

Midiendo sincrofasores con filtros Taylor-Fourier con enganche adaptivo de fase polinomial

José Antonio De la O Serna
Universidad Autónoma de Nuevo León,
Doctorado en Ingeniería Eléctrica, FIME,
jdelao@ieee.org

RESUMEN

La investigación en estimación de sincrofasores ha cambiado recientemente el énfasis del problema de la medición fasorial al de la medición de frecuencia, y su tasa de cambio (Rate of change of frequency, ROCOF). La principal preocupación ahora es obtener análisis espectrales dinámicos más finos de las señales del sistema eléctrico de potencia. Este artículo propone el uso de los filtros Taylor-Fourier para reducir el error en la totalidad de parámetros observados. Esta reducción se obtiene explotando su capacidad para adaptarse al patrón dinámico de fase de la señal de una estimación a la siguiente. Al estar dotados con un seguidor de fase, son capaces de apuntar su base vectorial hacia la señal a medir, ofreciendo los mejores estimados posibles del subespacio más cercano a la señal. Los filtros adaptivos, dotados con su propio enlace de enganche de fase polinomial (Phase Lock Loop, PLL), siguen la frecuencia instantánea de la señal disponible. Ya que la mayoría de las señales estipuladas en el estándar de sincrofasores son definidas mediante polinomios de Taylor, la eficacia de esta familia de filtros es remarcable, desde duraciones tan cortas como dos ciclos. Los filtros obtienen estimados con error nulo en el conjunto completo de parámetros medidos, cuando la señal de prueba está en el subespacio apuntado de Taylor-Fourier. Además, errores muy pequeños de estimación son obtenidos mientras la tasa de energía señal a ruido (Signal to noise ratio, SNR) sea superior a 50dB. Finalmente, la interferencia de armónicas se puede suprimir, pero a un costo computacional más elevado.

PALABRAS CLAVE

Fasor dinámico, frecuencia, ROCOF, enlace de enganche de fase, unidad de medición fasorial, oscilaciones de sistemas de potencia, sincrofasores.

ABSTRACT

Synchrophasor estimation research has recently shifted the emphasis from the phasor to the frequency and rate of change of frequency (ROCOF) estimation problem. The main concern now is to achieve finer dynamic spectral analysis from the power system signals. This paper proposes the use of the Taylor-Fourier filters to reduce the error of the whole set of estimated parameters. This reduction is attained by exploiting their capability to match the phase pattern of the signal from one estimation to the next. By being endowed with their own phase follower, they are able to point their basis vectors towards the given signal,

providing the best possible estimates from the nearest available subspace. The adaptive filters, provided with their own polynomial phase locked loop (PLL), follow the instantaneous frequency of the given signal. Since most of the signals stipulated in the synchrophasor standard are defined by Taylor polynomials, the performance of this family of filters is remarkable, for durations as from two cycles. They obtain estimates with zero error in the full set of parameters, when the test signal is in the focused Taylor-Fourier subspace. Very small estimation errors can be obtained for signal to noise ratios (SNR) greater than 50dB. Harmonic interference can also be constrained, but with higher computational cost.

KEYWORDS

Dynamic phasor estimates, frequency estimates ROCOF, phase-locked-loop, phasor measurement unit, power system oscillations, synchrophasors.

INTRODUCCIÓN

El uso extensivo de unidades de medición fasorial (Phasor Measurement Units, PMU) en sistemas eléctricos estimula la investigación en nuevos algoritmos para estimar fasores dinámicos. Un cambio de paradigma de los fasores estáticos a los dinámicos fue necesario para mejorar la estimación bajo condiciones dinámicas que justificaban el uso de esos dispositivos electrónicos inteligentes (Intelligent Electronic Devices, IED). Varios algoritmos fueron propuestos para mejorar dicha estimación. En los últimos años, los algoritmos se enfocaron en mejorar la medición fasorial. Hoy en día, ese énfasis es insuficiente, debido a la aparición de nuevos parámetros a estimar: en especial la frecuencia instantánea, y la tasa de cambio de dicha frecuencia (Rate of change of frequency, ROCOF). En pocos años, pasamos del problema simple de la estimación fasorial, al problema de medir estados fasoriales. Esto se debe a que existen decisiones de estabilidad del sistema eléctrico, para las cuáles es más importante medir con precisión la frecuencia instantánea y el ROCOF, que medir el fasor mismo.

Antes de la aparición del estándar de sincrofasores,¹ se propusieron los filtros Taylor-Fourier para estimar fasores dinámicos como una extensión del filtro de Fourier de un ciclo.² Basándose en esta extensión de Taylor, en³ se propuso un método de compensación para cancelar el error bajo condiciones dinámicas del algoritmo clásico de Fourier, y para estimar frecuencia y ROCOF con ecuaciones de diferencias finitas. Otras técnicas de cancelación de error mediante estimados de Fourier consecutivos fueron propuestos en.^{4,5,6,7,8} Todos ellos se enfocan en el problema de estimación fasorial, y sus estimaciones de frecuencia y ROCOF dependen de los estimados DFT, los cuales asumen condiciones de estado estable. Además, todos ellos explícitamente declaran limitaciones en sus estimados de frecuencia y ROCOF. Una comparación de la mayoría de los algoritmos anteriores se puede encontrar en.⁹ En¹⁰ se usaron PLLs mejorados para paliar las deficiencias de la DFT. Finalmente, la infiltración de la imagen de la frecuencia fundamental del algoritmo DFT fue utilizada para estimar las desviaciones de frecuencia en.^{11,12}

El interés en la medición de frecuencia y ROCOF junto con la medición fasorial fue planteado recientemente en los artículos de Roscoe^{13,14,15} y artículos subsecuentes.^{16,17} El primer conjunto de artículos usa básicamente técnicas de enganche de frecuencia (Frequency Locked Loop, FLL) para sintonizar los

filtros a la frecuencia real de la señal medida y mejorar así las estimaciones fasoriales.¹⁷ Hace notar que las mediciones de frecuencia y ROCOF requieren de largos intervalos de tiempo. En¹⁶ se usa retroalimentación FLL para mejorar las estimaciones usando dos etapas de filtros Taylor-Fourier² proponiendo un esquema único que ofrece estimaciones clase P y M, las cuáles son rápidas para protecciones (P) y lentas para medición (M). Por otra parte, los autores de¹⁷ concluyen que se requieren filtros con ventanas de duración multi-cíclica para rechazar las armónicas y el ruido blanco, pero que intervalos más largos incrementan los errores de medición fasorial, de frecuencia y de la ROCOF bajo fluctuaciones de frecuencia. Finalmente,¹⁸ propone algoritmos para obtener estimaciones de la fundamental y fasores armónicos sobre un amplio rango de frecuencia, de acuerdo a los requerimientos estáticos y dinámicos del estándar C37.118.1.

El método de Prony se propuso en¹⁹ para pre-estimar la frecuencia y atenuación de la señal, y entonces utilizar el filtro Taylor-Fourier de orden cero para estimar con mejor precisión el fasor dinámico. Este filtro no corresponde al de Fourier de un ciclo, dado que está equipado con la inversa de la matriz de Gram para asegurar una proyección ortogonal, ya que los vectores de la base de Fourier no son ortogonales cuando la frecuencia no es la nominal. La estimación del filtro de Fourier de un ciclo deja de ser óptima fuera de la frecuencia fundamental, ya que su formulación asume una base vectorial ortogonal. Los resultados del filtro adaptivo de Prony fueron muy buenos debido a su técnica FLL. Basándome en esta simple idea, reconsideré el filtro Taylor-Fourier propuesto en² y descubrí que está dotado de un PLL polinomial, y por lo tanto es capaz de adaptarse a la frecuencia dinámica de la señal de entrada mediante el ajuste de un patrón de fase polinomial de Taylor. Esta técnica es referida como PLL polinomial.

De esta manera, el método propuesto es capaz de adaptarse a las fluctuaciones de fase y de frecuencia, ofreciendo las mejores estimaciones fasoriales, de fase, de frecuencia y de la derivada instantánea de frecuencia (ROCOF), dado que todas ellas aparecen en los coeficientes del polinomio de Taylor.

La idea es muy simple: en vez de suponer la frecuencia nominal fundamental antes de aplicar el algoritmo LMS, y estimar los parámetros desde ese subespacio fijo, usamos los parámetros estimados para mejorar el modelo de señal con dicha información, aproximando el subespacio *a priori* a la señal dada. Esto se aplica de la estimación previa a la siguiente. Entonces, el algoritmo corre siempre con el patrón de fase previo y predice automáticamente el siguiente patrón con la información de la señal precedente. Esa estrategia genera un enlace de enganche de fase polinomial y traslada la frecuencia central de los diferenciadores ideales a la frecuencia instantánea de la señal. Dado que casi todas las señales de prueba del estándar de sincrofasores,¹ se definen por dos polinomios de Taylor separados por una discontinuidad, sus segmentos continuos (sin ruido ni armónicas) se encuentran en el subespacio del modelo de señal del PLL polinomial Taylor-Fourier; y de acuerdo con la igualdad de Parseval, sus estimaciones corresponden a mediciones exactas, con error nulo en todos los parámetros (amplitud, fase, frecuencia, ROCOF, ROCOA, etc.). Y aun cuando la señal de prueba modulada por una amplitud y fase senoidal, exceptuada de la regla anterior, se encuentre fuera del subespacio del modelo de señal, los errores de estimación son muy pequeños.

Otra estrategia similar a la del filtro de Prony es el método TLS-ESPRIT.^{20,21,22} En vez de estimar los mejores coeficientes de la ecuación de diferencias, y de ahí la atenuación y la frecuencia de la señal de las raíces de la ecuación característica, como lo hace el método de Prony, el TLS-ESPRIT estima atenuación y frecuencias de los valores propios en la diagonal de la matriz de invarianza, que a su vez se obtiene de la matriz de covarianza de la señal, la cual es factorizada en una base ortogonal simétrica mediante descomposición en valores singulares (Singular Value Decomposition, SVD). Ambos algoritmos, el Prony y el TLS-ESPRIT pre-estiman únicamente atenuación y frecuencia, un subconjunto de los estimados del filtro Taylor-Fourier, el cual estima el conjunto completo de las primeras derivadas de amplitud y de fase (incluidas la frecuencia y la ROCOF). Por tanto, son capaces de enganchar la fase, expresada con un polinomio de Taylor de d -ésimo orden, sin necesidad de pre-estimar ecuaciones en diferencias o calcular matrices de covarianzas. Sólo necesitan para adaptarse a la fase los estados de amplitud y fase contenidos en sus propios estimados. Los métodos de Prony y TLS-ESPRIT necesitan una etapa computacional adicional para hacer su trabajo, y otra para mejorar los estimados. El método Taylor-Fourier puede continuar con su aproximación adaptativa para refinar sus estimados. Por tanto, el algoritmo propuesto es más general, y ofrece estimaciones más finas.

El artículo afirma que los filtros Taylor-Fourier tienen toda la información necesaria para adaptarse a la fase, sin necesidad de estimar coeficientes de ecuaciones de diferencias o matrices de covarianza. Toda la información necesaria está en los estados estimados de amplitud y fase contenidos en los coeficientes de los polinomios de Taylor. Supone que para duraciones de dos ciclos, la oscilación de fase puede ser aproximada con suficiente precisión por un polinomio de Taylor de tercer orden. Esta estrategia trabaja bien con señales de sistemas de potencia.

El algoritmo de mínimos cuadrados (Least Mean Squares, LMS) ofrece el mejor elemento del subespacio definido por el modelo de señal. Esto significa que ningún otro punto del subespacio puede ofrecer una mejor aproximación que la del punto de la solución LMS. Pero es posible mejorar el subespacio tomando en cuenta los estimados LMS. Iniciando con el subespacio generado con la fase lineal de la frecuencia fundamental nominal, el algoritmo LMS provee los parámetros para redefinir un nuevo subespacio con la fase polinomial estimada. Dicho subespacio podría abarcar la señal de entrada si pertenece al nuevo modelo de señal de fase polinomial. En caso de que la señal escape al nuevo subespacio, se puede aplicar nuevamente el algoritmo LMS para mejorar la estimación de la fase polinomial. Se observó que cuando se aplica el algoritmo a señales de sistemas de potencia reales, a partir del segundo intento el polinomio de fase varía ya muy poco (milirads). De manera que la innovación del subespacio alcanza su estado final rápidamente. Por esta razón, el algoritmo LMS es aplicado desde el subespacio generado por el polinomio de fase del intervalo de tiempo precedente. De esta forma, cada nueva estimación autocorriga el subespacio anterior y lo acepta como el más cercano a la señal a estimar. Como resultado, tenemos un seguidor óptimo del patrón de fase de la señal de entrada. El algoritmo siempre ofrece los mejores estimados del subespacio más cercano a la señal, minimizando así el error de aproximación.

El procedimiento está soportado por un marco teórico elegante. Una importante propiedad comparada con la abundancia de soluciones parciales o incompletas. De hecho, este método incluye el criterio de error tradicional usado en teoría de aproximación y en telecomunicaciones: la tasa de señal a ruido (Signal To Noise Ratio, SNR). Contrariamente a los errores del estándar: el TVE (total vector error), el error en frecuencia, o en la ROCOF, que toman en cuenta cada parámetro independientemente, la SNR ofrece una medida sintética del error que toma en cuenta todo el conjunto de parámetros estimados, con una elegante interpretación en el espacio de Hilbert (Ver Sección III, y Apéndice B). Además la SNR es válida para bases oblicuas, y se calcula a partir de las muestras de la señal, sin necesidad de conocer sus parámetros, los cuales son conocidos únicamente para las señales de prueba del estándar.

En lo que sigue, se desarrolla el método matemáticamente, y se prueba el procedimiento de medición con las señales de prueba definidas en el estándar de sincrofasores, desde las más apegadas al modelo de señal, hasta las más alejadas. También consideramos su comportamiento contra armónicas o ruido aditivo blanco presente en la señal. Se concluye que el procedimiento se comporta bien, abriendo el camino a los análisis espectrales dinámicos, y que podría ser fácilmente extendido a la transformada Taylor-Fourier.^{23,24}

SEÑAL DE BANDA LIMITADA

Una señal de banda limitada se define como

$$s(t) = \text{Re}\{\rho(t)e^{j\omega_1 t}\} = a(t)\cos(\omega_1 t + \varphi(t)) \quad (1)$$

donde $\omega_1 = 2\pi f_1 t$, f_1 es la frecuencia fundamental, y $\rho(t) = a(t)e^{j\varphi(t)}$ el fasor dinámico, $a(t), \varphi(t) \in \mathcal{R}$.

Es posible aproximar un polinomio de Taylor de grado d al fasor dinámico:

$$\rho^{(d)}(t) = p_0 + p_1 t + p_2 \frac{t^2}{2} + \dots + p_d \frac{t^d}{d!} \quad (2)$$

en forma matricial se puede escribir como

$$\rho^{(d)}(t) = \mathbf{T}\mathbf{p}_1 \quad (3)$$

donde la matriz \mathbf{T} contiene muestras de los términos de Taylor, $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^d}{d!} \end{bmatrix}$, $t \in [-T/2 \ T/2]$, y el vector \mathbf{P}_1 los coeficientes complejos correspondientes a cada término de Taylor,

La señal correspondiente será:

$$s^{(d)}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{E}\mathbf{T} & \bar{\mathbf{E}}\mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \bar{\mathbf{p}}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{p} \quad (4)$$

donde \mathbf{E} es una matriz diagonal conteniendo las muestras de la función compleja $e^{j2\pi f_1 t}$ en la diagonal, o el perfil de fase $e^{j\Phi(t)}$, y la barra $\bar{\quad}$ indica el operador conjugado complejo.

Los mejores coeficientes de Taylor para una señal dada s , en el sentido LMS, son dados por la solución a las Ecuaciones Normales:

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{G}^{-1} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{E}} \\ \mathbf{T}^T \mathbf{E} \end{pmatrix} s \quad (5)$$

donde \mathbf{G} es la matriz de Gram

$$\mathbf{G} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \mathbf{T}^T \mathbf{T} & \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{E}}^2 \mathbf{T} \\ \mathbf{T}^T \mathbf{E}^2 \mathbf{T} & \mathbf{T}^T \mathbf{T} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \mathbf{\Pi} & \bar{\mathbf{\Phi}} \\ \mathbf{\Phi} & \mathbf{\Pi} \end{pmatrix} \quad (6)$$

la cual es Hermitiana y formada por bloques redundantes. Por lo que hay mucha simetría en la solución. Es fácil demostrar que su inversa es de la forma

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} W & \bar{Y} \\ Y & \bar{W} \end{pmatrix} \quad (7)$$

con $W = (\Pi - \bar{\Phi}\Pi^{-1}\Phi)^{-1}$, y $Y = -\bar{W}\Phi\Pi^{-1}$. Así, en vez de calcular la inversa de una matriz, es necesario únicamente obtener dos de $(d+1) \times (d+1)$: W y Y .

La señal aproximada será:

$$\hat{s}^{(d)} = B\hat{p} \quad (8)$$

y la norma cuadrática del mínimo error de la aproximación LMS:

$$\|e\|^2 = \|s\|^2 - \hat{p}^H G \hat{p}. \quad (9)$$

El segundo término de esta ecuación muestra que la energía de la señal estimada puede calcularse de la forma cuadrática de los parámetros estimados, $\hat{p}^H G \hat{p}$. Esta fórmula ofrece un criterio más completo para evaluar el error de estimación, y por tanto la calidad del conjunto completo de parámetros. Además, este criterio trabaja tanto para bases ortonormales como para biortogonales. En el primer caso, se reduce a la energía de los parámetros estimados, ya que en ese caso la matriz de Gram es la identidad ($G=I$, ver el Apéndice B). Esta es la razón por la que consideramos en este artículo la norma cuadrática del error de aproximación (normalizada), como una medida más completa de la calidad de la estimación.

Usualmente, la norma cuadrada del error es normalizada por la de la señal, por lo que tenemos

$$\|\epsilon\|^2 = 1 - \hat{p}^H G \hat{p} / \|s\|^2. \quad (10)$$

Otra medida del rendimiento de la aproximación es la tasa señal a ruido (SNR), definida como

$$SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{\|s\|^2}{\|e\|^2} \right) dB = -10 \log_{10} (\|\epsilon\|^2) dB \quad (11)$$

La solución LMS ofrece el mejor punto pese a la oblicuidad de la base vectorial. La ventaja de una fórmula general cuadrática es que toma en cuenta todos los parámetros de la señal sintética con respecto a la señal conocida. Responde a la pregunta sobre el significado de una frecuencia en un cambio abrupto de amplitud o de fase. Sabemos a través de Fourier que una discontinuidad requiere un número infinito de armónicas. Es entonces por la composición de la señal reconstruida que todos los parámetros tienen sentido. Ellos son capaces de reconstruir la mejor señal que el modelo puede ofrecer para la señal dada. Por tanto, es hasta que la señal aproximada es compuesta por la ecuación de síntesis que los parámetros adquieren una interpretación significativa.

Hasta aquí los estimados LMS se obtienen, medidos del subespacio definido por los términos de Taylor modulados a la frecuencia fundamental nominal mediante el operador E y su conjugado. La principal contribución de este artículo consiste en usar la información de fase ofrecida por los estimados LMS en \hat{p} para acercar más el subespacio a la señal disponible, modulando los vectores de la base con la exponencial compleja con el último perfil de fase disponible.

Iniciamos suponiendo una fase dinámica inicial nula:

$$\varphi_0(t) = 0 \quad (12)$$

y los parámetros LMS ofrecen la innovación:

$$\varphi_1(t) = \varphi_0(t) + \hat{\varphi}_1^{(d)}(t) \quad (13)$$

donde $\hat{\varphi}_k^{(d)}(t)$ es la fase determinada por un polinomio de Taylor de d -ésimo orden, correspondiente al polinomio pronosticado por el algoritmo LMS en el k -ésimo paso. Este procedimiento se puede repetir sucesivamente para mejorar el perfil de fase en los elementos de $e^{j(2\pi f_1 t + \varphi_1(t))}$ en el operador del algoritmo LMS como sigue:

$$\varphi_k(t) = \varphi_{k-1}(t) + \hat{\varphi}_k^{(d)}(t) \quad (14)$$

hasta que un error muy pequeño sea alcanzado. De esta manera, el subespacio es atraído sucesivamente hacia la señal de entrada. Y el algoritmo siempre ofrece las mejores estimaciones de fasor, frecuencia, y ROCOF, que ofrece el subespacio más cercano.

El k -ésimo patrón de fase no fundamental

$$\hat{\varphi}_k^{(d)}(t) = \hat{\varphi}(t_0) + \hat{\dot{\varphi}}(t_0)(t - t_0) + \dots + \frac{\hat{\varphi}^{(d)}(t_0)}{d!} (t - t_0)^d, \quad -\frac{1}{2}T \leq t \leq \frac{1}{2}T. \quad (15)$$

se obtiene de las siguientes ecuaciones para $d=3$:

$$\begin{aligned} \hat{a}(t_0) &= |\hat{p}_0|, \\ \hat{a}(t_0) &= \text{Re}\{\hat{p}_1 e^{-j\hat{\varphi}(t_0)}\}, \\ \hat{a}(t_0) &= \text{Re}\{\hat{p}_2 e^{-j\hat{\varphi}(t_0)}\} + \hat{a}(t_0)\hat{\varphi}(t_0)^2, \\ \hat{a}(t_0) &= \text{Re}\{\hat{p}_3 e^{-j\hat{\varphi}(t_0)}\} + 3\hat{a}(t_0)\hat{\varphi}(t_0)\hat{\dot{\varphi}}(t_0) + 3\hat{a}(t_0)\hat{\varphi}(t_0)^2; \\ \hat{\varphi}(t_0) &= \angle \hat{p}_0, \\ \hat{\dot{\varphi}}(t_0) &= \frac{\text{Im}\{\hat{p}_1 e^{-j\hat{\varphi}(t_0)}\}}{\hat{a}(t_0)}, \\ \hat{\ddot{\varphi}}(t_0) &= \frac{\text{Im}\{\hat{p}_2 e^{-j\hat{\varphi}(t_0)}\} - 2\hat{a}(t_0)\hat{\dot{\varphi}}(t_0)}{\hat{a}(t_0)}, \end{aligned} \quad (16)$$

Estas se obtienen fácilmente evaluando las ecuaciones del Apéndice A en el centro del intervalo temporal, t_0 . Note que las derivadas de amplitud dependen de las partes reales de las estimaciones fasoriales, y las derivadas de la fase, de las partes imaginarias. Por tanto, en la medida que mejoramos nuestro patrón de fase agregando polinomios de fase, los estimados fasoriales se convierten en amplitudes reales, y los estimados de fase pasan al operador E . Por lo tanto, el método separa las estimaciones de amplitud y fase y sus derivadas correspondientes. También es posible hacer esto varias veces hasta que la norma del error de aproximación sea suficientemente pequeña.

Al aplicar este procedimiento a señales provenientes de un sistema de potencia se observó que el procedimiento es capaz de enganchar la fase de la señal con suficiente precisión a partir de la primera corrida del algoritmo LMS. En la segunda vuelta el diferencial de fase era ya del orden de miliradianes. Entonces, se decidió correr el algoritmo LMS con la fase aproximada de la etapa precedente. Esto es suficiente para asegurar el seguimiento sucesivo del perfil de fase de la señal. Este es el procedimiento que se siguió para obtener los resultados numéricos de este artículo.

La implementación digital de (5) con una frecuencia de muestreo de Nf_1 Hz, requiere muestrear los términos de Taylor en la matriz T en los instantes $t_n = \frac{n}{Nf_1}$. Si el estimado obtenido con la matriz $T = [1 \ n \ n^2/2 \ \dots]$ en (5)

es $\hat{\theta}$, entonces, tenemos las siguientes relaciones entre los elementos de \hat{p} y $\hat{\theta}$: $\hat{p}_k = (Nf_1)^k \hat{\theta}_k, k = 0, 1, \dots, d, Y$

$$\hat{\varphi}_k^{(3)}(n) = \hat{\varphi} + \hat{\varphi} \frac{n}{Nf_1} + \frac{\hat{\varphi}}{2} \left(\frac{n}{Nf_1}\right)^2 + \frac{\hat{\varphi}}{6} \left(\frac{n}{Nf_1}\right)^3 \quad (18)$$

donde $\hat{\varphi}_k^{(3)}(n)$ es la corrección del perfil de fase (a $\varphi_{k-1}(n)$) ofrecida por el algoritmo LMS en el k -ésimo paso.

Carga Computacional

Para una señal de longitud N , la estimación de estados fasoriales desde el plano de Fourier de frecuencia fundamental requiere $2(d+1)N^2$ productos. La pseudoinversa a la frecuencia fundamental es constante y calculada solamente una vez. En el algoritmo propuesto es necesario calcular una pseudoinversa para cada estimación de estados fasoriales. La inversa de la matriz de Gram necesita la inversión de dos matrices de $(d+1) \times (d+1)$ datos. Y la pseudoinversa requiere $4(d+1)^2N$ productos. Entonces la carga computacional para cada estimación de estados fasoriales aumenta a $2(d+1)N^2 + 4(d+1)^2N + 2(d+1)^2$, asumiendo que el costo de cada inversión es de $O((d+1)^2)$.

ASPECTOS TEÓRICOS

Esta sección explica los conceptos geométricos necesarios para entender las implicaciones de la biortogonalidad, concepto crucial para comprender completamente este artículo. En el Apéndice B se encuentran las formulaciones bien conocidas de la desigualdad de Bessel y de la igualdad de Parseval para el caso de subespacios generados por una base ortogonal. Aquí generalizamos tales teoremas para subespacios generados con una base vectorial oblicua.

En la mayoría de los libros de análisis funcional (ver por ejemplo),^{25,26} la desigualdad de Bessel y la igualdad de Parseval son demostradas asumiendo bases ortogonales. Los matemáticos se precipitan en la ortogonalidad, arguyendo que una base ortonormal puede ser derivada de cualquier base oblicua mediante el procedimiento de Gram-Schmith. Aquí mantenemos que se usa una base ortonormal únicamente por la simplicidad de la demostración. De manera que la prueba para una base oblicua es necesaria hoy en día para encontrar las formulaciones biortonormales. Esto es importante aquí, ya que para polinomios de Taylor de orden superior a cero, las bases formadas con los términos de Taylor son oblicuas. Y las estimaciones tanto del fasor, como de la frecuencia y su derivada (ROCOF) provienen de tal estructura vectorial.

Teorema 1. (Proyección y Desigualdad de Bessel Biortonormal) Sea x un elemento arbitrario de un espacio vectorial \mathcal{X} , y \hat{x}_- un elemento del subespacio $\mathcal{X}^n = \{\hat{x}_- | \hat{x}_- = X\hat{\alpha}\}$, generado por una secuencia contable de elementos oblicuos $\{x_i\}$ de x en la matriz X . Para cada $x \in \mathcal{X}$ existe un único $\hat{x}_- \in \mathcal{X}^n$ tal que $x = \hat{x}_- + \hat{x}_\perp$, y \hat{x}_\perp es ortogonal a cada uno de los elementos de la base $x_i, i=1, \dots, n$. Además, la desigualdad de Bessel biortonormal mantiene que $\hat{\alpha}^H (X^H X) \hat{\alpha} \leq \|x\|^2$.

Demostración. Para la primera parte tenemos

$$X^H(x - \hat{x}_-) - X^H(x - X\hat{\alpha}) = 0 \quad (19)$$

y por tanto

$$\hat{\alpha} = (X^H X)^{-1} X^H x \quad (20)$$

Y para la segunda parte, la prueba es como sigue:

$$\begin{aligned}
0 \leq \|x - \hat{x}\|^2 &= \|x - X\hat{\alpha}\|^2 \\
&= x^H x - x^H X\hat{\alpha} - \hat{\alpha}^H X^H x + \hat{\alpha}^H X^H X\hat{\alpha} \\
&= \|x\|^2 - \hat{\alpha}^H (X^H X)\hat{\alpha} - \hat{\alpha}^H (X^H X)\hat{\alpha} + \hat{\alpha}^H (X^H X)\hat{\alpha} \\
&= \|x\|^2 - \hat{\alpha}^H (X^H X)\hat{\alpha}
\end{aligned} \tag{21}$$

puesto que (20) $x^H X = \alpha^H (X^H X)$.

Es fácil ver de (20) que a pesar de que los vectores en X sean oblicuos, la Hermitiana de la matriz pseudoinversa $X^\dagger = (X^H X)^{-1} X^H$ y X forman un par de bases biortonormales, dado que $X^\dagger X = I$. Este resultado es algebraicamente sorprendente, y proviene de la ortogonalidad de la proyección. De (19) tenemos que el complemento \hat{x}_\perp es ortogonal no solamente a \hat{x}_- , sino también a todos los elementos del subespacio x^n , el cual es generado por X . Y la energía faltante en la desigualdad de Bessel es precisamente la energía del complemento: $\|\hat{x}_\perp\|^2 = \|x\|^2 - \|\hat{x}_-\|^2$. Así, el teorema Pitagoreano es más completo que la desigualdad de Bessel. Note que cuando la base vectorial en X es ortonormal, la expresión de la desigualdad de Bessel biortonormal se reduce a la del bien conocido caso de vectores ortonormales.

Por otra parte, Parseval afirma que la igualdad se cumple, si y solo si la señal de entrada se encuentra en el subespacio. En cuyo caso, la proyección preserva la energía de la señal. Probemos el teorema de Parseval con bases oblicuas.

Teorema 2. (Igualdad de Parseval Biortonormal) Si $x \in \chi^n$, entonces $\hat{\alpha}^H (X^H X)\hat{\alpha} \leq \|x\|^2$.

Demostración. Para $x = X\alpha$, se tiene $\hat{\alpha} = (X^H X)^{-1} X^H x = (X^H X)^{-1} X^H X\alpha = \alpha$, y entonces $\|x\|^2 = \alpha^H X^H X\alpha = \hat{\alpha}^H X^H X\hat{\alpha}$.

La biortogonalidad garantiza que si una señal de entrada tiene únicamente componentes del modelo de señal (vectores oblicuos x_i) los filtros biortonormales en la matriz pseudoinversa son capaces de separar perfectamente la señal en esas componentes una por una, sin ninguna interferencia entre ellos. Los filtros separan perfectamente (ortonormalmente) cada componente, de tal manera que los parámetros estimados son capaces de reconstruir perfectamente la señal. Sin embargo, si una componente oblicua no incluida en el modelo aparece en la señal de entrada, esa componente exógena tendrá una proyección con interferencia en las componentes oblicuas del modelo.

De acuerdo con la igualdad de Parseval, la biortogonalidad garantiza la descomposición y la reconstrucción perfecta de señales conteniendo términos de Taylor hasta del máximo grado incluido en el modelo de señal. En este caso, la biortonormalidad de las bases oblicuas trabaja tan bien como la ortonormalidad lo hace con las armónicas incluidas en la DFT.

Excepción hecha de la señal modulada senoidalmente, las señales de prueba del estándar de sincrofasores son versiones moduladas por términos de Taylor (con una discontinuidad en el origen). Entonces, fuera de los brincos, los filtros Taylor-Fourier ajustan perfectamente (biortonormalmente) las componentes de Taylor, y consecuentemente, en ausencia de ruidos aditivos o componentes fuera de banda de paso, los filtros ofrecen mediciones de estados fasoriales, mientras las señales contengan términos de Taylor de orden inferior al máximo incluido en el modelo.

Propiedades geométricas de las señales de prueba

El estándar mide separadamente los errores paramétricos en el error vectorial total (Total Vector Error, TVE), el error de frecuencia (Frequency Error, FE), y el error de la ROCOF (ROCOFE). El TVE mira solamente al plano de Fourier de frecuencia fundamental (término de Taylor de cero-ésimo orden del subespacio Taylor-Fourier), donde viven las senoidales de amplitud y fase constante (ver el primer conjunto de ecuaciones de (16) y (17)). Pero el fasor dinámico instantáneo $p(n)$, la frecuencia instantánea $f(n)$, y su derivada ROCOF(n) son conocidos solamente en las señales de prueba del estándar.

Todas las señales del estándar son construidas de acuerdo a la siguiente descomposición básica: En cualquier instante t , las señales de prueba se separan en dos componentes, una componente estática $s_c(t)$, la cuál está en el plano de Fourier de frecuencia fundamental, y una dinámica $s_d(t)$, la cuál está fuera de ese plano. Se tiene:

$$\begin{aligned}
 s(t) &= A(t) \cos(2\pi f_0 t + \Phi(t)) \\
 &= [A(t_0) + a(t - t_0)] \cos(2\pi f_0 t + \Phi(t_0) + \phi(t - t_0)) \\
 &= A(t_0) \cos \phi(t - t_0) \cos(2\pi f_0 t + \Phi(t_0)) \\
 &\quad - A(t_0) \sin \phi(t - t_0) \sin(2\pi f_0 t + \Phi(t_0)) \\
 &\quad + a(t - t_0) \cos(2\pi f_0 t + \Phi(t_0) + \phi(t - t_0))
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$= s_c(t) + s_d(t) \tag{23}$$

donde $a(t-t_0)$ y $\phi(t-t_0)$ son las series de Taylor alrededor de t_0 de $A(t)-A(t_0)$ y $\Phi(t)-\Phi(t_0)$ respectivamente. Estas series son puramente dinámicas.

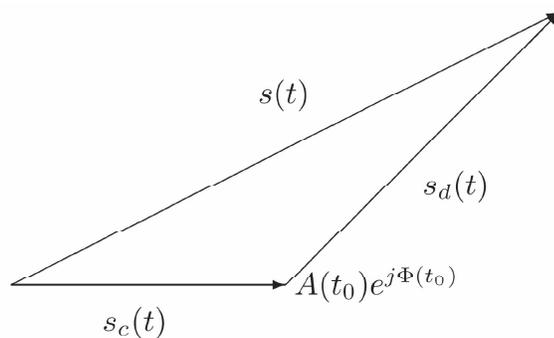


Fig. 1. Diagrama de la descomposición de señal $s(t)$ en sus componentes constante $s_c(t)$ y dinámica $s_d(t)$ que definen un hiper-plano del espacio de Hilbert.

La componente estática se puede encontrar simplemente removiendo las dinámicas. Es posible ver en (22), que si $a(t-t_0) = \phi(t-t_0) = 0$, $s(t)$ se reduce a $s_c(t) = A(t_0)\cos(2\pi f_0 t + \Phi(t_0))$. Y que su fasor dinámico instantáneo $A(t_0)e^{j\Phi(t_0)}$ se encuentra en el plano de Fourier de frecuencia fundamental. La componente dinámica es simplemente su componente complementaria $s_d(t) = s(t) - s_c(t)$, la cual es igual a la parte derecha de (22), pero con $[\cos\phi(t-t_0) - 1]$ en vez del factor $\cos\phi(t-t_0)$. Con este cambio, es claro que $s_d(t)$ es puramente dinámico, con $s_d(t_0) = 0$. El estándar supone que un buen algoritmo (TVE=0) es capaz en cada instante de admitir la componente estática, y de rechazar perfectamente las componentes dinámicas. Note en la figura 1, que esas componentes son oblicuas. Los filtros

deben de tener respuestas impulsionales oblicuas, y por tanto un buen algoritmo necesita filtros biortonormales. Al incluir hasta la componente de Taylor de k -ésimo orden, los filtros Taylor Fourier son capaces de rechazar perfectamente las componentes hasta de ese orden.

Consideraciones Geométricas del TVE

El error fasorial (TVE) entre el fasor instantáneo estimado $\hat{p}(n)$, y el verdadero $p(n)$ se define en el estándar como:

$$TVE(n) = \frac{|\hat{p}(n) - p(n)|}{|p(n)|} \quad (24)$$

y mide el módulo instantáneo del error fasorial normalizado en el plano de frecuencia fundamental de Fourier. Es equivalente a la distancia Euclidiana entre ambos parámetros, y de acuerdo al teorema de Parseval, es únicamente una medida completa cuando la señal está en ese subespacio. Es una medición excelente cuando el fasor instantáneo es conocido, como es el caso de las señales del estándar de sincrofasores. Pero esta distancia es insuficiente para comparar el rendimiento de diferentes algoritmos cuando la secuencia fasorial es desconocida, como es el caso de la mayoría de las aplicaciones prácticas, en las cuales solamente se dispone de las muestras de la señal. Debido a que el TVE desprecia información tan útil como las fluctuaciones de frecuencia y la ROCOF, es insuficiente para medir completamente la calidad de la aproximación a la señal de oscilación lograda por los parámetros estimados.

EVALUACIÓN DE FILTROS PLL TAYLOR-FOURIER

El rendimiento de los filtros PLL Taylor-Fourier es muy bueno cuando operan sobre segmentos de señal continua definidos por polinomios de Taylor, como las del estándar, ya que sus parámetros se ajustan perfectamente las condiciones estáticas y dinámicas impuestas por dichas señales. La amplitud, fase y frecuencia de éstas se definen por polinomios de Taylor en dos intervalos de tiempo separados por una discontinuidad. La señal con amplitud y fase sinusoidal también es aproximada con suficiente precisión con un polinomio de Taylor de tercer orden, como veremos en los resultados. Pero es sabido en análisis funcional que las discontinuidades son las enemigas de las descomposiciones de Fourier y de Taylor. Es bien conocido que una discontinuidad en el tiempo necesita un conjunto infinito de frecuencias en la base de Fourier, y nuestro filtro está equipado con solamente una de ellas. El estándar evalúa el rendimiento del transitorio con el TVE. Aquí se propone medir el rendimiento con el error de aproximación de la señal sintética, tomando en cuenta todos los parámetros estimados para reconstruir la señal aproximada.

Consideramos el filtro TF que incluye hasta el término de Taylor de 3-er orden ($d=3$), truncado con una ventana rectangular de dos ciclos de la frecuencia fundamental, el cuál es el más corto que ofrece la banda de paso más amplia con ganancias lisas. Las bandas de paso de los más largos son más angostas como puede verse en la figura 4 de.² Las señales son muestreadas a $N=48$ muestras por ciclo, y se obtienen estimados instantáneos en cada muestra. En lo que sigue, se presentan las señales de prueba de la más conveniente a la menos ajustada.

Rampa de Frecuencia

La señal de frecuencia modulada con una rampa de frecuencia se adecua perfectamente con el modelo de señal polinomial de los filtros TF PLL. Esta señal es definida por la amplitud y fase siguientes:

$$a(t) = 1 \quad (25)$$

$$\varphi(t) = \pi R_f t^2 u(t) \quad (26)$$

donde $u(t)$ es la función escalón, y $R_f=1\text{Hz/s}$. Como puede verse, los segmentos de esta señal quedan cubiertos por el subespacio de los filtros PLL TF, excepto cuando contienen la discontinuidad en $t=0$. Por tanto, los estimados de amplitud, fase, frecuencia y ROCOF son mediciones perfectas, excepto cuando los filtros procesan la discontinuidad. Los errores de estimación son del orden de 10^{-14} con el método propuesto. En particular el error de la ROCOF en estado estable es de 10^{-12} . Por otra parte, la SNR de la señal reconstruida tiene un mínimo de 98 dB en el pico del transitorio, y un valor medio de 158 dB cuando los segmentos de la señal están contenidos en el subespacio. Por ende, se puede afirmar que alcanzan reconstrucción perfecta casi en todas partes, para propósitos prácticos.

Las estimaciones se muestran en las figuras 2 y 3. Fuera de la discontinuidad los errores son pequeñísimos. Estos resultados son excelentes.

Cuando el patrón de fase recursivo es forzado a cero (i. e. $\phi_k^{(d)}(n) = 0$), los errores son incomparables debido a la acumulación de error, ya que la demodulación es hecha desde la frecuencia fundamental, con un TVE de 200% al final del intervalo de tiempo de la figura 3. Este enorme TVE es debido únicamente al error de fase producido por el desajuste polinomial de la fase. Los errores de frecuencia y ROCOF sigue una curva parabólica y lineal, respectivamente. Y cuando la fase es modelada por un polinomio de Taylor de segundo orden (caso FLL), el error de frecuencia es nulo, pero el de la ROCOF es lineal.

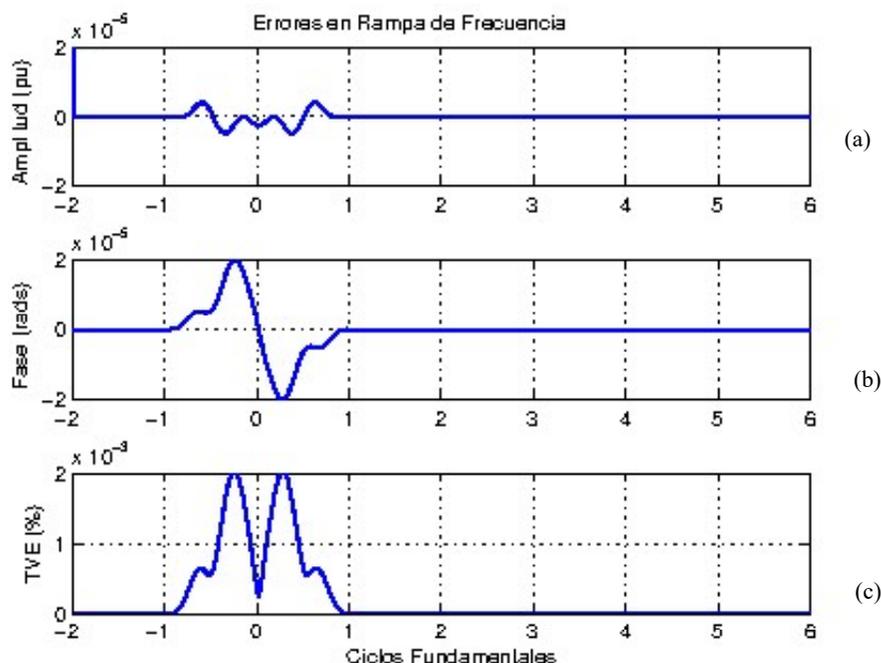


Fig. 2. Errores de amplitud (a), y fase (b), de la señal modulada con una rampa de frecuencia. En (c), el TVE en %.

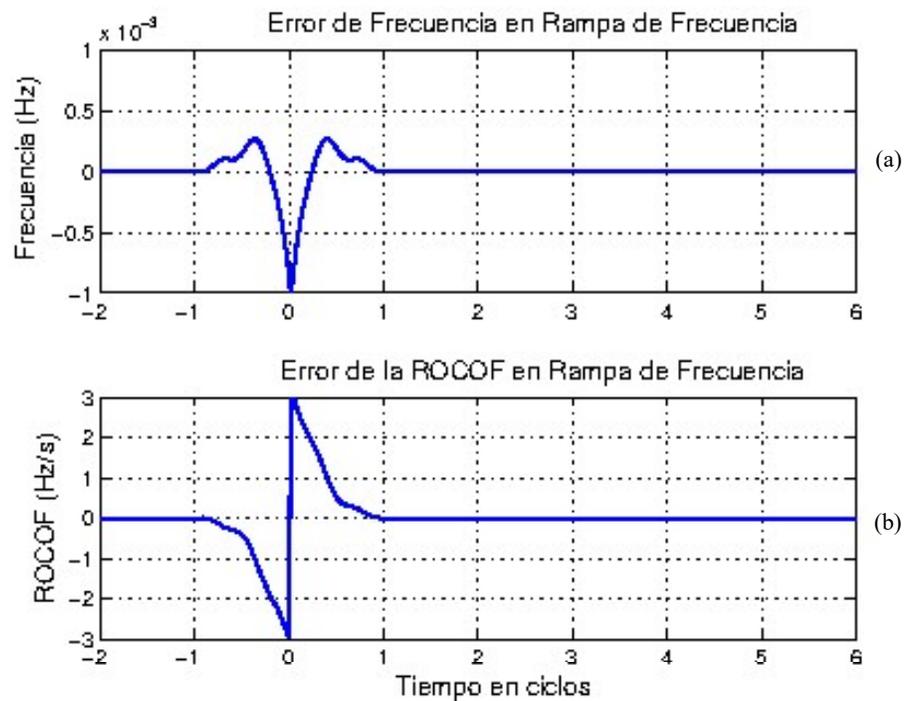


Fig. 3. Errores de frecuencia (a) y de la ROCOF (b) en la señal con una rampa de frecuencia. Las estimaciones de amplitud y fase son una constante y una parábola, respectivamente.

Respuestas de amplitud y de fase

En este caso la amplitud y la fase de la señal de prueba se definen como sigue:

$$a(t) = 1 + k_x u(t) \quad (27)$$

$$\varphi(t) = k_\varphi u(t) \quad (28)$$

donde $u(t)$ es la función escalón unitario. El tamaño del escalón de amplitud es de $k_x = 0.1$ ($k_\varphi = 0$), y el de la fase $k_\varphi = \pi/18$ ($k_x = 0$). Aun cuando ambas funciones sean menos suaves que los de la señal con rampa de frecuencia, pueden ajustarse perfectamente con los términos de Taylor de orden cero en los segmentos continuos.

Las estimaciones de amplitud y fase son excelentes en estado estable, como puede apreciarse en las figuras 4 y 5, las cuales muestran los principales resultados. Nuevamente, los errores de amplitud, fase, y frecuencia en estado estable son de 10^{-14} . La SNR de la aproximación es de 150 dB en estado estable, y decae hasta 35 dB en la mitad del transitorio. Esto significa que únicamente falta el 0.04% de la energía de la señal en la señal reconstruida en la punta del transitorio debido a la discontinuidad. Y de nuevo, una reconstrucción perfecta se logra en estado estable, indicando que la señal de prueba está en el subespacio de los filtros TF con PLL polinomial. De acuerdo con el Teorema de Parseval, la señal estimada preserva completamente la energía de la señal de entrada, con un ajuste perfecto.

En este caso, también los filtros tradicionales Taylor-Fourier² alcanzan un rendimiento similar en estado estable, ya que la señal de entrada permanece a la frecuencia fundamental nominal. El PLL polinomial no es necesario cuando la señal no contiene desviaciones de frecuencia o de fase.

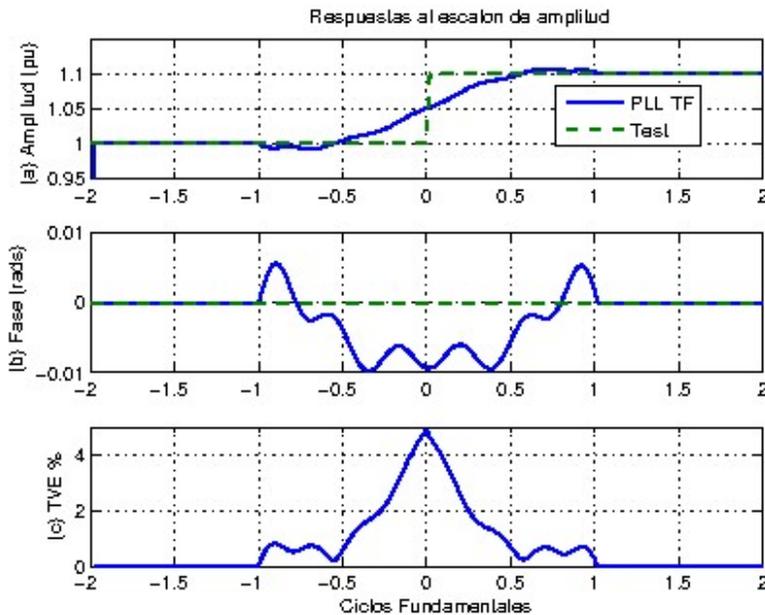


Fig. 4. Estimaciones fasoriales correspondientes a la señal de prueba con un escalón de amplitud: (a) amplitud en pu; (b) fase en rads; y, (c) TVE en %.

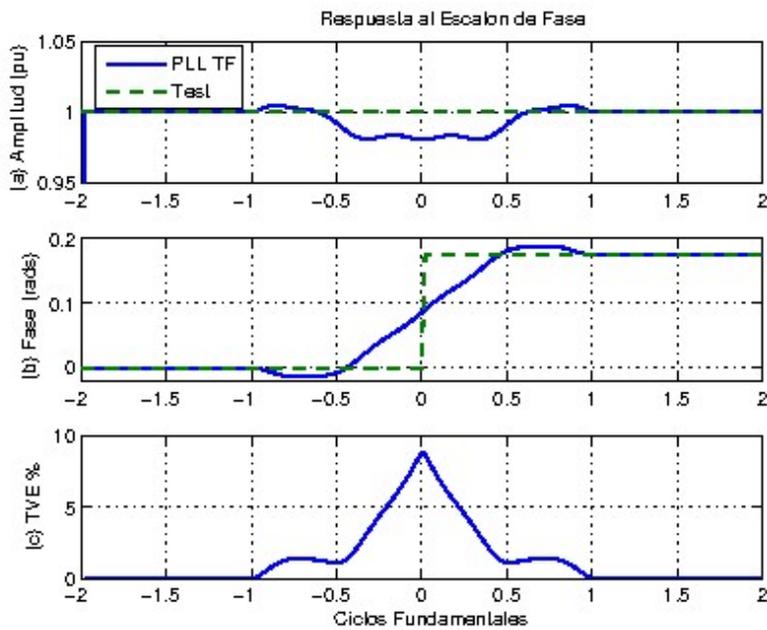


Fig. 5. Estimaciones de la señal de prueba con escalón de fase con el PLL TF: (a) amplitud en pu; (b) fase en rads; y, (c) TVE en %.

Señal modulada en amplitud y fase

La señal de prueba se define con la siguiente amplitud y fase

$$a(t) = 1 + k_a u(t) \cos \omega t \tag{29}$$

$$\varphi(t) = k_\varphi u(t) \cos(\omega t - \pi) \tag{30}$$

donde $k_a = k_\varphi = 0.1$, y $\omega = 2\pi 5$. De nuevo, ambas funciones se definen con funciones suaves, pero en este caso de clase C^∞ , con una discontinuidad en $t=0$.

Esta señal está claramente fuera del subespacio PLL Taylor-Fourier de 3-er orden debido a que las derivadas superiores a tres no están incluidas en el modelo, sobretodo en los puntos de inflexión. Pero en intervalos donde los segmentos sinusoidales son casi parabólicos, el punto de la señal es muy cercano al subespacio con muy pequeños errores de aproximación, como veremos en los resultados siguientes. De hecho, los mayores errores se obtienen en los puntos de inflexión de las oscilaciones. La figura 6 muestra los errores de amplitud y fase del método propuesto. Se aprecia que dichos errores son de hecho muy pequeños. El TVE es también muy pequeño para esta señal. Por otra parte, las figuras 7 y 8 muestran las estimaciones de frecuencia y de ROCOF y sus errores correspondientes.

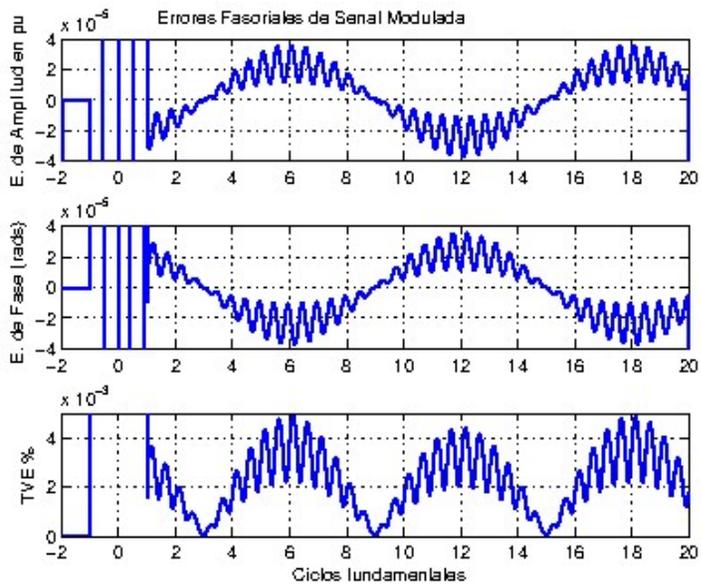


Fig. 6. Errores de amplitud (a) y fase (b) con TVE (c) en por ciento para la señal de prueba modulada en amplitud y fase.

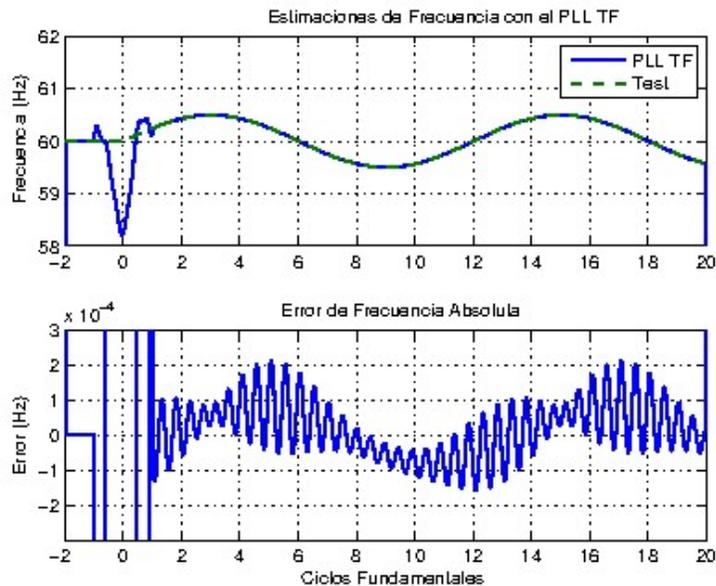


Fig. 7. Frecuencia (a) y error de estimación (b) en la señal de prueba modulada en amplitud y fase.

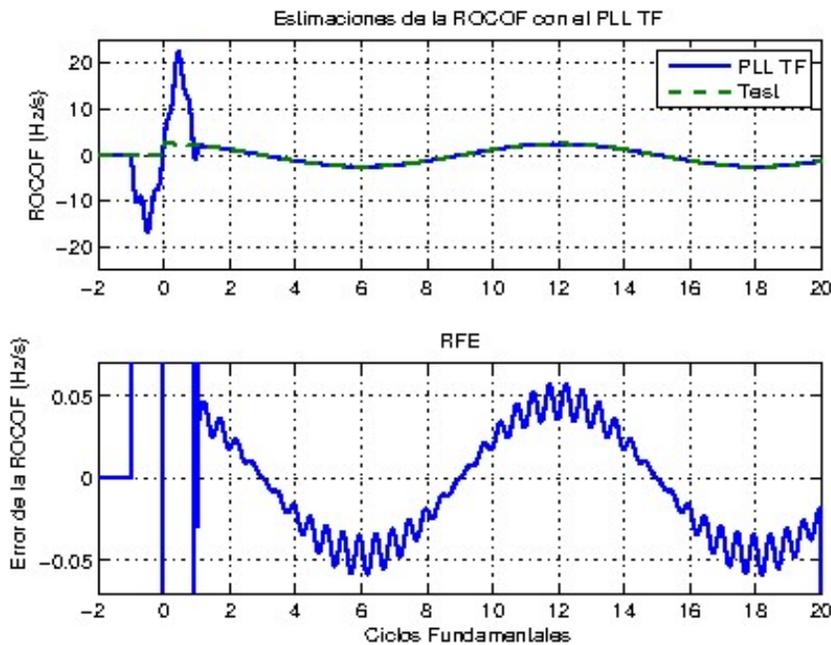


Fig. 8. ROCOF (a) Error ROCOF (b) de la señal modulada en amplitud y fase.

Nuevamente, el error de frecuencia es inferior a 0.2 mHz, y la ROCOF es inferior a 0.05 Hz/s. Finalmente, en la gráfica al fondo de la figura 9, se puede apreciar que la SNR de la aproximación es 100dB en estado estable, y 32 dB en la punta del error debido a la discontinuidad. De nuevo, un resultado sobresaliente para esta señal.

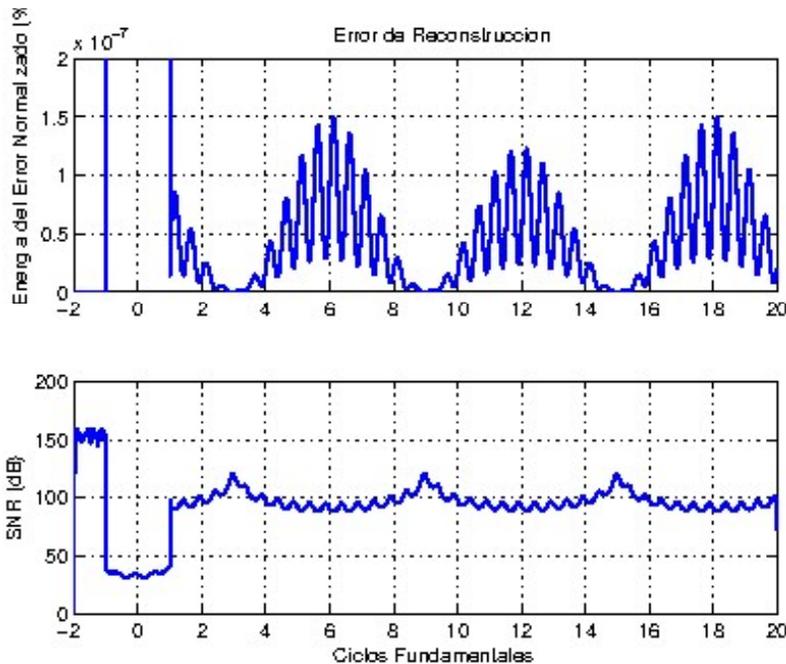


Fig. 9. Energía del error normalizado (a) y SNR (b) logrado en la señal modulada en amplitud y fase.

Los errores de los filtros Taylor-Fourier con FLL son muy similares a los ilustrados, excepto el error de la ROCOF en la figura 8, los cuáles son muy grandes (200 Hz/s) para el FLL.

Señal Real

La señal en^{2,19}, y disponible en²⁷ es analizada con este método y los resultados se presentan en la figura 10. La SNR de la aproximación de esta señal, la cual contiene una 3^a armónica, se muestra en la figura 11. Se puede apreciar el orden

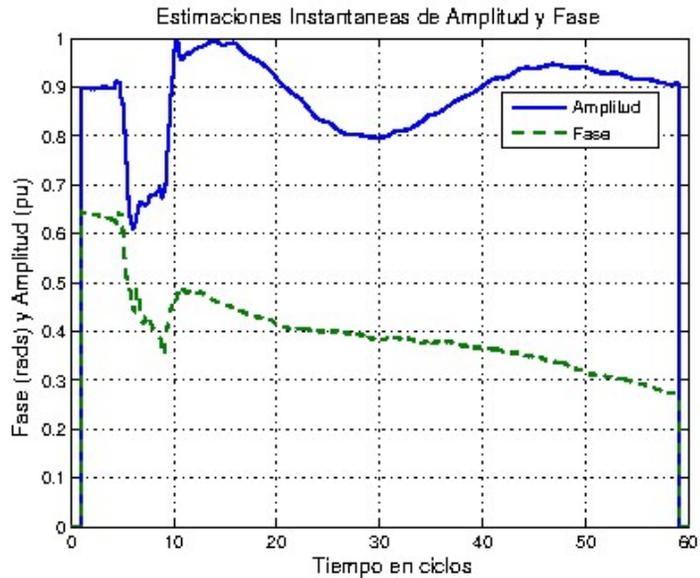


Fig. 10. Estimaciones instantáneas de amplitud y fase de la señal de un sistema de potencia real.

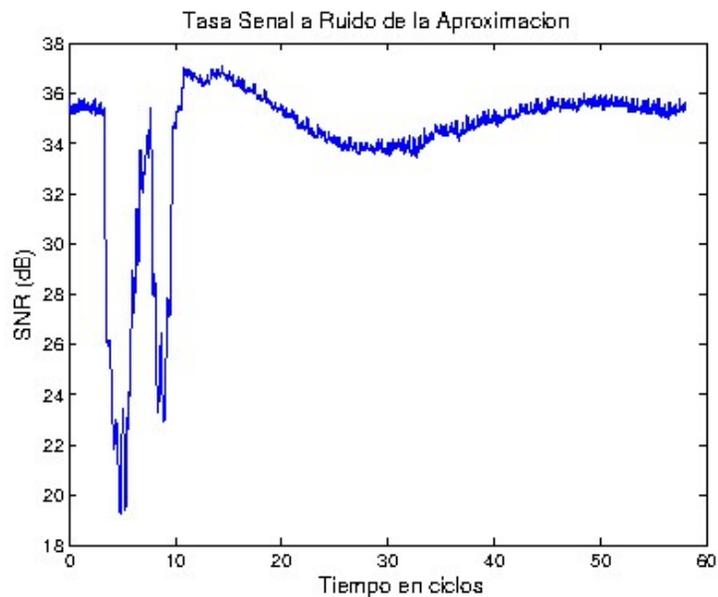


Fig. 11. SNR incurrido en las estimaciones de amplitud y fase de la señal de un sistema de potencia real.

de los errores incurridos en presencia de transitorios (cerca de 20dB), y los debidos a la presencia de la 5a armónica, de alrededor de 36 dB. La eficacia de la aproximación es aún aceptable. Esto significa que a la señal aproximada le falta únicamente diez milésimas de la energía total de la señal.

Análisis del Ruido

Se considera la media del TVE debido a la presencia de ruido aditivo Gaussiano blanco. La figura 12 muestra el nivel medio de TVE en función del nivel de ruido dado por los dBs de SNR. Para cada nivel constante de SNR, se obtiene la media de TVE de una serie de estimaciones fasoriales tomadas sucesivamente durante diez ciclos. Se puede observar que para los niveles usuales de SNR (>50 dB), el TVE medio es inferior de $10^{-1}\%$. La figura 13 muestra los errores en frecuencia y de la ROCOF obtenidos con una SNR de 70dB.

Error fasorial debido a las armónicas

La figura 14 ilustra el TVE medio debido a armónicas $h=2, \dots, 23$, e inter-armónicas con una amplitud constante de 10%. La gráfica de arriba muestra el TVE obtenido con solamente una componente en la base vectorial, mientras que la de abajo, cómo el TVE puede reducirse al incorporar en la base vectorial una componente frecuencial que se adapta a la de la armónica, usando PLL polinomial en ambas frecuencias. De esta manera, la biortonormalidad separa perfectamente ambas componentes. Como puede verse en la figura 14, el TVE medio es extremadamente pequeño (de aproximadamente 3×10^{-13}). Las frecuencias inter-armónicas se exploran cada cuarto de frecuencia fundamental. Por supuesto

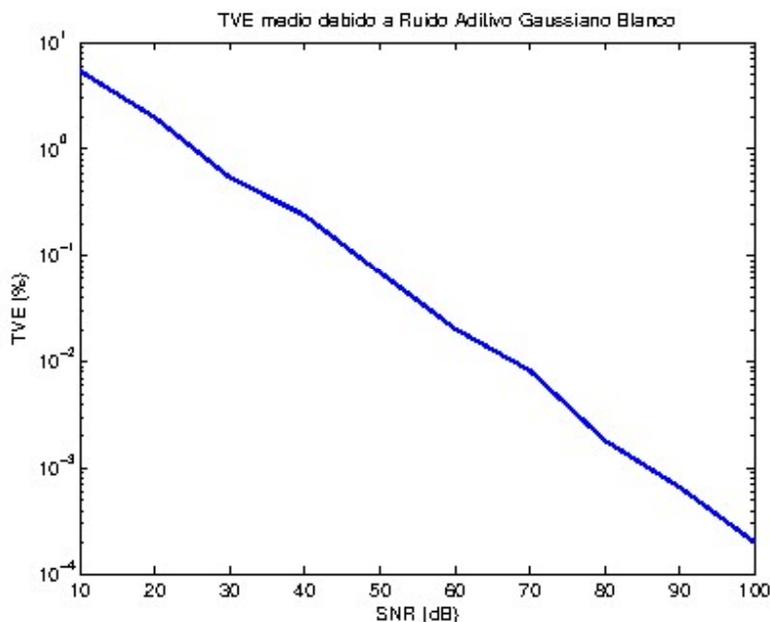


Fig. 12. TVE como función de la SNR con ruido Gaussiano aditivo blanco.

que esta solución incrementa el costo computacional del algoritmo. La figura 15 ilustra los errores de frecuencia y ROCOF producidos durante diez ciclos de la armónica más alta (la 23 -ava). De nuevo, ambos errores son casi nulos (0.5×10^{-13}).

10^{-13} y 1×10^{-13}), respectivamente. Y son del mismo orden para todas las armónicas e inter-armónicas. Cuando las armónicas o inter-armónicas son desconocidas, se puede usar FFT para detectarlas, y entonces el algoritmo PLL polinomial se iniciaría incluyendo estas componentes, y seguir su fase con mejor precisión. Sin embargo, se requiere más investigación para implementar esta posible solución.

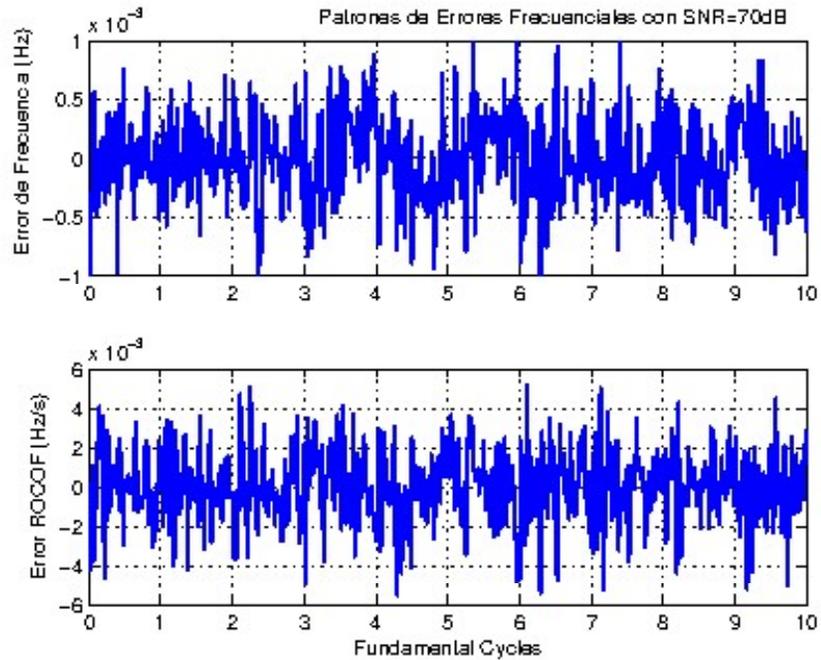


Fig. 13. Errores de frecuencia durante diez ciclos con dB de SNR.

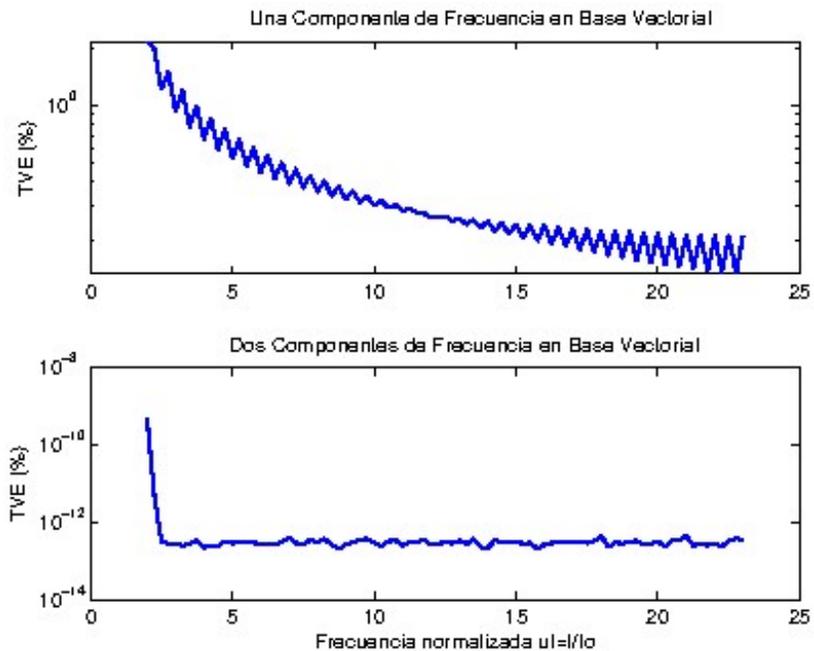


Fig. 14. TVE medio debidos a interferencia armónica e inter-armónica, a) con una componente de frecuencia, y b) con dos componentes de frecuencia en la base vectorial.

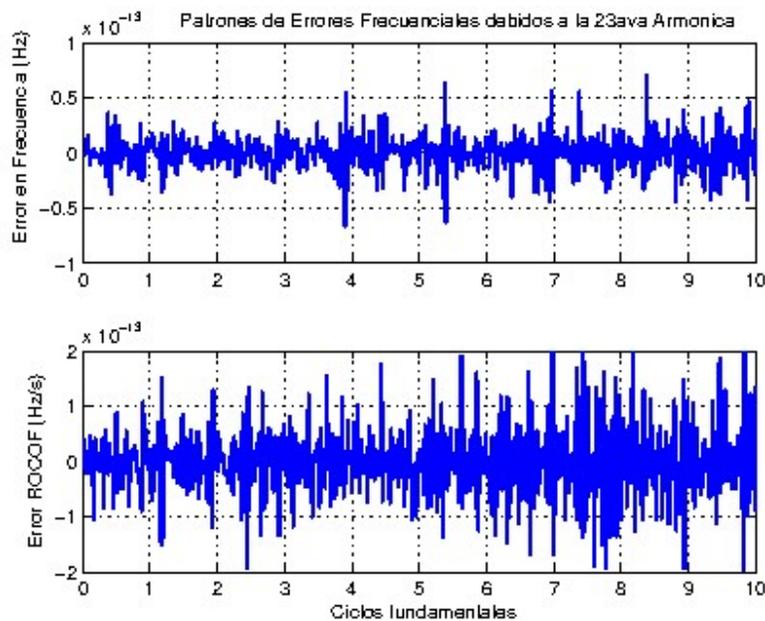


Fig. 15. Error de frecuencia y de la ROCOF debidos a la 23ava armónica.

DISCUSIÓN

Cuando las señales de prueba están contenidas en el subespacio Taylor-Fourier de fase polinomial (IV-A, IV-B) el TVE es del orden de $10^{-13}\%$, en la primera señal el TVE máximo en la discontinuidad es de $2.5 \times 10^{-3}\%$, y en la segunda señal de 5 y 10% para amplitud y fase, respectivamente, con un transitorio de 2 ciclos (33 ms para 60 Hz) alrededor de la discontinuidad, y un sobretiro de 0.7% en amplitud y 0.013 de ángulo de fase. En el caso de la señal modulada en amplitud y fase IV-C, el TVE es inferior a 4×10^{-3} , y el error máximo de frecuencia y ROCOF es de 2×10^{-4} Hz y 0.05 Hz/s, respectivamente. En el caso de la señal real estos errores no pueden ser medidos ya que se desconocen los parámetros de la señal. En el caso de presencia de ruido (IV-E) TVEs inferiores a 0.1% pueden alcanzarse con SNRs ≥ 50 dB, para los cuales el error de frecuencia y ROCOF son inferiores a 10^{-3} Hz y 6×10^{-3} Hz/s. Finalmente, en el caso del TVE ante la presencia de armónicas IV-F, los errores de frecuencia y ROCOF son casi cero (10^{-13}) para todas las armónicas e inter-armónicas consideradas, asumiendo que sus frecuencias son conocidas a priori. Es evidente que los rangos de error están muy por abajo de las umbrales del estándar.¹ Un buen resumen tabular de las cotas del estándar para las señales de prueba puede encontrarse en.²⁸ Además, los resultados obtenidos mejoran los comparables en¹⁰ con TVEs más pequeños, y con colas de transitorias más cortas.

CONCLUSIONES

El sistema propuesto trabaja como un observador de fase y amplitud, ofreciendo mediciones de estados fasoriales cuando el punto de la señal se encuentra en el subespacio dinámico Taylor-Fourier, y las mejores estimaciones de derivadas fasoriales cuando la señal se encuentra fuera de su alcance. Los filtros adaptivos siguen instantáneamente la fase y son máximamente lisos junto a la frecuencia instantánea. El esquema alcanza errores tolerables en señales con

SNR superiores a 50dB. Se puede aplicar para extraer armónicas indeseables y reducir el error fasorial. La adaptación a la fase mejora las estimaciones de los esquemas existentes actuales, sin embargo sus estimaciones no son tan buenas ante discontinuidades de amplitud, fase o frecuencia, debido a la dificultad para representarlas con polinomios de Taylor.

El resultado podría extenderse a todas las frecuencias incluidas en la transformada Taylor-Fourier, evitando que las frecuencias instantáneas no se colapsen, contribuyendo así a la solución de problemas más amplios de estimación espectral: ofreciendo representaciones espectrales más exactas que las que ofrece la tradicional DFT, que ofrece las más groseras por corresponder al Taylor-Fourier de orden cero. Además de la excelente contribución al problema de estimación de sincrofasores, el resultado podría tener un impacto en el área más amplia de análisis dinámico, o análisis tiempo-frecuencia, debido a su formidable capacidad de seguir fluctuaciones dinámicas de frecuencias.

RECONOCIMIENTOS

El autor agradece al Dr. Edward J. Powers por su valioso consejo de fijarse en la fase al resolver problemas de medición fasorial.

Apéndice A

Derivadas del fasor dinámico

Si $a(t)e^{j\varphi(t)}$ es el fasor dinámico, entonces sus derivadas son las siguientes:

$$p(t) = a(t)e^{j\varphi(t)}$$

$$\dot{p}(t) = [\dot{a}(t) + ja(t)\dot{\varphi}(t)]e^{j\varphi(t)},$$

$$\ddot{p}(t) = [\ddot{a}(t) - a(t)\dot{\varphi}(t)^2 + j(a(t)\ddot{\varphi}(t) + 2\dot{a}(t)\dot{\varphi}(t))]e^{j\varphi(t)}$$

$$\begin{aligned} \hat{\ddot{p}}(t) = & [\ddot{a}(t) - 3a(t)\dot{\varphi}(t)\ddot{\varphi}(t) - 3\dot{a}(t)\dot{\varphi}(t)^2 \\ & + j(a(t)\ddot{\varphi}(t) - a(t)\dot{\varphi}(t)^3 + 3\dot{a}(t)\ddot{\varphi}(t) + 3\ddot{a}(t)\dot{\varphi}(t))]e^{j\varphi(t)}. \end{aligned}$$

Apéndice B

Pruebas de la desigualdad de Bessel e igualdad de Parseval

Se presentan las pruebas de la Desigualdad de Bessel y de la Igualdad de Parseval. Ambos teoremas son clásicamente probados usando bases ortonormales.

Teorema B.1. (Proyección y Desigualdad de Bessel Ortonormal) Sea x y x_- un elemento arbitrario del espacio χ , y x_- un elemento del subespacio $\mathcal{X}^n = \{x_- | x_- = \Phi\alpha\}$, generado por una secuencia contable de elementos ortonormales $\{\varphi_i\}$ de χ en la matriz Φ . Para cada $x \in \chi$ existe un único $\hat{x}_- \in \mathcal{X}^n$ tal que $x = \hat{x}_- + \hat{x}_\perp$, y \hat{x}_\perp es ortogonal a cada uno de los elementos de la base $\varphi_i, i = 1, \dots, n$. Además, la desigualdad de Bessel mantiene que $\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \leq \|x\|^2$ para todo $x \in \chi$.

Demostración. Para la primera parte tenemos

$$\Phi^H(x - \hat{x}_-) = \Phi^H(x - \Phi\hat{\alpha}) = 0$$

y por tanto

$$\hat{\alpha} = (\Phi^H \Phi)^{-1} \Phi^H x = \Phi^H x \quad (31)$$

ya que $\Phi^H \Phi = I$, la cual es precisamente la condición de ortonormalidad de los vectores en Φ .

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x - \hat{x}\|^2 &= \|x - \Phi \hat{\alpha}\|^2 \\ &= x^H x - x^H \Phi \hat{\alpha} - \hat{\alpha}^H \Phi^H x + \hat{\alpha}^H \Phi^H \Phi \hat{\alpha} \\ &= \|x\|^2 - \hat{\alpha}^H \hat{\alpha} - \hat{\alpha}^H \hat{\alpha} + \hat{\alpha}^H \hat{\alpha} \\ &= \|x\|^2 - \hat{\alpha}^H \hat{\alpha} = \|x\|^2 - \|\hat{\alpha}\|^2 \end{aligned}$$

porque $\alpha^H = x^H \Phi$, y $\Phi^H \Phi = I$. Entonces tenemos la desigualdad de Bessel $\|\hat{\alpha}\|^2 \leq \|x\|^2$.

Teorema B.2. (Igualdad de Parseval Ortonormal) Si $x \in \chi^n$, entonces $\|\alpha\|^2 = \|x\|^2$.

Demostración. Para $x = \Phi \alpha$, se tiene $\hat{\alpha} = \Phi^H x = \Phi^H \Phi \alpha = \alpha$, y entonces $\|x\|^2 = \alpha^H \Phi^H \Phi \alpha = \|\alpha\|^2$.

La igualdad de Parseval es importante porque indica que la energía de la señal es preservada en una transformación. Esto se cumple solamente cuando la señal se encuentra en el subespacio. Los matemáticos la usan para probar convergencia en subespacios completos.

REFERENCIAS

1. IEEE standard for synchrophasor measurements for power systems, IEEE Std C37.118.1-2011 (Revision of IEEE Std C37.118-2005), pp. 1-61, Dec 2011.
2. J. A. de la O Serna, Dynamic phasor estimates for power system oscillations, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 56, no. 5, pp. 1648-1657, Oct 2007.
3. W. Premerlani, B. Kasztenny, and M. Adamiak, Development and implementation of a synchrophasor estimator capable of measurements under dynamic conditions, IEEE Trans. Power Del., vol. 23, no. 1, pp. 109-123, Jan 2008.
4. R. Mai, Z. He, L. Fu, B. Kirby, and Z. Q. Bo, A dynamic synchrophasor estimation algorithm for online application, IEEE Trans. Power Del., vol. 25, no. 2, pp. 570-578, April 2010.
5. D. Belega and D. Petri, Accuracy analysis of the multicycle synchrophasor estimator provided by the interpolated DFT algorithm, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 62, no. 5, pp. 942-953, May 2013.
6. H. Xue, D. Song, and R. Yang, Consecutive DFT method for instantaneous oscillating phasor measurement, IEEE Trans. Power Syst., vol. 28, no. 4, pp. 4634-4644, Nov 2013.
7. D. Belega, D. Macii, and D. Petri, Fast synchrophasor estimation by means of frequency-domain and time-domain algorithms, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 63, no. 2, pp. 388-401, Feb 2014.
8. P. Zhang, H. Xue, R. Yang, and J. Zhang, Shifting window average method for phasor measurement at offnominal frequencies, IEEE Trans. Power Del., vol. PP, no. 99, pp. 1-1, 2014.

9. P. Castello, M. Lixia, C. Muscas, and P. Pegoraro, Impact of the model on the accuracy of synchrophasor measurement, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 61, no. 8, pp. 2179-2188, Aug 2012.
10. M. Karimi-Ghartemani, B.-T. Ooi, and A. Bakhshai, Application of enhanced phase-locked loop system to the computation of synchrophasors, *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 26, no. 1, pp. 22-32, Jan 2011.
11. M. Reza, M. Ciobotaru, and V. Agelidis, Accurate estimation of single-phase grid voltage parameters under distorted conditions, *IEEE Trans. Power Del.*, vol. PP, no. 99, pp. 1-1, 2014.
12. K. Duda and S. Barzentewicz, Interpolated DFT for windows, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 63, no. 4, pp. 754-760, April 2014.
13. A. Roscoe, I. Abdulhadi, and G. Burt, P-class phasor measurement unit algorithms using adaptive filtering to enhance accuracy at off-nominal frequencies, in *Smart Measurements for Future Grids (SMFG)*, 2011 IEEE International Conference on, Nov 2011, pp. 51-58.
14. ---, P and m class phasor measurement unit algorithms using adaptive cascaded filters, *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 28, no. 3, pp. 1447-1459, July 2013.
15. A. J. Roscoe, G. M. Burt, and G. Rietveld, Improving frequency and rocof accuracy during faults, for p class phasor measurement units, in *Applied Measurements for Power Systems (AMPS)*, 2013 IEEE International Workshop on, Sept 2013, pp. 97-102.
16. P. Castello, J. Liu, A. Monti, C. Muscas, P. A. Pegoraro, and F. Ponci, Toward a class $p + m$; phasor measurement unit, in *Applied Measurements for Power Systems (AMPS)*, 2013 IEEE International Workshop on, Sept 2013, pp. 91-96.
17. D. Petri, D. Fontanelli, D. Macii, and D. Belega, A DFT-based synchrophasor, frequency and rocof estimation algorithm, in *Applied Measurements for Power Systems (AMPS)*, 2013 IEEE International Workshop on, Sept 2013, pp. 85-90.
18. M. Chakir, I. Kamwa, and H. Le Huy, Extended C37.118.1 PMU algorithms for joint tracking of fundamental and harmonic phasors in stressed power systems and microgrids, *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 29, no. 3, pp. 1465-1480, June 2014.
19. J. A. de la O Serna, Synchrophasor estimation using prony's method, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 62, no. 8, pp. 2119-2128, Aug 2013.
20. P. Banerjee and S. Srivastava, A subspace-based dynamic phasor estimator for synchrophasor application, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 61, no. 9, pp. 2436-2445, Sept 2012.
21. S. Jain and S. Singh, Exact model order esprit technique for harmonics and interharmonics estimation, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 61, no. 7, pp. 1915-1923, July 2012.
22. D. Kundu and S. Nandi, *Statistical signal processing frequency estimation*. Springer, 2012.
23. J. A. de la O Serna and M. A. Platas-Garza, Maximally flat differentiators through WLS Taylor decomposition, *Digital Signal Processing*, vol. 21, no. 2, pp. 183 - 194, Mar 2011.

24. M. A. Platas-Garza and J. A. de la O Serna, Dynamic harmonic analysis through Taylor-Fourier transform, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 60, no. 3, pp. 804-813, March 2011.
25. G. E. Shilov and R. A. Silverman, Elementary Functional Analysis. Dover Publications, 1996.
26. A. N. Michel and C. J. Herget, Algebra and Analysis for Engineers and Scientists. Birkhäuser, 2007.
27. Oscillation.mat, 4shared. [Online]. Available: <http://www.4shared.com/file/410BNwOJba/oscillation.html>. [Accessed: 08-Apr-2014]=0pt
28. P. Castello, J. Liu, C. Muscas, P. Pegoraro, F. Ponci, and A. Monti, A fast and accurate pmu algorithm for P+M class measurement of synchrophasor and frequency, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. PP, no. 99, pp. 1-1, 2014.



The poster features a dark teal background on the left and a photograph of a city skyline at night with lights reflecting on water on the right. The IMPI logo, consisting of a circle with three wavy lines and the letters 'IMPI', is positioned in the upper left. The text 'IMPI'S 51ST ANNUAL MICROWAVE POWER SYMPOSIUM' is centered in the upper half, with the tagline 'The Premier Industry-Wide Microwave Power Event' below it. The year '2017' is prominently displayed in large white font, followed by 'CALL FOR PAPERS'. The submission deadline 'February 1, 2017' is clearly stated. A paragraph of text describes the institute's invitation to scientists and engineers. The dates 'June 20-22, 2017' and the location 'Sonesta Hotel Coconut Grove, Miami, Florida, USA' are listed at the bottom left. The bottom right section, on a white background, provides contact information for the International Microwave Power Institute, including its address, phone number, email, and website.

 **IMPI'S 51ST ANNUAL
MICROWAVE POWER
SYMPOSIUM**
The Premier Industry-Wide Microwave Power Event

2017
CALL FOR PAPERS

Submission Deadline: February 1, 2017

The International Microwave Power Institute invites scientists, engineers, managers and users to submit papers in all areas of research, development, manufacture, engineering, specification and use of microwave and radio frequency energy systems for non-communication applications, including food technology, chemical and material processing, and new emerging technologies.

June 20-22, 2017
Sonesta Hotel Coconut Grove
Miami, Florida, USA

Presented by the
INTERNATIONAL MICROWAVE POWER INSTITUTE
PO Box 1140, Mechanicsville, VA 23111
Phone: +1 (804) 559 6667 • E-mail: info@impi.org
WWW.IMPI.ORG