

# Transmisión de datos mediante onduletas Battle-Lemarié

Francisco Javier Pío Mendoza, José Antonio de la O Serna

Universidad Autónoma de Nuevo León  
Doctorado en Ingeniería Eléctrica, FIME,  
pteroplastia@hotmail.com, jdelao@ieee.org

## RESUMEN

*Se demuestra que un esquema de modulación digital basado en onduletas Battle-Lemarié (BL) tiene inmunidad al ruido notable y baja interferencia intersimbólica. Lo anterior se obtiene debido a la ortogonalidad, el decaimiento rápido de las onduletas BL y su energía concentrada en regiones acotadas del plano tiempo-frecuencia. Se estudia la construcción analítica de las funciones escalante y onduletas BL. Se definen parámetros de diseño para su implementación como base vectorial sintetizadora de símbolos. Se realizan experimentos de transmisión de datos y se evalúa el esquema usando los criterios de BER, BE y PAR. Se compara con sistemas basados en OFDM.*

## PALABRAS CLAVE

Onduletas, Battle-Lemarié, modulación digital.

## ABSTRACT

*It is shown that a digital modulation scheme based on Battle-Lemarie wavelets (BL) has notable noise immunity and low intersymbolic interference. This is supported on the orthogonality, the fast decay of the BL wavelets and its energy lumped in limited regions of the time-frequency plane. The analytic construction of BL wavelets and scaling functions is studied. Design parameters for its implementation as a symbol synthesizer vector base are defined. Data transmission experiments are conducted and the scheme is evaluated using the criteria of BER, BE and PAR. Comparison is made with OFDM based systems.*

## KEYWORDS

Wavelets, Battle-Lemarie, digital modulation.

## INTRODUCCIÓN

En una modulación digital,<sup>1</sup> existe una relación biyectiva entre los elementos del conjunto de secuencias binarias y los elementos del conjunto de símbolos  $s_n(t)$ , ver figura 1. Existen diferentes esquemas y métodos de modulación que permiten obtener un conjunto de señales simbólicas adecuado para la representación de las secuencias binarias.

De la teoría de onduletas,<sup>2-4</sup> una función  $\varphi(x)$  es refinable si puede ser expresada como la sumatoria de dilataciones trasladadas y escaladas de ella misma. El análisis multiresolución (*multiresolution analysis*, MRA) es un conjunto de condiciones aplicadas sobre una función refinable  $\varphi(x)$  y un conjunto de espacios

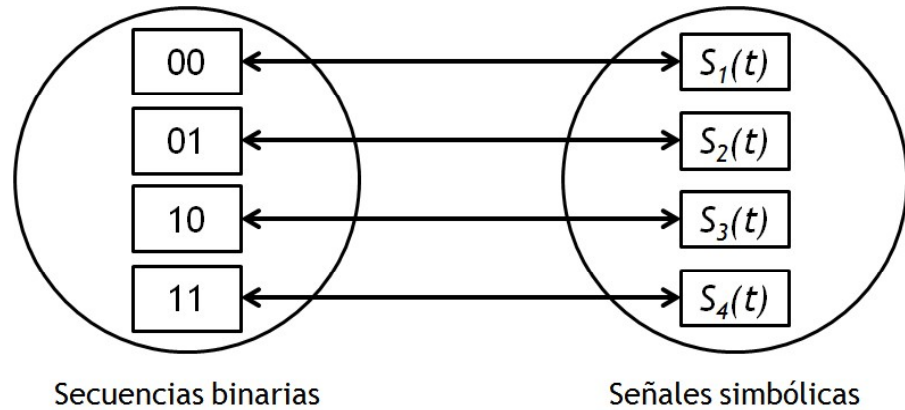


Fig. 1. Relación biyectiva entre secuencias binarias y símbolos.

funcionales definidos por  $\varphi(x)$ . Si  $\varphi(x)$  satisface al MRA, se le denomina función escalante (*scaling function*). Luego, la función escalante, tras un proceso similar al de un filtrado, da lugar a la función onduleta madre  $\psi(x)$  (*mother wavelet function*). La onduleta madre, por medio de dilataciones y traslaciones temporales, genera onduletas de menor escala temporal y en un espectro de frecuencia más elevado. La función escalante y las onduletas conforman una base funcional con la que es posible representar otras funciones. Adicionalmente, cada una concentra su energía en regiones del plano tiempo-frecuencia independientes entre sí; ver figura 2.

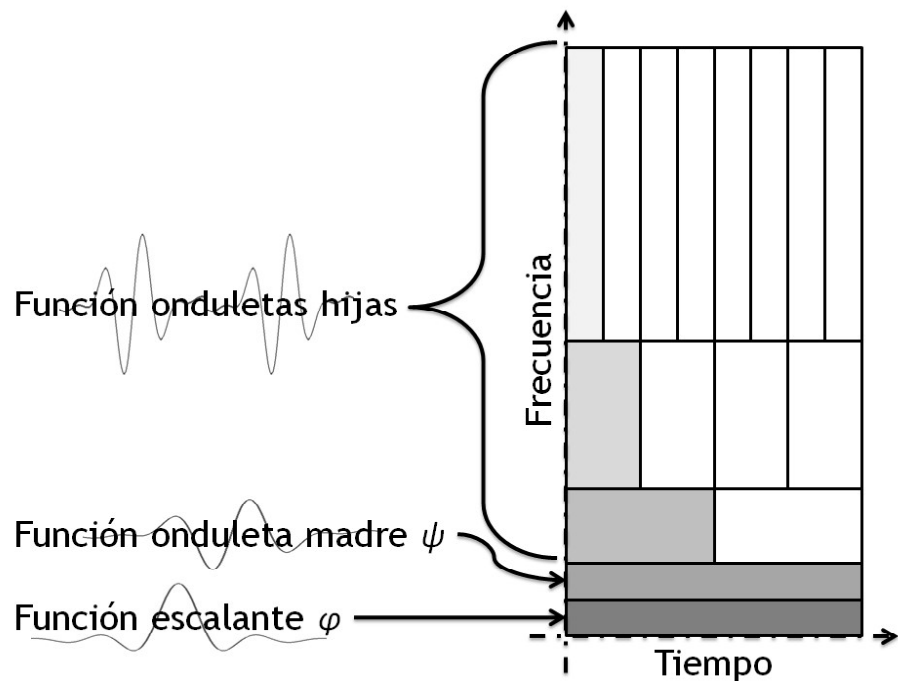


Fig. 2. Localización de la función escalante  $\varphi$  y funciones onduletas  $\psi$  en el plano tiempo-frecuencia.

¿Existe alguna ventaja en la utilización de una base de onduletas como base funcional que genere el conjunto de símbolos de un esquema de modulación digital? En el presente trabajo, se estudian las propiedades de las onduletas Battle-Lemarié (BL) para proponer un esquema de modulación digital.

La tabla I indica que las onduletas BL se caracterizan por su ortogonalidad, ya sea entre onduletas de distintas escalas, así como entre onduletas de la misma escala pero trasladadas. Aunado a esto, las onduletas BL tienen un decaimiento rápido y su energía se concentra en un intervalo de tiempo y en un ancho de banda acotados.

Tabla I. Clasificación de onduletas spline con sus propiedades principales.<sup>5</sup>

Tipo de onduleta	Ortogonalidad	Soporte compacto	Propiedades clave
Spline ortogonal (Battle-Lemarié, Mallat)	Sí	No	*Simetría y regularidad *Ortogonalidad
Spline semiortogonales (Chui-Wang, Unser-Aldroubi)	Inter-escala	Análisis o síntesis	*Simetría y regularidad *Localización en tiempo-frecuencia óptima
Spline ortogonal recorrido (Unser-Thévenaz-Aldroubi)	Intra-escala	No	*Simetría y regularidad *Cuasiortogonalidad *Decaimiento rápido
Spline biortogonal (Cohen-Daubechies-Feauveau)	No	Sí	*Simetría y regularidad *Soporte compacto

Se plantea la hipótesis de que un esquema de modulación digital basado en onduletas BL tendrá inmunidad al ruido notable y baja interferencia intersimbólica. Lo anterior debido a que:

- a) la ortogonalidad facilita recuperar la señal afectada por el ruido del canal ya que propicia que la proyección del ruido en los vectores que componen la base sea uniforme. La ortogonalidad elimina la interferencia intersimbólica y facilita la demodulación y detección de las señales recibidas. Además,
- b) el decaimiento exponencial facilita su implementación en dispositivos digitales sin que el truncamiento de la onduleta signifique pérdida de ortogonalidad considerable.

Como antecedente, la aplicación de onduletas en sistemas de comunicaciones ha sido propuesta en esquemas de modulación del tipo OFDM (*orthogonal frequency-division multiplexing*). En este caso, se reemplazó el uso de exponenciales complejas portadoras basadas en el análisis Fourier por una base de onduletas ortonormales. Fueron utilizadas onduletas Haar y Daubechies.<sup>6</sup> Por otro lado, existe el antecedente del uso de onduletas BL de spline cúbico, y principalmente de onduletas Daubechies como formas de onda para codificación en banda base de esquemas BPSK (*binary phase-shift keying*) y QPSK (*quaternary phase-shift keying*).<sup>7</sup>

### ONDULETAS BATTLE-LEMARIÉ

El término de *spline* se refiere a las funciones que se definen por segmentos mediante polinomios. Las denominadas onduletas *spline* son construidas a partir de un *B-spline*. Los *B-spline* centrados  $B_1$  y  $B_{(m+1)}$  se definen como:<sup>4</sup>

$$B_1(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & x = \pm \frac{1}{2}, x \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (1)$$

y

$$B_{m+1}(x) = (B_m * B_1)(x), x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

respectivamente. Luego, los espectros de frecuencia de  $B_1$  y  $B_m$  son:

$$\hat{B}_1(\gamma) = \text{sinc } \gamma \quad (3)$$

y

$$\hat{B}_m(\gamma) = (\text{sinc } \gamma)^m, \quad (4)$$

respectivamente. En la figura 3, se observa el *B-spline* de quinto orden en el dominio temporal y su densidad espectral de energía.

Para obtener las funciones escalante  $\varphi(x)$  y onduleta  $\psi(x)$  a partir de un *B-spline*, se procede, en un primer paso, a normalizar el *B-spline* en la frecuencia

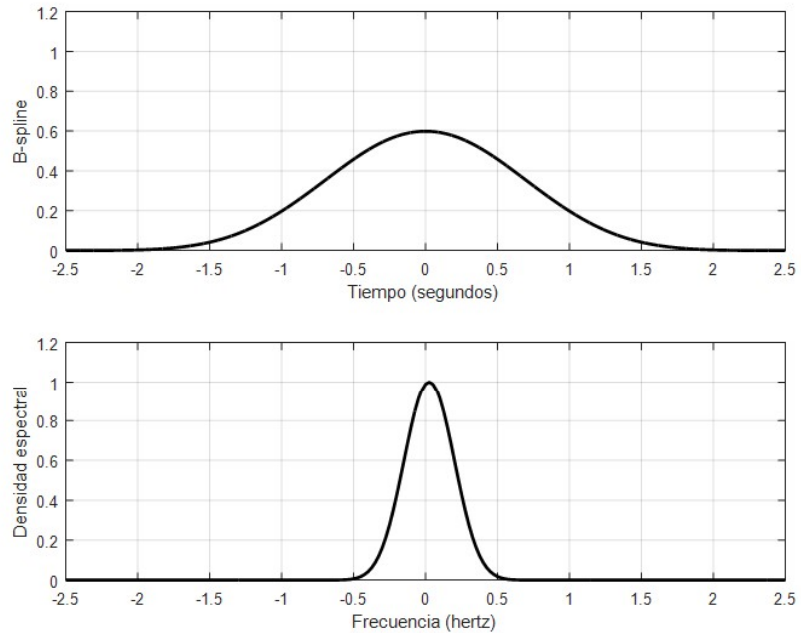


Fig. 3. *B-spline* de quinto orden  $B_5$  en el tiempo (arriba) y su densidad espectral (abajo).

mediante<sup>4</sup>:

$$\hat{\varphi}^\dagger(\gamma) = \frac{\hat{B}_m(\gamma)}{\sqrt{G(\gamma)}}, \quad (5)$$

donde

$$G(\gamma) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{B}_m(\gamma + k)|^2. \quad (6)$$

El desarrollo algebraico de (6) permite obtener en (5) una expresión en el dominio temporal consistente en una suma de versiones trasladadas y ponderadas del *B-spline* original de la forma:

$$\varphi^\dagger(x) = \frac{1}{2} B_m(x) * \left[ g_{m,0}^\dagger \delta(x) + \sum_{k=1}^\infty g_{m,k}^\dagger \cdot (\delta(x - k) + \delta(x + k)) \right] \quad (7)$$

donde  $\varphi^\dagger(x)$  es la función escalante que satisface el MRA,  $g_{m,k}^\dagger$  son los coeficientes de ponderación,  $\delta(x)$  es la función impulso y el símbolo \* indica la operación de convolución. La figura 4 muestra la función escalante y su densidad espectral. La tabla II contiene los primeros coeficientes  $g_{m,k}^\dagger$  para  $m = 5$ .

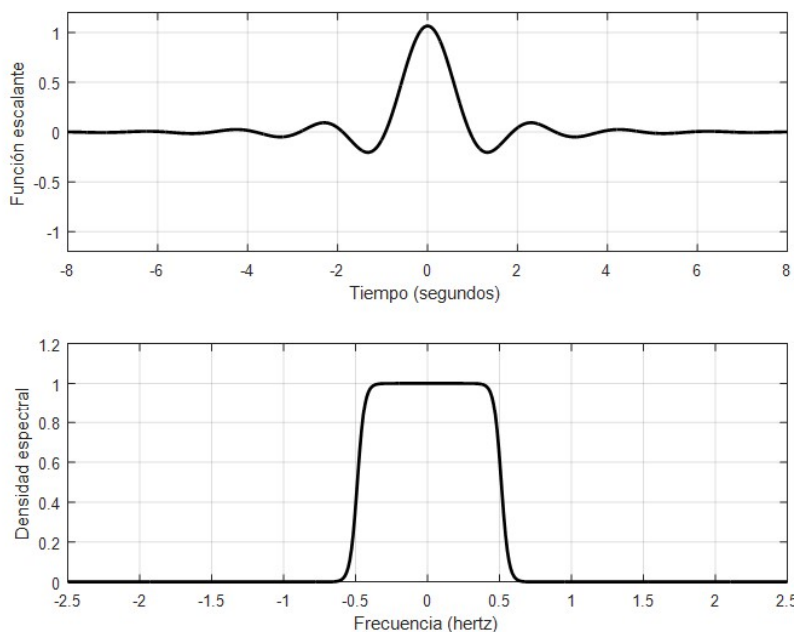


Fig. 4. Función escalante normalizada  $\varphi^\dagger$  de orden  $m = 5$  (arriba) y su densidad espectral (abajo).

Tabla II. Coeficientes de ponderación utilizados en la obtención de función escalante correspondiente al B-spline  $B_5(x)$ .

$k$	$g_{5,k}^\dagger$	$k$	$g_{5,k}^\dagger$	$k$	$g_{5,k}^\dagger$	$k$	$g_{5,k}^\dagger$
0	4.9833	5	- 0.1442	10	0.0085	15	- 0.0006
1	- 2.1660	6	0.0801	11	- 0.0049	16	0.0003
2	1.0055	7	- 0.0451	12	0.0029	17	- 0.0002
3	- 0.5035	8	0.0257	13	- 0.0017	18	0.0001
4	0.2651	9	- 0.0147	14	0.0010	19	- 0.0001

El segundo paso es hallar las funciones  $H_0(\gamma)$  y  $H_1(\gamma)$  que satisfacen las ecuaciones:<sup>4</sup>

$$\hat{\varphi}(2\gamma) = H_0(\gamma)\hat{\varphi}(\gamma) \quad (8)$$

y

$$\hat{\psi}(2\gamma) = H_1(\gamma)\hat{\varphi}(\gamma), \quad (9)$$

donde  $H_0(\gamma)$  y  $H_1(\gamma)$  se relacionan mediante:

$$H_1(\gamma) = \overline{H_0\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)} e^{-j2\pi\gamma}. \tag{10}$$

El desarrollo de (8), (9) y (10) conducen al resultado:

$$\psi_{(I)}(x) = 2 \cdot j^m \cdot B_m^\dagger(2x) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{m,k} \delta\left(x - \frac{k}{4}\right), \tag{11}$$

donde  $\psi_{(I)}(x)$  hace referencia a la onduleta madre (el subíndice indica la ordinalidad con respecto a las onduletas de las siguientes escalas),  $B_m^\dagger(x)$  indica el *B-spline* centrado y normalizado, y  $h_{m,k}$  son coeficientes de ponderación. Aplicando operaciones de dilatación y traslación sobre  $\psi_{(I)}(x)$  se generan las onduletas de las siguientes escalas. Por ejemplo, la siguiente generación se expresa con:

$$\psi_{(II)}(x) = 2^{\frac{3}{2}} \cdot j^m \cdot B_m^\dagger(4x) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{m,k} \delta\left(x - \frac{k}{8} - \frac{1}{4}\right) \tag{12}$$

y

$$\psi_{(III)}(x) = 2^{\frac{3}{2}} \cdot j^m \cdot B_m^\dagger(4x) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{m,k} \delta\left(x - \frac{k}{8} + \frac{1}{4}\right). \tag{13}$$

La figura 5 muestra la función onduleta madre de orden 5 y su densidad espectral. La tabla III indica los primeros coeficientes  $h_{5,k}$  no nulos.

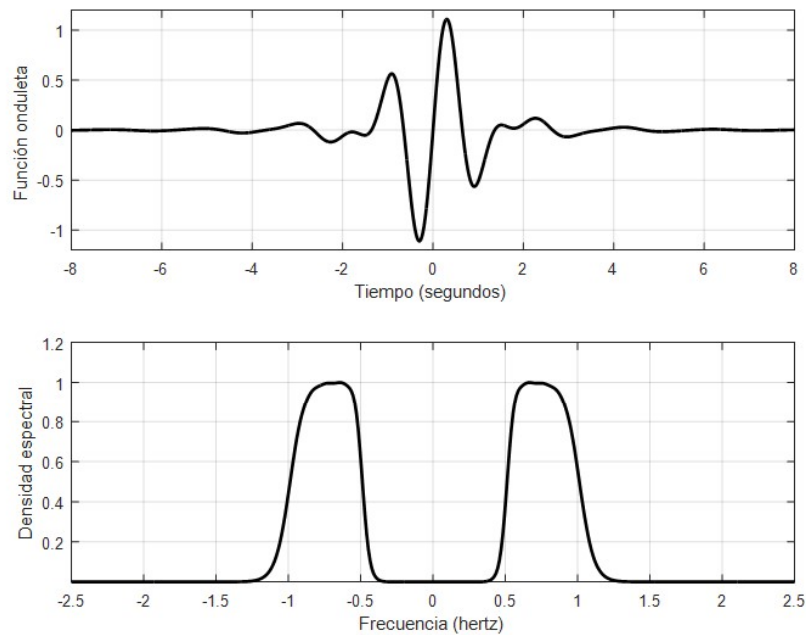


Fig. 5. Función onduleta madre  $\psi$  de orden  $m = 5$  (arriba) y su densidad espectral (abajo).

Tabla III. Coeficientes de ponderación utilizados en la obtención de función onduleta correspondiente del B-spline  $B_5(x)$ .

$k$	$h_{5,k}$	$k$	$h_{5,k}$	$k$	$h_{5,k}$	$k$	$h_{5,k}$
1	j0.471151	11	-j0.010772	21	-j0.007183	31	j0.000176
3	-j0.119680	13	-j0.024218	23	j0.000766	33	j0.001296
5	-j0.097851	15	j0.004107	25	j0.004016	35	-j0.000089
7	j0.031501	17	j0.013048	27	-j0.000361	37	-j0.000745
9	j0.046451	19	-j0.001713	29	-j0.002271	39	j0.000046

## BASE VECTORIAL

La implementación de los resultados analíticos previos en un esquema de modulación digital requiere crear una base vectorial. La base funcional contiene  $P$  funciones: una función escalante más  $P-1$  funciones onduletas (onduleta madre y onduletas hijas de las escalas subsecuentes). En el presente trabajo, se propone fijar en 16 el número de elementos de la base. Si  $P < 16$ , se complementa la base de funciones onduletas BL con la modulación por exponenciales complejas de la  $P$ -tupla de funciones originales, similar a lo desarrollado en <sup>8</sup> y <sup>9</sup>. Para ello, se definen parámetros y constantes de diseño, ver tabla IV. La figura 6 muestra la densidad espectral de un ejemplo de base vectorial.

## MODULACIÓN DIGITAL

La base vectorial, mediante combinaciones lineales, genera un espacio vectorial. Los coeficientes que ponderan la combinación de los vectores se utilizan para codificar información. En el presente trabajo, la simulación del sistema de transmisión de datos emplea el esquema BPSK.

Los bloques binarios para determinar cada coeficiente o amplitud compleja son de un solo bit. En consecuencia, las amplitudes que modulan a los vectores de la base son de 1 y  $-1$ . Las señales simbólicas, o símbolos, se generan con la suma de las 16 señales moduladas. Por lo tanto, cada símbolo representa la información de palabras binarias de 16 bits. El símbolo se sintetiza en forma discreta mediante:

$$s[n] = \sqrt{T_s} \sum_{k=0}^{k_{\max}} \sum_{l=0}^{P-1} \alpha_{k,l} e^{-j2\pi k Q n T_s} \psi_{(l)}[n T_s] \quad (14)$$

Tabla IV. Parámetros y constantes de diseño de la base vectorial.

Par. o cons.	Significado	Unidad	Valores sugeridos o dados
$S$	Intervalo de soporte finito	Tiempo	> 4 seg
$P$	Rango de funciones onduletas no moduladas	Adimensional	1, 2, 4, 8 ó 16
$BW_p$	Ancho de banda de onduletas no moduladas	Frecuencia	$\frac{5}{4}P$
$Q$	Frecuencia fundamental de modulación	Frecuencia	$\geq BW_p$
$k_{\max}$	Armónica máxima de $Q$	Adimensional	$\frac{16}{P} - 1$
$f_{\max}$	Frecuencia máxima de $BW_\phi$	Frecuencia	$k_{\max}Q + \frac{1}{2}BW_p$
$BW_\phi$	Ancho de banda de la base extendida por modulación	Frecuencia	$f_{\max} + \frac{1}{2}BW_p$
$f_s$	Frecuencia de muestreo	Muestras / Tiempo	$\geq 2f_{\max}$
$N_{sam}$	Número de elementos del vector (muestras)	Elementos	$S \cdot f_s$
$\sqrt{T_s}$	Factor de corrección entre tiempo continuo y discreto	Adimensional	$\frac{1}{\sqrt{f_s}}$

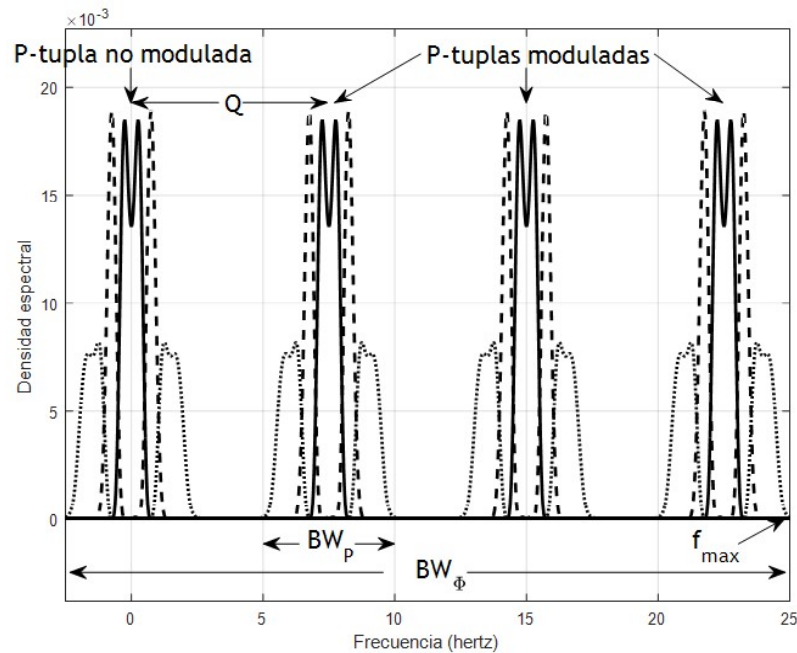


Fig. 6. Densidad espectral de funciones de la base vectorial de orden  $m = 5$  con  $S = 4$  s,  $P = 4$ ,  $Q = 7.5$  Hz,  $f_s = 64$  Hz. Para  $P = 4$ , cada P-tupla consiste en función escalante (línea sólida), onduleta madre (línea intermitente) y dos onduletas hijas de primera generación (línea punteada).

y en su forma continua se expresa como:

$$s(x) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} \sum_{l=0}^{P-1} \alpha_{k,l} e^{-j2\pi k Q x} \psi_{(l)}(x), \quad (15)$$

donde  $\alpha_{k,l}$  son las amplitudes complejas. La figura 7 da un ejemplo de señal simbólica.

En la recepción, la señal recibida contiene una componente de ruido. La base vectorial se emplea como operador de análisis o correlador y permite encontrar los coeficientes de la señal dentro del espacio vectorial que es proyectada ortogonalmente por la señal recibida. Los coeficientes obtenidos son comparados con el conjunto de amplitudes complejas predefinidas por la modulación BPSK para establecer la correspondencia a los datos binarios.

Las propiedades de las onduletas permiten dos escenarios en la transmisión de símbolos. En el primero, no existe superposición entre símbolos consecutivos; y en el segundo, el símbolo siguiente se genera una unidad temporal después y se superpone al previo pese a que su transmisión no haya concluido. La ortogonalidad de las onduletas BL permite este caso.

Los resultados en las simulaciones muestran que la afectación por el ruido del canal es menor con la no superposición de símbolos y es comparable con el de un sistema basado en OFDM. Lo anterior, en términos de tasa de error binario (*bit error rate*, BER). Mientras que, para la superposición, se tiene un desempeño inferior de la BER. La figura 8 muestra BER para ambos casos en presencia de ruido blanco aditivo gaussiano (*additive white gaussian noise*, AWGN).

Por otro lado, se verificaron aspectos que exhiben resultados poco alentadores. La eficiencia de ancho de banda (*bandwidth efficiency*, BE) depende del parámetro



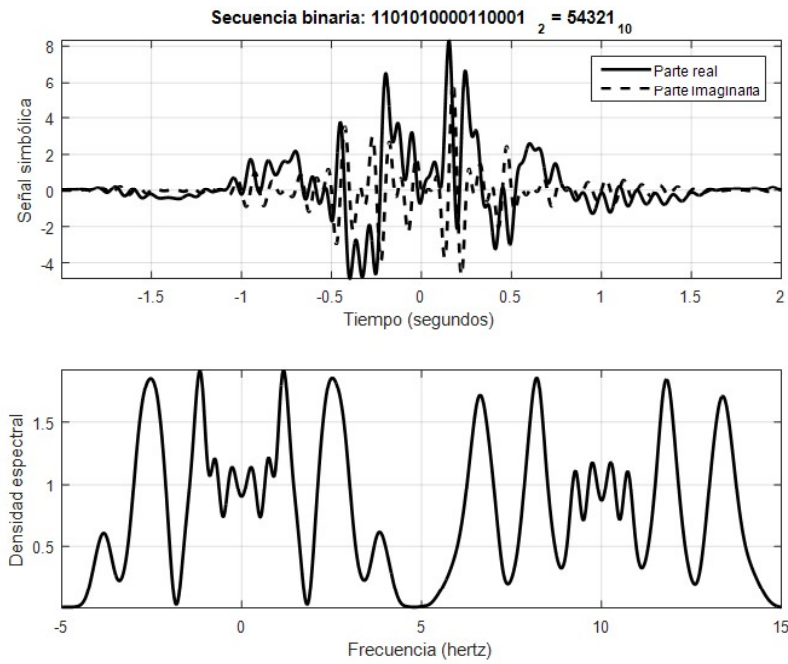


Fig. 7. Señal simbólica  $s(x)$  de la secuencia binaria correspondiente al número 54321<sub>10</sub> (arriba) y su densidad espectral (abajo) usando los parámetros  $m = 5$ ,  $P = 8$ ,  $Q = 10$  Hz,  $S = 4$  s.

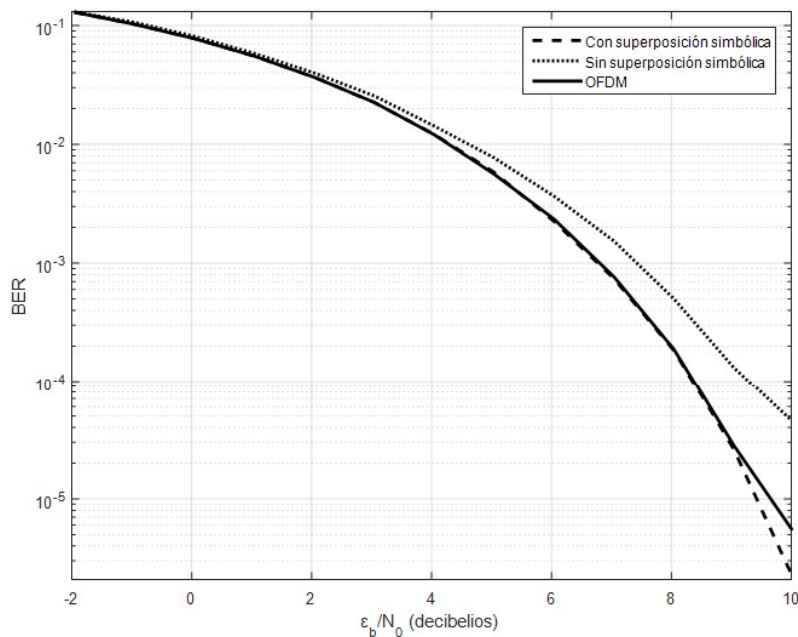


Fig. 8. Tasa de error binario vs relación señal a ruido por bit para base vectorial BL con  $m = 5$ ,  $P = 4$ ,  $Q = 5$  Hz,  $S = 4$  s y  $f_s = 64$  Hz y base vectorial OFDM con 16 portadoras.

$S$  y la constante  $BW_\phi$  para la no superposición; y solamente de  $BW_\phi$  para la superposición simbólica. Las ecuaciones:

$$BE = \frac{16}{BW_\phi \cdot S} \tag{16}$$

y

$$BE = \frac{16}{BW_\phi} \tag{17}$$

calculan la BE para la no superposición y la superposición simbólica, respectivamente. Conforme la tabla IV, los valores mínimos sugeridos para  $S = 4$  s,  $Q = BW_p$  implican un valor de  $BW_\phi = 20$  Hz. Por lo que la BE es 0.2 bps/Hz para la no superposición y 0.8 bps/Hz para la superposición simbólica; ambos casos son inferiores a un sistema OFDM con  $BE = 1$  bps/Hz.

La razón de valor pico a valor promedio (*peak-to-average ratio*, PAR) presenta valores elevados para la no superposición de símbolos, lo cual es indeseable, ver figura 9; y mejora con la superposición simbólica (máximo detectado de 16 dB) pero sin superar a los sistemas OFDM ( $\approx 12$  dB).

### CONCLUSIONES

En la construcción de las funciones onduletas BL, se obtienen expresiones formuladas y conjuntos de coeficientes que permiten la obtención numérica de los vectores que representan a las funciones analíticas. Esto facilita la implementación en los esquemas de modulación y los sistemas de transmisión de datos.

Se verifica que el truncamiento del soporte infinito no compromete la ortonormalidad de la base resultante. Se observa que la base puede comprender las

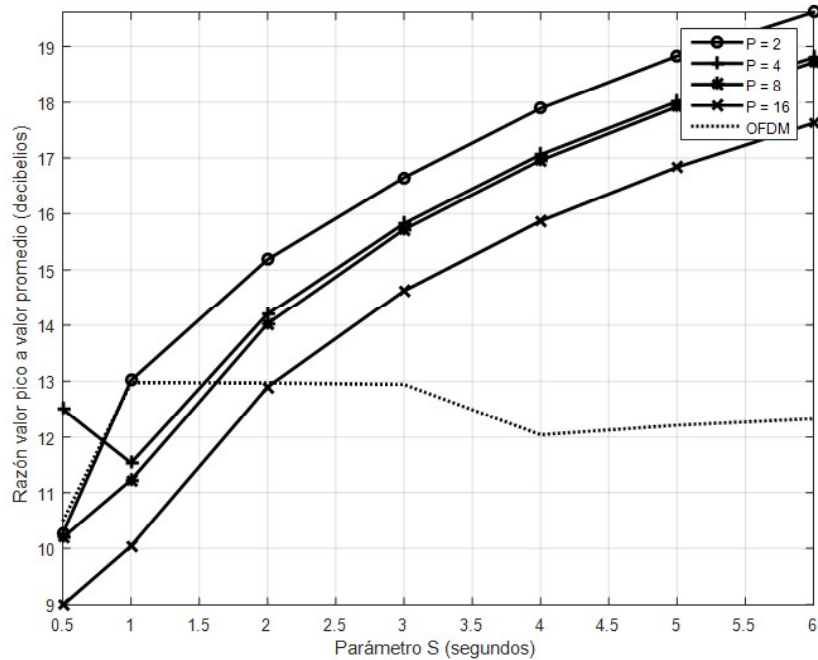


Fig. 9. PAR en función de P y S para bases de onduletas expandidas por modulación y base OFDM.

escalas de onduletas como sea requerido, o bien, que es posible extender la base por medio de modulación con exponenciales complejas. Cada escala de onduletas tiene un ancho de banda definido. Las onduletas BL mejoran sus características en frecuencia conforme aumenta el orden del B-spline asociado. Para un orden  $m > 3$ , se acerca bastante a la respuesta en frecuencia de filtros ideales.

Cuando la implementación como sistema de transmisión de datos se realiza mediante el uso de símbolos no superpuestos, la tasa error binario es comparable con los sistemas OFDM. Sin embargo, la eficiencia de ancho de banda y la razón de valor pico a valor promedio distan notablemente de un valor comparable con el de OFDM. Aprovechando la ortogonalidad entre translaciones, la superposición de símbolos permite sacrificar, en cierta medida, la BER para que la BE y la PAR se vean beneficiados.

De tal forma que, solo en aplicaciones donde la eficiencia en el uso del ancho de banda y los picos en las señales simbólicas sean criterios desestimables, el esquema propuesto basado en onduletas BL representa una alternativa a los sistemas OFDM.

## REFERENCIAS

1. Proakis, John G. y Masoud Salehi. *Digital Communications*. 5th ed. McGraw-Hill Higher Education. Boston: McGraw-Hill, 2008.
2. Chui, C K. *Wavelet Analysis and Its Applications*. Vol. v. 1, *An Introduction to Wavelets*. Boston: Academic Press, ©1992.
3. Keinert, Fritz. *Wavelets and Multiwavelets*. *Studies in Advanced Mathematics*. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC Press, ©2004.
4. Christensen, Ole. *Functions, Spaces, and Expansions: Mathematical Tools in Physics and Engineering*. *Applied and Numerical Harmonic Analysis*. Boston, Mass.: Birkhäuser, ©2010.
5. M. Unser. Ten Good Reasons for Using Spline Wavelets, *Proc. SPIE Vol. 3169, Wavelets Applications in Signal and Image Processing V*, 1997, pp. 422-431.
6. B.G. Negash. *Wavelet Based OFDM for Wireless Channels*. *Vehicular Technology Conference*, 2001. VTC 2001 Spring. IEEE VTS 53rd (Vol. 1).
7. P.P. Gandhi; S.S. Rao; R.S. Pappu. *Wavelets for Baseband Coding of Waveforms*, *Global Telecommunications Conference*, 1994. GLOBECOM '94. *Communications: The Global Bridge.*, IEEE.
8. Platas Garza, M.A. *Una extensión a la transformada de Fourier, transformada Taylor-Fourier*, tesis doctoral, Universidad Autónoma de Nuevo León, San Nicolás de los Garza, N.L. 2011.
9. Trejo Rocha, Vidal Alfredo. *Esquema de Transmisión de Información No Ortogonal mediante Transformadas Taylor-Fourier y Legendre-Fourier*, tesis de maestría, Universidad Autónoma de Nuevo León, San Nicolás de los Garza, N.L. 2017.