Dirac que en bloques se escriben de la siguiente forma ³

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

donde las σ^i son las matrices de Pauli. El vector de onda ψ que satisface la ecuación (2) es el biespinor de cuatro componentes que se escribe en forma de matriz columna:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Puesto que el potencial $V(\mathbf{r})$ no depende del tiempo, entonces la solución es separable

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \quad (4)$$

y nuestro interés se centrará en hallar la solución de la ecuación

$$H\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (5)$$

Primera parte

Una de las características más importantes de la ecuación de Dirac es que sus soluciones son funciones de cuatro componentes, dos corresponden a partículas y dos a antipartículas.⁴ Cada par de componentes es un arreglo de los estados de espín para un valor de la energía. Para el problema de fuerzas centrales es necesario redefinir el operador $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$, donde \mathbf{L} y \mathbf{S} son los operadores de momentum angular y de espín, respectivamente, que nos permita obtener los valores propios de la energía, así como los del espín en el formalismo de la teoría de Dirac. Para esto se sugiere el operador

$$\mathbf{K} = \beta(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{L} + \hbar) \quad (1-6)$$

donde σ^i son las matrices de Pauli y β es la componente temporal de las matrices de Dirac. Puede verse que conmuta con \mathbf{J} y con el hamiltoniano H

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}, \mathbf{J}] &= [\beta(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{L}) + \beta\hbar, \mathbf{J}] = \beta[(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{L}), \mathbf{J}] \\ &= \frac{2}{\hbar} [\mathbf{J}, \mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2] = 0 \\ [H, \mathbf{K}] &= 0. \end{aligned}$$

Sus eigenvalores podemos determinarlos de la siguiente forma

$$\mathbf{K}^2 = \beta^2(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{L} + \hbar)^2 = 1_{4\times 4}[(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{L})^2 + 2\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{L} + \hbar^2].$$

Usando la fórmula

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L})^2 &= (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}) = \mathbf{L}^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{L}) \\ &= \mathbf{L}^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (i\mathbf{L}) = \mathbf{L}^2 - \hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}\end{aligned}\quad (2)$$

con este resultado

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^2 &= \mathbf{L}^2 + \hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + \frac{3}{4}\hbar^2 + \frac{1}{4}\hbar^2 \\ &= \mathbf{L}^2 + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S}^2 + \frac{1}{4}\hbar^2 \\ &= \mathbf{J}^2 + \frac{1}{4}\hbar^2\end{aligned}\quad (3)$$

Por medio de \mathbf{K} construiremos eigenfunciones simultáneas de H , \mathbf{J}^2 y J_3 , por supuesto, serán eigenfunciones de \mathbf{K} . La función de estado para este problema es el biespinor

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}\quad (4)$$

el cual satisface las ecuaciones de eigenvalores

$$\begin{aligned}H\psi &= E\psi \\ \mathbf{J}^2\psi &= j(j+1)\hbar^2\psi \\ J_3\psi &= j_3\hbar\psi\end{aligned}\quad (5)$$

Si escribimos

$$\mathbf{K}\psi = -\kappa\psi\quad (6)$$

$$\begin{aligned}\kappa^2 &= j(j+1) + \frac{1}{4} && \text{Si } \kappa > 0, \text{ el espín es antiparalelo a } \mathbf{J} \\ \Rightarrow \kappa &= \pm \left(j + \frac{1}{2} \right) && \text{Si } \kappa < 0, \text{ el espín es paralelo a } \mathbf{J}\end{aligned}$$

Matricialmente escribimos \mathbf{K} como

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + \hbar) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + \hbar & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} - \hbar \end{pmatrix}.$$

Cuando \mathbf{K} actúa sobre el biespinor ψ , obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{K}\psi &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + \hbar & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} - \hbar \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + \hbar)\psi_A \\ -(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + \hbar)\psi_B \end{pmatrix} = -\hbar\kappa\psi\end{aligned}$$

de aquí obtenemos las ecuaciones de eigenvalor

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + \hbar)\psi_A &= -\hbar\kappa\psi_A \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + \hbar)\psi_B &= \hbar\kappa\psi_B.\end{aligned}\quad (7)$$

Dado que el hamiltoniano conmuta con \mathbf{J} y \mathbf{K} , los espinores ψ_A y ψ_B corresponden a un estado de \mathbf{J}^2 , J_3

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^2\psi_{A,B} &= \hbar^2 j(j+1)\psi_{A,B} \\ J_3\psi_{A,B} &= \hbar m_j\psi_{A,B}\end{aligned}\quad (9)$$

pero \mathbf{L} no es constante del movimiento en la teoría de Dirac, ya que

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}, H] &= [\mathbf{r} \times \mathbf{p}, c\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2] \\ &= c[\mathbf{r} \times \mathbf{p}, \alpha \cdot \mathbf{p}] \\ &= c\epsilon^{ijk} \{ [r^j p^k, \alpha^l] p^l + \alpha^l [r^j p^k, p^l] \} \\ &= c\epsilon^{ijk} \{ -\alpha^l [p^l, r^j p^k] \} \\ &= i\hbar c \epsilon^{ijk} \alpha^l p^k = i\hbar c (\alpha \times \mathbf{p}) \end{aligned}$$

por consiguiente \mathbf{L}^2 no conmuta con H

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}^2, H] &= \mathbf{L} \cdot [\mathbf{L}, H] \\ &= i\hbar c \mathbf{L} \cdot (\alpha \times \mathbf{p}) \end{aligned}$$

Sabiendo que la función de onda que satisface la ecuación de Dirac es un bispinor, por lo que los operadores \mathbf{J}^2 y J_3 tienen cuatro componentes. En cambio es de dimensión dos. Veremos a continuación que ψ_A y ψ_B , son por separado, eigenfunciones de este operador

$$\mathbf{L}^2 \psi_A = \left(\mathbf{J}^2 - \hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} - \frac{3}{4} \hbar^2 \right) \psi_A$$

de la ecuación (7) se tiene que

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}) \psi_A = -\hbar(\kappa + 1) \psi_A$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2 \psi_A &= \left[j(j+1) + (\kappa+1) - \frac{3}{4} \right] \hbar^2 \psi_A \\ &= l_A(l_A+1) \hbar^2 \psi_A \\ &= \left(j^2 + j + \frac{1}{4} + \kappa \right) \hbar^2 \psi_A \end{aligned} \tag{10}$$

Para $\kappa = j + \frac{1}{2}$

$$= \left(j + \frac{1}{2} \right) \left(j + \frac{1}{2} + 1 \right) \hbar^2 \psi_A = l_A(l_A+1) \hbar^2 \psi_A$$

por lo tanto, los eigenvalores del operador \mathbf{L}^2 actuando sobre el espinor ψ_A son

$$l_A = j + \frac{1}{2}; \quad \text{con } \kappa = j + \frac{1}{2} \tag{11}$$

si tomamos $\kappa = j + \frac{1}{2}$ en (10)

$$l_A = j - \frac{1}{2}; \quad \text{con } \kappa = -\left(j + \frac{1}{2} \right) \tag{11a}$$

Realizando el mismo procedimiento los eigenvalores de \mathbf{L}^2 actuando sobre ψ_B son

$$l_B = j - \frac{1}{2} \quad \text{con } \kappa = j + \frac{1}{2} \tag{12}$$

$$l_B = j + \frac{1}{2} \quad \text{con } \kappa = -\left(j + \frac{1}{2} \right) \tag{12a}$$

Con estos resultados escribimos la parte angular de la función de onda de Dirac como una combinación de productos de funciones que contengan una parte angular orbital y una espinorial con j, l y m_j dados

$$Y_{j_l}^{m_j} = c_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} Y_l^{m_j - \frac{1}{2}} + c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} Y_l^{m_j + \frac{1}{2}} \quad (13)$$

donde los Y son los armónicos esféricos y l, l_{AB} . Estas funciones espinoriales esféricas deben ser también eigenfunciones de $\mathbf{J}^2, \mathbf{L}^2$ y J_3 , por lo que se propone un armónico esférico Y tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 Y_{j_l}^{j_3} &= \hbar^2 j(j+1) Y_{j_l}^{j_3} = \left(\mathbf{L} + \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\sigma} \right)^2 Y_{j_l}^{j_3} \\ \mathbf{L}^2 Y_{j_l}^{j_3} &= \hbar^2 l(l+1) Y_{j_l}^{j_3} \\ J_3 Y_{j_l}^{j_3} &= \hbar j_3 Y_{j_l}^{j_3}. \end{aligned}$$

La primera de estas ecuaciones se puede reescribir como

$$\mathbf{J}^2 Y_{j_l}^{j_3} - \left(\mathbf{L}^2 + \hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + \frac{1}{4} \hbar^2 \boldsymbol{\sigma}^2 \right) Y_{j_l}^{j_3}$$

de esta expresión podemos encontrar la forma en la que $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}$ actúa sobre

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}) Y_{j_l}^{j_3} &= \left(\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \frac{3}{4} \right) Y_{j_l}^{j_3} \\ &= \left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] \hbar Y_{j_l}^{j_3} \\ &= q \hbar Y_{j_l}^{j_3} \end{aligned}$$

con $q = j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}$, el eigenvalor de $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}$, el cual explícitamente se escribe como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} &= L_1 \sigma_1 + L_2 \sigma_2 + L_3 \sigma_3 \\ &= L_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + L_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + L_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L_3 & L_1 - iL_2 \\ L_1 + iL_2 & -L_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 Y_l^{j_3 - \frac{1}{2}} \\ c_1 Y_l^{j_3 + \frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \hbar q \begin{pmatrix} c_0 Y_l^{j_3 - \frac{1}{2}} \\ c_1 Y_l^{j_3 + \frac{1}{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} c_0 L_3 Y_l^{j_3 - \frac{1}{2}} + c_1 (L_1 - iL_2) Y_l^{j_3 + \frac{1}{2}} &= \hbar q c_0 Y_l^{j_3 - \frac{1}{2}} \\ -c_1 L_3 Y_l^{j_3 + \frac{1}{2}} + c_0 (L_1 + iL_2) Y_l^{j_3 - \frac{1}{2}} &= \hbar q c_1 Y_l^{j_3 + \frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (14)$$

recordemos que

$$\begin{aligned} L_3 Y_l^m &= \hbar m Y_l^m \\ (L_1 \pm iL_2) Y_l^m &= \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} Y_l^{m \pm 1} \end{aligned}$$

mediante el cual se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} c_0 \left(j_3 - \frac{1}{2} - q \right) + c_1 r &= 0 \\ -c_1 \left(j_3 + \frac{1}{2} + q \right) + c_0 r &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

donde $r = \sqrt{l(l+1) - \left(j_3 - \frac{1}{2}\right)\left(j_3 + \frac{1}{2}\right)}$ ecuación (15) nos permitirá encontrar el eigenvalor q . Para obtener una solución no trivial, exigimos que el determinante de (15) sea cero

$$\begin{vmatrix} c_0\left(j_3 - \frac{1}{2} - q\right) & c_1 r \\ c_0 r & -c_1\left(j_3 + \frac{1}{2} + q\right) \end{vmatrix} = 0$$

lo que nos da como resultado

$$\left(j_3 + \frac{1}{2}\right)\left(j_3 - \frac{1}{2}\right) - q(q+1) + l(l+1) - \left(j_3 - \frac{1}{2}\right)\left(j_3 + \frac{1}{2}\right) = 0$$

la cual es nula si

$$q(q+1) = l(l+1)$$

por lo tanto

$$q = \begin{cases} l \\ -(l+1) \end{cases}$$

Si tomamos inicialmente $q = l$, de las ecuaciones (11) y (12) tendremos que

Desde que los armónicos esféricos forman un conjunto ortonormal de funciones

$$Y_{j_l}^{m_l} * Y_{j_l}^{m_l} = 1$$

lo que implica que

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$$

Sustituyendo $q = l$ en (15) se obtiene

$$\left(j_3 - \frac{1}{2} - l\right)c_0 + c_1 r = 0$$

$$c_0 r - c_1\left(j_3 + \frac{1}{2} + l\right) = 0$$

de la segunda ecuación de (18) se tiene que

$$c_0 = \frac{c_1\left(j_3 + \frac{1}{2} + l\right)}{r} = c_1 \frac{j_3 + \frac{1}{2} + l}{\sqrt{l(l+1) - \left(j_3 - \frac{1}{2}\right)\left(j_3 + \frac{1}{2}\right)}}$$

al sustituir c_0 en (17) obtendremos

$$c_1 = \sqrt{\frac{l - j_3 + \frac{1}{2}}{2l + 1}}$$

si sustituimos c_1 en (17) tendremos la expresión para c_0

$$c_0 = \sqrt{\frac{l + j_3 + \frac{1}{2}}{2l + 1}}$$

Si se considera $q = -(l+1)$ se tiene que $j = l - \frac{1}{2}$ y

$$c_0 = -\sqrt{\frac{l - j_3 + \frac{1}{2}}{2l + 1}}$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{l + j_3 + \frac{1}{2}}{2l + 1}}$$

La solución normalizada es entonces

$$Y_{j_l}^{j_3} = \sqrt{\frac{l + j_3 + \frac{1}{2}}{2l + 1}} \chi_+ Y_l^{j_3 - \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{l - j_3 + \frac{1}{2}}{2l + 1}} \chi_- Y_l^{j_3 + \frac{1}{2}}$$

donde χ_+ y χ_- son los espinores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivamente. Ahora podemos separar las partes angular y radial de la solución de la ecuación de Dirac.

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(r) Y_{j_A}^{j_3} \\ if(r) Y_{j_B}^{j_3} \end{pmatrix} \quad (19)$$

donde los coeficientes g y f son funciones arbitrarias de r .

Segunda Parte

Sustituimos (19) en la ecuación de Dirac

$$(c\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2 + V(r))\psi = E\psi$$

lo que nos lleva a

$$c \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{p} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = (E - V - \beta mc^2) \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c(\sigma \cdot \mathbf{p})\psi_B \\ c(\sigma \cdot \mathbf{p})\psi_A \end{pmatrix} = (E - V) \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} - mc^2 \begin{pmatrix} \psi_A \\ -\psi_B \end{pmatrix}$$

de aquí llegamos al sistema de ecuaciones

$$c(\sigma \cdot \mathbf{p})\psi_B = (E - V - mc^2)\psi_A$$

$$c(\sigma \cdot \mathbf{p})\psi_A = (E - V + mc^2)\psi_B \quad (20)$$

necesitamos conocer cuál es el efecto de $(\sigma \cdot \mathbf{p})$ sobre ψ_A y ψ_B . Podemos escribir $(\sigma \cdot \mathbf{p})$ como

$$\sigma \cdot \mathbf{p} = (\sigma \cdot \hat{\mathbf{r}})(\sigma \cdot \hat{\mathbf{r}})(\sigma \cdot \mathbf{p})$$

ya que

$$(\sigma \cdot \hat{\mathbf{r}})(\sigma \cdot \hat{\mathbf{r}}) = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} + i\sigma \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}}) = 1$$

$$= \frac{(\sigma \cdot \mathbf{r})(\sigma \cdot \mathbf{r})}{r^2}$$

entonces

$$\sigma \cdot \mathbf{p} = \frac{1}{r^2} (\sigma \cdot \mathbf{r})(\sigma \cdot \mathbf{r})(\sigma \cdot \mathbf{p})$$

donde

$$(\sigma \cdot \mathbf{r})(\sigma \cdot \mathbf{p}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + i\sigma \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p})$$

$$= \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + i\sigma \cdot \mathbf{L} \quad (21)$$

De las ecuaciones (7) despejamos $\sigma \cdot \mathbf{L}$ y la sustituimos en (21)

$$(\sigma \cdot \mathbf{p})\psi_A = \left(\frac{\sigma \cdot \mathbf{r}}{r^2} \right) [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - i\hbar(\kappa + 1)]\psi_A$$

$$= \left(\frac{\sigma \cdot \mathbf{r}}{r^2} \right) \left[-i\hbar r \frac{\partial}{\partial r} - i\hbar(\kappa + 1) \right] \psi_A$$

donde $-i\hbar r \frac{\partial}{\partial r} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$. Sustituimos la expresión (19) para ψ_A

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\psi_A = -i\hbar \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \right) \left[r \frac{dg}{dr} + (\kappa + 1)g \right] Y_{l_A}^{j_3} \quad (22)$$

Puede demostrarse que

$$\left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}}{r} \right) Y_{j_{1A,B}}^{j_3} = \sigma_r Y_{j_{1A,B}}^{j_3} = -Y_{j_{1B,A}}^{j_3} \quad (23)$$

para esto, debemos primero probar que

$$\{\mathbf{K}, \sigma_r\} = 0$$

entonces

$$\begin{aligned} \{\mathbf{K}, \sigma_r\} &= \{\beta(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + \hbar), \sigma_r\} \\ &= \beta(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L})\sigma_r + \beta\hbar\sigma_r + \sigma_r\beta(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}) + \hbar\sigma_r\beta \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} [\beta, (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L})] &= 0 \\ [\beta, \sigma_r] &= 0 \end{aligned}$$

por lo que

$$\{\mathbf{K}, \sigma_r\} = \beta(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L})\sigma_r + \beta\sigma_r(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}) + 2\hbar\beta\sigma_r$$

donde

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L})\sigma_r &= \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{r}} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{L} \times \hat{\mathbf{r}}) \\ \sigma_r(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}) &= \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{L} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) \end{aligned}$$

de estas expresiones tenemos que

$$\begin{aligned} \{\mathbf{K}, \sigma_r\} &= \beta i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{L} \times \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) + 2\hbar\beta\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} \\ &= \beta i \boldsymbol{\sigma} \cdot (2i\hbar\hat{\mathbf{r}}) + 2\hbar\beta\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0 \end{aligned}$$

Regresando a la ecuación (23) vemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\sigma_r Y_{j_{1A,B}}^{j_3}) &= -\sigma_r (\mathbf{K} Y_{j_{1A,B}}^{j_3}) \\ &= \pm \kappa (\sigma_r Y_{j_{1A,B}}^{j_3}) \end{aligned} \quad (24)$$

ya que $\mathbf{K} Y_{j_{1B,A}}^{j_3} = \pm \kappa Y_{j_{1B,A}}^{j_3}$ or lo tanto, tenemos que

$$\sigma_r Y_{j_{1A,B}}^{j_3} = \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}}{r} \right) Y_{j_{1A,B}}^{j_3} = -Y_{j_{1B,A}}^{j_3} \quad (25)$$

Entonces, la ecuación (22) se expresa como

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\psi_A = i\hbar \left[\frac{dg}{dr} + \left(\frac{\kappa + 1}{r} \right) g \right] Y_{j_{1B}}^{j_3} \quad (26)$$

de manera análoga se obtiene para ψ_B

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\psi_B = \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \right) [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}]\psi_B$$

donde

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L})\psi_B = \hbar(\kappa - 1)\psi_B$$

entonces

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\psi_B = \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \right) \left[-i\hbar r \frac{\partial}{\partial r} + i\hbar(\kappa - 1) \right] \psi_B$$

con $\psi_B = if(r)Y_{j_{1B}}^{j_3}$

$$\begin{aligned}
 (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\psi_B &= \hbar \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}}{r} \right) \left[\frac{df}{dr} - \frac{(\kappa-1)}{r} f \right] Y_{j_B}^{j_B} \\
 (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) &= -\hbar \left[\frac{df}{dr} - \frac{(\kappa-1)}{r} f \right] Y_{j_A}^{j_A}
 \end{aligned} \tag{27}$$

de las ecuaciones (26) y (27) llegamos al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
 c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\psi_B &= \left[-\hbar c \frac{df}{dr} + \hbar c \frac{(\kappa-1)}{r} f \right] Y_{j_A}^{j_A} = (E - V - mc^2)\psi_A \\
 c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\psi_A &= \left[i\hbar c \frac{dg}{dr} + i\hbar c \frac{(\kappa+1)}{r} g \right] Y_{j_B}^{j_B} = (E - V + mc^2)\psi_B
 \end{aligned}$$

Podemos prescindir de la dependencia angular, por lo que llegamos al sistema de ecuaciones radiales

$$\begin{aligned}
 -\hbar c \frac{df}{dr} + \hbar c \frac{(\kappa-1)}{r} f &= (E - V - mc^2)g \\
 \hbar c \frac{dg}{dr} + \hbar c \frac{(\kappa+1)}{r} g &= (E - V + mc^2)f
 \end{aligned}$$

y estas ecuaciones son resueltas para cualquier potencial central.

Tercera Parte

A continuación, resolveremos el problema del pozo de potencial esférico expresado en la forma

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \infty & r > R \end{cases} \tag{29}$$

este potencial proporciona una descripción fenomenológica de los quarks, los cuales están confinados dentro de los hadrones. Los quarks serán considerados como partículas sin masa dentro de una esfera o bolsa de dimensión finita e infinitamente masivos fuera de la bolsa, lo que concuerda con el hecho de que nunca se ha detectado un quark en estado libre. Este modelo es conocido como el Modelo de la Bolsa del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT BAG MODEL).⁵

Comencemos por obtener la solución en el interior de la bolsa, $V=0$. Derivamos la ecuación (28b) y sustituimos en (28a)

$$\hbar c g'' + \hbar c \left(\frac{\kappa+1}{r} \right) g' - \hbar c \left(\frac{\kappa+1}{r^2} \right) g = (E + mc^2) f'$$

donde $f' = \frac{df}{dr}$, $g' = \frac{dg}{dr}$

$$f' = \left(\frac{\hbar c}{E + mc^2} \right) \left[g'' + \left(\frac{\kappa+1}{r} \right) g' - \left(\frac{\kappa+1}{r^2} \right) g \right]$$

con esta expresión para f' , la ecuación (28a) se escribe como

$$- \left(\frac{\hbar^2 c^2}{E + mc^2} \right) \left[g'' + \left(\frac{\kappa+1}{r} \right) g' - \left(\frac{\kappa+1}{r^2} \right) g \right] + \hbar c \left(\frac{\kappa-1}{r} \right) f = (E - mc^2) g \tag{30}$$

de (30) encontramos una expresión de f en función de g

$$f = \left(\frac{\hbar c}{E + mc^2} \right) \left(\frac{r}{\kappa-1} \right) \left[g'' + \left(\frac{\kappa+1}{r} \right) g' - \left(\frac{\kappa+1}{r^2} \right) g \right] + \left(\frac{E - mc^2}{\hbar c} \right) \left(\frac{r}{\kappa-1} \right) g$$

Sustituyendo f en (28b), tendremos que

$$g'' + \frac{2}{r} g' + \left[\frac{E^2 - mc^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2} \right] g = 0 \tag{31}$$

mediante la sustitución $\rho = \zeta_0 r$, donde ζ_0 , (31) se escribe como

$$\frac{d^2 g}{d\rho^2} + \left(\frac{2}{\rho}\right) \frac{dg}{d\rho} + \left[1 - \frac{\kappa(\kappa+1)}{\rho^2}\right] g = 0$$

desde que $\kappa = \pm\left(j + \frac{1}{2}\right) = \pm(l+1)$ se tiene que

$$\frac{d^2 g}{d\rho^2} + \left(\frac{2}{\rho}\right) \frac{dg}{d\rho} + \left[1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right] g = 0 \tag{32}$$

donde $l = l_{A,B}$, $g = g(\rho)$; las soluciones son las funciones de Bessel esféricas

$$g(\rho) = j_l(\zeta_0 r) \tag{33}$$

Para el estado base $l_A = 0$ y $\kappa = \pm 1$ y la función de estado será

$$\psi_{\text{int}} = \begin{pmatrix} g(r) Y_{j_A}^{j_A} \\ -if(r) \sigma_r Y_{j_A}^{j_A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_0(\zeta_0 r) \\ -if(r) \sigma_r \end{pmatrix} \chi_+$$

Para encontrar $f(r)$, utilizamos la ecuación (28b), donde

$$f(r) = \left(\frac{\hbar c}{E + mc^2}\right) \frac{dg}{dr} + \left(\frac{\hbar c}{E + mc^2}\right) \left(\frac{\kappa+1}{r}\right) g$$

sustituyendo $\frac{dg}{dr} = \frac{dg}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} = \zeta_0 \frac{dg}{d\rho}$, tenemos

$$\begin{aligned} f(\rho) &= \left(\frac{\hbar c \zeta_0}{E + mc^2}\right) \left[\frac{dg}{d\rho} + \left(\frac{\kappa+1}{\rho}\right) g\right] \\ &= \left(\frac{\hbar c \zeta_0}{E + mc^2}\right) \left[j_0'(\rho) + \left(\frac{\kappa+1}{\rho}\right) j_0(\rho)\right] \end{aligned}$$

Para tener una solución finita del estado base tomamos $k=1$, y de esta forma

$$f(\rho) = \left(\frac{\hbar c \zeta_0}{E + mc^2}\right) j_0'(\rho)$$

de las relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel⁶

$$j_0'(\rho) = -j_1(\rho)$$

la función de estado se escribe como

$$\psi_{\text{int}} = N_1 \begin{pmatrix} j_0(\zeta_0 r) \\ i \left(\frac{\hbar c \zeta_0}{E + mc^2}\right) \sigma_r j_1(\zeta_0 r) \end{pmatrix} \chi_+ \tag{34}$$

donde N_1 es una constante de normalización. Supongamos que los quarks se mueven libremente en el interior del hadrón (o la bolsa), por lo que su energía de reposo es nula y

$$\zeta_0 = \frac{E}{\hbar c} \geq 0$$

por lo tanto

$$\psi_{\text{int}} = N_1 \begin{pmatrix} j_0\left(\frac{E}{\hbar c} r\right) \\ i \sigma_r j_1\left(\frac{E}{\hbar c} r\right) \end{pmatrix} \chi_+ \tag{35}$$

Donde

$$\sigma_r = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Las soluciones de la ecuación de Bessel para $r > R$ que son regulares cuando $r \rightarrow \infty$, son las funciones de Hankel. Para obtener la función de onda exterior m

$\rightarrow \infty$, ya que se necesita una masa infinita para penetrar el potencial. Con estas consideraciones

$$\zeta_0 = i \frac{mc}{\hbar}$$

de esta forma

$$\psi_{ext} = N_2 \left(\begin{array}{c} h_0^{(1)}\left(i \frac{mc}{\hbar} r\right) \\ i(\sigma \cdot \mathbf{r}) h_1^{(1)}\left(i \frac{mc}{\hbar} r\right) \end{array} \right) \chi_+$$

Donde N_2 es una constante de normalización. Las propiedades de las funciones de Hankel son6

$$h_0^{(1)}(ix) = -\frac{e^{-x}}{x}$$

$$h_1^{(1)}(ix) = i \frac{e^{-x}}{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Entonces escribimos la solución exterior como

$$\psi_{ext} = -\frac{N_2 \hbar e^{-\frac{mc}{\hbar} r}}{mcr} \left(i(\sigma \cdot \mathbf{r}) \left(1 + \frac{\hbar}{mcr}\right) \right) \quad (36)$$

en el MIT BAG MODEL se pide que en la frontera, lo que implica que

$$j_0(\zeta_0 r) = j_1(\zeta_0 r) = 0$$

lo cual no es posible puesto que las funciones de Bessel son linealmente independientes. Entonces, se sugiere lo siguiente, una forma de expresar que la partícula no puede estar fuera de la bolsa es tomar

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \psi_{ext} = 0 \quad (37)$$

elegimos N_2 de tal forma que (37) sea finito, sea $N_2 = -\frac{mc}{\hbar} N_0 e^{\frac{mc}{\hbar} R}$, por lo que

$$\psi_{ext} = \frac{e^{\frac{mc}{\hbar}(R-r)}}{r} N_0 \left(i(\sigma \cdot \mathbf{r}) \left(1 + \frac{\hbar}{mcr}\right) \right) \chi_- ; \quad \forall r > R \quad (38)$$

entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \psi_{ext} = \frac{N_0}{R} \left(i(\sigma \cdot \mathbf{r}) \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\hbar}{mcr}\right) \right) \chi_- = \psi_{int}(R)$$

se concluye que

$$\frac{N_0}{R} \left(i(\sigma \cdot \mathbf{r}) \right) \chi_- = N_1 \left(\begin{array}{c} j_0\left(\frac{ER}{\hbar c} R\right) \\ i(\sigma \cdot \mathbf{r}) j_1\left(\frac{ER}{\hbar c} R\right) \end{array} \right) \chi_+$$

$$\frac{N_0}{R} = N_1 j_0\left(\frac{ER}{\hbar c} R\right) = N_1 j_1\left(\frac{ER}{\hbar c} R\right)$$

y llegamos a la ecuación trascendental que nos proporcionará los valores permitidos de la energía

$$j_0\left(\frac{ER}{\hbar c} R\right) = j_1\left(\frac{ER}{\hbar c} R\right) \quad (39)$$

la cual es equivalente a

$$\sqrt{\frac{\pi \hbar c}{2ER}} J_{1/2}\left(\frac{ER}{\hbar c} R\right) - \sqrt{\frac{\pi \hbar c}{2ER}} J_{3/2}\left(\frac{ER}{\hbar c} R\right) = 0$$

$$J_{1/2}\left(\frac{ER}{\hbar c} R\right) = J_{3/2}\left(\frac{ER}{\hbar c} R\right) \quad (40)$$

donde las J son las funciones de Bessel del primer tipo. Graficando (40) (figura 1) encontramos que $\frac{ER}{\hbar c} = 2.04$. El radio de los hadrones es del orden de los $10^{-15}m$, $c=3 \times 10^8 m/seg$, $\hbar=1.054572 \times 10^{-34} J \cdot seg$ y $1 eV=1.6 \times 10^{-19} J$. Por lo que la masa del quark es

$$m_{quark} = 403.373 \text{ MeV}/c^2$$

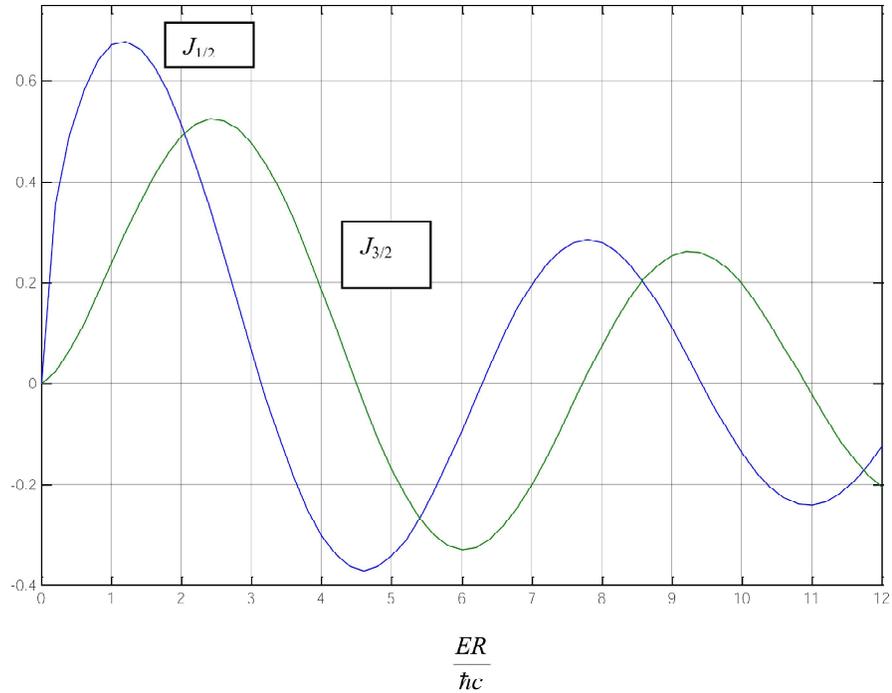
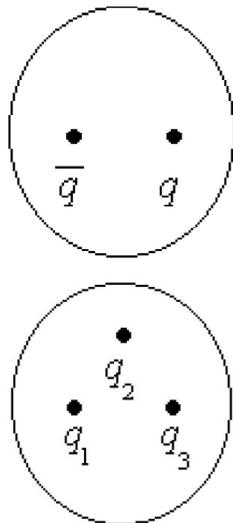


Fig. 1. Las funciones de Bessel de primer tipo para $n = 1/2$ y $n = 3/2$.



$$m_{meson} = 806.746 \text{ MeV}/c^2$$

para el mesón ρ , se tiene

$$m_{\rho} \cong 770 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_{barion} = 1210.12 \text{ MeV}/c^2$$

CONCLUSIONES

Con el modelo de bolsa hemos podido estimar al valor de la masa de los quarks considerando que este se encuentra en el nivel de energía fundamental del potencial esférico. Este modelo sencillo nos ha permitido también estimar con un grado de aproximación de 4% de error, la masa del mesón ρ . El modelo utilizado no considera las interacciones entre los quarks dentro de la bolsa. Aquí

solo hemos hecho el cálculo para el nivel fundamental de energía, pero tomando en cuenta los estados excitados, que corresponden a soluciones de mayor energía, los resultados se apartan de los valores experimentales, lo cual se debe a la gran simplificación que esta involucrada en el modelo.

REFERENCIAS

1. Griffiths, David, Introduction to Elementary Particles, John Wiley and Sons, Inc., (1987).
2. Perkins, Donald H., Introduction to High Energy Physics, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., (1987).
3. Kane, Gordon, Modern Elementary Particle Physics, Perseus Books, (1993).
4. Sakurai, J.J., Advanced Quantum Mechanics, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., (1967).
5. Bhaduri, Rajat, Quark Models of the nuclei, Allan M. Wylde. 1988
6. Arfken, George, and Weber, Hans, Mathematical Methods for Physicists, Academic Press, (1994).

