

# Modelado experimental en tiempo continuo a partir de señales muestreadas

Oswaldo Valdez Franco, Efraín Alcorta García, Miguel A. Platas, Rodolfo Castillo Martínez

Depto. Electrónica y Automatización y Posgrado en Ingeniería Eléctrica  
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
Universidad Autónoma de Nuevo León  
ealcortag@gmail.com

## RESUMEN

*La práctica para la obtención de modelos matemáticos a partir de experimentos es conocida como identificación de sistemas. Tradicionalmente estas técnicas producen modelos en tiempo discreto. Solo en años recientes se han desarrollado algoritmos para obtener modelos en tiempo continuo a partir de señales muestreadas. En este trabajo se presenta un enfoque nuevo basado en representación de estado. Una ventaja del procedimiento propuesto es la claridad matemática y facilidad. El algoritmo propuesto es aplicado a una estación de laboratorio para el control de procesos Lab-Volt 3501-M2 para ejemplificar la propuesta y así mostrar los beneficios del procedimiento propuesto.*

## PALABRAS CLAVE

Modelo matemático, modelo discreto, identificación de sistemas, representación de estado.

## ABSTRACT

*The practice for obtaining mathematical models from experiments is known as systems identification. Traditionally these techniques produce models in discrete time. Only in recent years have algorithms been developed to obtain models in continuous time from sampled signals. In this paper a new approach, based on state representation is presented. One advantage of the proposed procedure is mathematical clarity and ease. The proposed algorithm is applied to a laboratory station for process control Lab-Volt 3501-M2 to exemplify the proposal and thus show the benefits of the proposed procedure.*

## KEYWORDS

Mathematical model, discrete model, identification of systems, state representation.

## INTRODUCCIÓN

El uso de modelos matemáticos de procesos es una práctica muy extendida en ingeniería. Modelos en forma de ecuaciones diferenciales o en diferencias, permiten mejorar la eficiencia de los procesos mediante diseños optimizados, desarrollo de simuladores, predictores, etc.

Dos caminos para obtener modelos matemáticos son el modelado y la identificación de sistemas. El modelado hace uso de las leyes constitutivas, balance de masas, de fuerza, de energía, etc. Esto permite determinar las ecuaciones que rigen el comportamiento del sistema. Observe que los parámetros obtenidos tienen significado físico, sin embargo, en ocasiones algunos parámetros no es fácil determinarlos por la dificultad de realizar algunas mediciones. La identificación de sistemas, en cambio, es un procedimiento experimental, el cual está bien fundamentado en la teoría de sistemas. Se tiene un conjunto de herramientas que permiten obtener, a partir de la información entrada-salida del sistema, un modelo que mejor ajusta a los datos. Los coeficientes que se obtienen, sin embargo, no necesariamente tienen un significado físico. Dando un paso en la búsqueda de modelos adecuados, se puede pensar en utilizar el modelado para construir la estructura que se requiere y ajustar el valor de los parámetros experimentalmente mediante identificación<sup>1</sup>.

La identificación de sistemas tiene ya más de cuatro décadas de desarrollo, como se puede apreciar en los libros<sup>1-4</sup>. De la gran cantidad de variantes de métodos reportadas en la literatura especializada, se pueden distinguir los métodos de error de predicción, los de variable instrumental e identificación por subespacios. Estas técnicas determinan, a partir de la relación entrada-salida de un sistema, el modelo discreto que mejor ajuste los datos.

Alternativamente se han publicado algunas propuestas de algoritmos que pueden obtener los coeficientes de un modelo en tiempo continuo a partir de muestras. Un resumen de estas propuestas se puede encontrar en el libro<sup>5</sup>. En general se utiliza representación entrada-salida y filtrado para obtener el resultado.

Este trabajo propone el uso de un nuevo procedimiento, el cual está basado en la representación interna de sistemas, es decir, la representación en espacio de estado. Una ventaja del algoritmo propuesto en este trabajo es que el fundamento matemático es claro y sencillo. El algoritmo es aplicado a una estación de control de procesos para laboratorio de la marca Lab-Volt. Los resultados respaldan el procedimiento propuesto.

## PRELIMINARES

En esta sección se presentan algunos resultados básicos que serán utilizados en la formulación del algoritmo propuesto. En este trabajo se consideran sistemas lineales invariantes en el tiempo de la forma siguiente:

donde se tiene una entrada y una salida.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & x(0) &\in \mathbb{R}^n \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

## Principio de superposición

Este principio establece de manera general que para todo sistema lineal la respuesta neta causada por dos o más entradas es igual a la suma de las respuestas que son causadas por cada una de las entradas individualmente. De acuerdo a Leon Brillouin<sup>6</sup>, el principio de superposición fue establecido por Daniel Bernoulli en 1753.

De forma más específica las propiedades: aditiva y de homogeneidad juntas son llamadas principio de superposición.

- Propiedad aditiva. Sea  $F$  un operador y  $x_1, x_2$  dos elementos de su dominio. La propiedad aditiva establece que el operador  $F$  operando sobre la suma de los dos elementos del dominio es igual a la suma de los operadores sobre cada uno de los elementos del dominio antes mencionado, es decir:

$$F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2) \tag{2}$$

- Propiedad de homogeneidad. Al aplicar el operador  $F$  al producto de un elemento del dominio,  $x$  por una constante,  $\alpha$  el resultado es la constante multiplicado por el operador aplicado sobre el elemento del dominio, es decir:

$$F(\alpha x) = \alpha F(x) \tag{3}$$

### Forma canónica de observador

Dado que la representación interna de sistemas no es única, se busca que esta se presente en un formato con un número mínimo de parámetros. De las diferentes posibilidades disponibles, se considera para este trabajo la llamada forma canónica de observador, la cual tiene la siguiente estructura:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & & -a_0 \\ 1 & & -a_1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \bar{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}; \bar{C} = [0 \ \dots \ 0 \ 1] \tag{4}$$

Las cuales corresponden a:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ob}(t) &= \bar{A}x_{ob}(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) &= \bar{C}x_{ob}(t) \end{aligned} \tag{5}$$

y los coeficientes de las matrices en (4) corresponden a los de la función de transferencia asociada dada por:

$$L\left(\frac{y(t)}{u(t)}\right) = G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \tag{6}$$

Teorema. Considerar el sistema (1). Este puede ser transformado a la forma canónica (4)-(5) mediante un cambio de coordenadas si y solo si:

$$rango \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n \tag{7}$$

La transformación se puede obtener de la manera siguiente:  $T \triangleq (W \cdot Q)^{-1}$ , donde:

$$Q = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}; \quad W = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Y el sistema transformado se obtiene como:  $\bar{A} = T^{-1}AT, \bar{B} = T^{-1}B, \bar{C} = CT$ .

### Modelo discreto equivalente

Considerar el sistema (1), la solución de la ecuación diferencial puede de ser escrita como sigue:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (9)$$

suponer ahora que se tiene un tiempo discreto, haciendo  $t_0 = kT$ ,  $t = (k+1)T$  y suponiendo que el valor de la entrada permanece constante entre instantes de muestreo consecutivos, es decir,  $u(t) = u(kT)$ , para  $kT \leq t \leq (k+1)T$ , donde  $T$  representa el periodo de muestreo, (9) se puede reescribir como:

$$x((k+1)T) = e^{A(kT+T-kT)}x(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (10)$$

Haciendo  $\eta = kT + T - \tau$ , se obtiene:

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_0^T e^{A\eta}Bd\eta u(kT) \quad (11)$$

Ahora, definiendo  $A_d = e^{AT}$ ,  $B_d = \int_0^T e^{A\eta}Bd\eta$ , el sistema (11) puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} x(kT + T) &= A_d x(kT) + B_d u(kT) \\ y(kT) &= Cx(kT) \end{aligned} \quad (12)$$

### Excitación persistente

Este concepto representa una medida de la riqueza en componentes de frecuencia con magnitud significativa que tiene una señal. Es bien conocido<sup>1</sup> que para poder identificar coeficientes correctamente se requiere, entre otras cosas, que la señal que se aplica a la entrada del sistema sea de excitación persistente de un orden determinado (dependiendo del número de parámetros a ser identificados). Entre mayor sea el número

de parámetros a ser identificados en el sistema, se requiere que la señal de entrada contenga mayor cantidad de componentes de frecuencia, las cuales deben de estar distribuidas dentro del ancho de banda del sistema.

### PROCEDIMIENTO PROPUESTO

Como fue mencionado en la introducción, en este trabajo se propone una manera novedosa de calcular los coeficientes de un sistema continuo representado en espacio de estado a partir de muestras.

El punto de partida es el sistema (1). Lo primero que se requiere es transformar este sistema en la forma canónica de observador (2). Siguiendo el procedimiento para obtener la transformación se obtiene el sistema transformado.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & & -a_0 \\ 1 & & -a_1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \bar{x}(t) + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \bar{x}(t) \end{aligned} \quad (13)$$

Ahora se requiere seleccionar  $n$  raíces  $\mu_i$ , que estén en el semiplano izquierdo del plano complejo (si se desea seleccionar alguna raíz que sea compleja, esta deberá aparecer en pares conjugados). Con estas raíces se define el polinomio  $p(\lambda) = (s + \mu_1) \dots (s + \mu_n) = s^n + \lambda_{n-1}s^{n-1} + \dots + \lambda_1 s + \lambda_0$ , y se define el vector

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{bmatrix}$$

Enseguida se requiere sumar y restar la cantidad  $\Gamma \bar{x}_n$  de la ecuación (13)

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & & -a_0 \\ 1 & & -a_1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \bar{x}(t) + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{bmatrix} \bar{x}_n(t) - \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{bmatrix} \bar{x}_n(t) \\ y(t) &= [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \bar{x}(t) \end{aligned} \quad (14)$$

La cual puede ser reacomodada como:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & & \lambda_0 \\ 1 & & \lambda_1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & \lambda_{n-1} \end{bmatrix} \bar{x}(t) + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \lambda_0 - a_0 \\ \lambda_1 - a_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix} \bar{x}_n(t) \\ y(t) &= [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \bar{x}(t) \end{aligned} \quad (15)$$

Note que el último término de la ecuación (16) se utilizó el hecho de que  $y(t) = \bar{x}_n(t)$ . El siguiente paso consiste en utilizar el principio de superposición para obtener una representación basada en dos estados auxiliares  $\zeta(t)$  y  $\xi(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= F \zeta(t) + B_{n-1} u(t) \\ \dot{\xi}(t) &= F \xi(t) + B_{n-1} y(t) \end{aligned} \quad (16)$$

donde  $F = \begin{bmatrix} 0 & & -\lambda_0 \\ 1 & & -\lambda_1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & -\lambda_{n-1} \end{bmatrix}$ ;  $B_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ;

y la ecuación de salida resulta:

donde  $T_0 = I_n$ ,  $T_i$  con  $1 \leq i \leq n-1$  debe de satisfacer la relación:

$$y(t) = CT_{n-1} \zeta(t) b_0 + \dots + CT_0 \zeta(t) b_{n-1} + CT_{n-1} \xi(t) (\lambda_0 - a_0) + \dots + CT_0 \xi(t) (\lambda_{n-1} - a_{n-1}) \quad (17)$$

$(sI - F)^{-1} B_i = T_{n-i} (sI - F)^{-1} B_0$ , con el subíndice  $i$  de  $B_i$  determina cual elemento del vector columna es distinto de cero, ver por ejemplo<sup>10</sup>. Note que el primer elemento corresponde a cero y el último a  $n-1$ . Una observación importante es que (16) no depende de ningún parámetro del sistema (1) y puede ser interpretado como un filtraje de las señales entrada-salida del sistema a ser identificado.

Lo anterior permite reescribir las ecuaciones del sistema (1) basado en las ecuaciones (16) y (18) como sigue:

$$\begin{aligned}
 \dot{\zeta}(t) &= F\zeta(t) + B_{n-1}u(t) \\
 \dot{\xi}(t) &= F\xi(t) + B_{n-1}y(t) \\
 \zeta(t) &= F\zeta(t) + B_{n-1}u(t) \\
 \xi(t) &= F\xi(t) + B_{n-1}y(t)
 \end{aligned}$$

$$y(t) = \underbrace{C [T_{n-1}\zeta(t) \quad \dots \quad T_0\zeta(t) \quad T_{n-1}\xi(t) \quad \dots \quad T_0\xi(t)]}_{\varphi^T(t)} \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ \lambda_0 - a_0 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Donde  $\varphi^T(t)$  contiene la información de las señales del sistema y es llamado regresor; el vector  $\theta$  contiene como elementos los parámetros del sistema los cuales quieren ser calculados.

Debido a que las señales disponibles para llevar a cabo el proceso de identificación,  $u(t)$  y  $y(t)$  no están definidas en tiempo continuo, sino que, debido a la manera en la que han sido obtenidas, están representadas por muestras en los instantes de muestreo  $kT$ , es decir, se dispone solo de  $u(kT)$  y de  $y(kT)$ . Note que la ecuación de salida de (18) es válida para todo instante de tiempo, inclusive en los instantes  $kT$ :

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta \Rightarrow y(kT) = \varphi^T(kT)\theta \quad (19)$$

Lo cual implica que se requiere solo los valores del regresor en los instantes de muestreo  $kT$ , lo cual se puede lograr mediante la versión discretizadas de los filtros:

$$\begin{aligned}
 \zeta(kT+T) &= F_d\zeta(kT) + (B_{n-1})_d u(kT) \\
 \xi(kT+T) &= F_d\xi(kT) + (B_{n-1})_d y(kT)
 \end{aligned} \quad (20)$$

$$y(kT) = \underbrace{C [T_{n-1}\zeta(kT) \quad \dots \quad T_0\zeta(kT) \quad T_{n-1}\xi(kT) \quad \dots \quad T_0\xi(kT)]}_{\varphi^T(kT)} \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ \lambda_0 - a_0 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (21)$$

La descripción (20) de la dinámica de los regresores en tiempo discreto representa el elemento diferente del algoritmo propuesto. En trabajos previos se trabaja con la representación entrada-salida (función de transferencia y función de transferencia de pulsos)<sup>5</sup>. Esto que parece un cambio pequeño con respecto al procedimiento generalmente utilizado y que representa un poco más de esfuerzo inicial, al final el resultado es un desarrollo matemáticamente transparente y de aplicación directa, pues los filtros que se requieren ya se encuentran en el dominio del tiempo. Por otro lado, todo el desarrollo se realiza en el dominio del tiempo, sin recurrir a transformaciones de Laplace. Este enfoque permite incorporar también conocimiento previo sobre el sistema.

El cálculo de los parámetros se realiza utilizando mínimos cuadrados.

Considerar que se tienen  $N$  mediciones disponibles. Definir:

$$Y \triangleq \begin{bmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y(NT) \end{bmatrix}; \quad \Phi \triangleq \begin{bmatrix} \varphi^T(0) \\ \vdots \\ \varphi^T(NT) \end{bmatrix} \quad (22)$$

Con lo que los datos disponibles se pueden escribir, siguiendo (18) como:

$$Y = \Phi \theta \quad (23)$$

de donde se puede obtener el vector de parámetros usando pseudo-inversa (mínimos cuadrados):

$$\theta = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \quad (24)$$

Como el regresor es obtenido de los filtros (20) y las condiciones iniciales de los filtros no son conocidas de antemano, estas se ponen en cero, es decir,  $\zeta(0)$  y  $\xi(0)$ . Esto ocasiona un transitorio en la estimación de los estados auxiliares utilizados en el regresor que a su vez se traduce en errores en el cálculo de los parámetros. Para evitar ese error se requiere no utilizar los valores del transitorio para las señales de los estados auxiliares. Para esto es necesario quitar los primeros 50 valores de todas las señales involucradas en el cálculo de los parámetros.

### ESTACION PARA EL CONTROL DE PROCESOS LAB-VOLT 3501-M2

La estación de control de presión Lab-Volt 3501-M2 es un equipo de laboratorio para entrenamiento. Este se presenta en la figura 1.

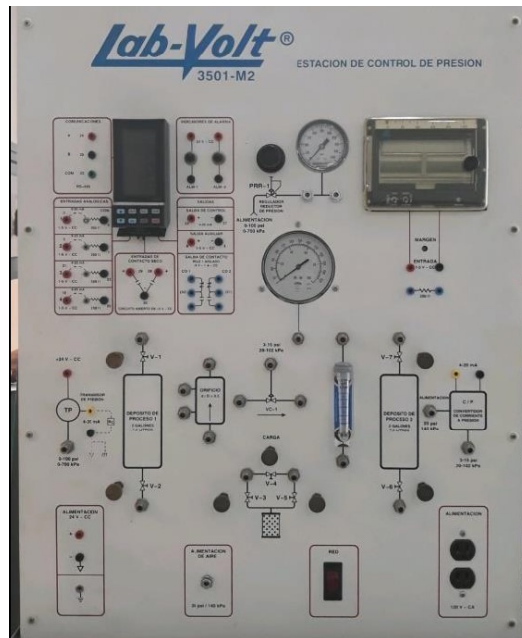


Fig. 1. Estación de control de procesos para el control de presión Lab-Volt 3501-M2.

El equipo permite implementar diversas configuraciones de un proceso neumático; cuenta con un módulo de control, manómetros, válvulas reguladoras, depósitos de presión, convertidor de corriente a presión, válvula de control, válvula de escape, transmisores de presión, alimentación de 24VDC y 127VAC.

En la figura 2 se muestra la configuración utilizada en este trabajo: básicamente consiste en una conexión neumática de la válvula alimentadora **PRR-1** con la válvula **V-1** del depósito de presión 1, la cual es conectada a su vez al transmisor de presión **TP**. A la salida del depósito 1 se encuentra la válvula **V-2**, conectada neumáticamente conectada a las válvulas **V-3** y **V-4**. También conectadas internamente a la válvula de escape de la estación.

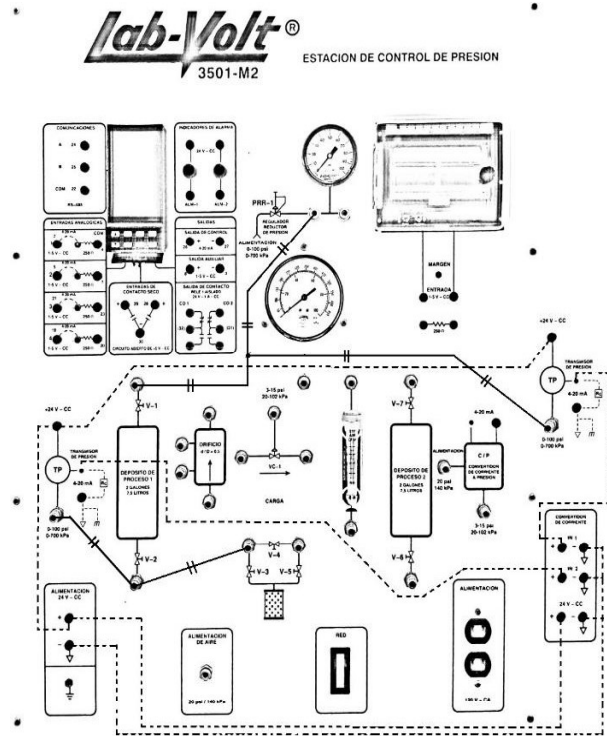


Fig. 2. Configuración utilizada en este trabajo.

La descripción de la posición de las válvulas utilizadas es como sigue:

Tabla. 1. Valores de posición de las válvulas utilizadas.

Válvula	Ajuste
PRR-1	40 psi
V-1	1 vuelta
V-2	1 vuelta
V-3	½ vuelta
V-4	Cerrada

Las conexiones eléctricas también se muestran en la figura 2. Ambos transmisores de presión se alimentan de 24VDC, y sus salidas de corriente son conectadas a un amplificador donde son transformadas en una señal de voltaje ganancia y con componente DC ajustable.

### MODELADO E IDENTIFICACIÓN DE LA ESTACIÓN LAB-VOLT 3501-M2

En esta sección se presenta primero la modelación teórica de la estación de laboratorio considerada. Enseguida se presenta la aplicación del procedimiento discutido anteriormente para la identificación de la estación considerada.



### MODELADO

El proceso bajo consideración está representado esquemáticamente en la figura 3. Note que V-2 se desprecia debido a su cercanía con V-3 y su menor resistencia al flujo.

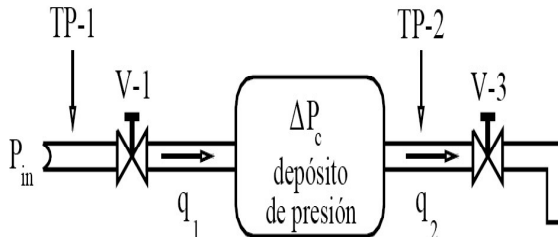


Fig. 3. Esquemático del proceso considerado.

El sistema consta de una sola entrada de flujo debido al diferencial de presión que será la medición que se toma con el transmisor de presión TP-1. Mientras tanto, el transmisor TP-2 registra la presión diferencial entre el depósito de presión y la válvula V-3. Se puede distinguir de manera inicial la existencia de dos elementos diferentes en este proceso: las válvulas, que se encargan de regular el flujo de aire a través de ellas, y el depósito o tanque, que debido a sus dimensiones almacena cierta cantidad de masa de aire lo cual retrasa los cambios en la presión diferencial. Para simplificar el modelado se distinguen tres conceptos: Resistencia, Capacitancia e Inertancia, los cuales han sido consultados en el libro<sup>8</sup>.

**Resistencia.** - La resistencia al flujo de la válvula tiene un comportamiento no lineal, pero puede linealizarse alrededor de un punto de operación. La resistencia  $R$  está dada por:  $R = \frac{\Delta P}{q}$  que también se puede escribir como:  $\Delta P = qR$

**Capacitancia.** - Una capacitancia de flujo es la relación entre la masa del fluido almacenada y la presión diferencial resultante causada debido a esta masa. Específicamente, la capacitancia neumática  $C$  se define como la razón de cambio entre la masa del gas almacenado y el cambio en la presión del gas:  $C = \frac{dm}{d\Delta P}$ .

Considerando que  $dm = q$ , donde  $q$  es el flujo másico y despejando para  $\Delta P = \frac{1}{C} \int q dt$ . Podemos observar el equivalente a un circuito eléctrico como el mostrado en la figura 4.

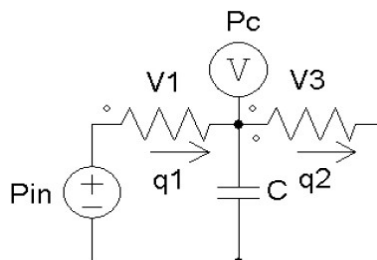


Fig. 4. Circuito eléctrico equivalente con una capacitancia y dos resistencias.

**Inertancia<sup>9</sup>.** - Consideremos un fluido moviéndose a través de un tubo como en la figura 3. La presión diferencial de sus extremos resulta en una fuerza que acelera el fluido. Si el área transversal del tubo es  $A$ , la fuerza es  $\Delta P A$ . La masa para acelerar es  $\rho \ell A$ , donde  $\rho$  es la densidad del fluido y  $\ell$  es la longitud del tubo. De esta manera tenemos que:  $\Delta P = \rho \ell A \frac{d}{dt} v(t)$  donde  $v(t)$  es la velocidad del fluido. Dado que el flujo se define como  $Q(t) = Av(t)$ , tenemos:

$\Delta P = \frac{\rho l d}{A} \frac{d}{dt} Q(t) = L_f \frac{d}{dt} Q(t)$ . Si agregamos este efecto a los conductos que conectan el tanque con las válvulas, obtendremos un sistema equivalente al circuito eléctrico mostrado en la figura 5.

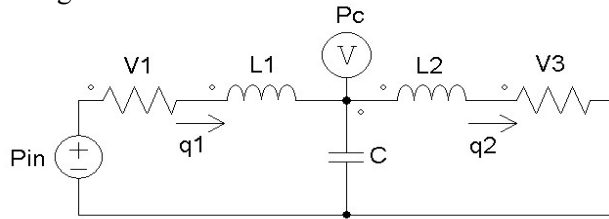


Fig. 5. Circuito eléctrico equivalente del sistema con una capacitancia, dos inductancias y dos válvulas.

De acuerdo con la figura 3, y utilizando el concepto de capacitancia, la presión diferencial del tanque depende de la diferencia entre la masa que entra y sale del mismo, por lo que:

$$\Delta P_c = \frac{1}{C} \int (q_1 - q_2) dt \tag{25}$$

donde  $\Delta P_c$ ,  $\frac{1}{C} \int q_1 dt$  y  $\frac{1}{C} \int q_2 dt$  son la presión diferencial en el tanque, la masa de aire que entra y sale del tanque, respectivamente. A partir de ahora definimos el sistema a través de su representación en espacio de estados (1), de manera que, a partir de (25) tenemos:

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{26}$$

donde  $y = \Delta P_c$ ,  $x_1 = \int q_1 dt$  y  $x_2 = \int q_2 dt$ . Para completar la representación en espacio de estados, se requiere saber la razón de cambio de la masa que entra y sale del tanque, esto es el flujo del aire  $q_1$  y  $q_2$  respectivamente. De la discusión previa se encuentra que el flujo del aire está determinado por la diferencia de presión y la resistencia al flujo de las válvulas en los extremos del tanque. Realizando un análisis por mallas, utilizando el circuito eléctrico equivalente de la figura 4, se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & \frac{1}{R_1 C} \\ \frac{1}{R_2 C} & -\frac{1}{R_2 C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{27}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Con estas consideraciones el sistema lineal obtenido resulta de segundo orden con una sola entrada y una sola salida. Realizando la misma metodología para el circuito equivalente de la figura 5, donde se considera la inercancia, ecuación (5) de los conductos, obtenemos el siguiente sistema representado en espacio de estados:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{R_1}{C} & \frac{1}{R_1 C} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{R_2 C} & 0 & -\frac{1}{R_2 C} & -\frac{R_2}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{28}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Donde (28) representa un sistema de cuarto orden de una sola entrada y una sola salida. Note que los coeficientes  $R_1$  y  $R_2$  son variantes en el tiempo y dependientes del punto de operación. Identificación.

Los datos utilizados fueron adquiridos mediante el uso de un convertidor corriente-voltaje y un equipo myRIO-1900 de National Instruments. Las señales muestreadas están tomadas en una escala equivalente 0-80 psi a 0-10 volts para ambos transmisores. Se repitió el experimento cinco veces para tener una mayor opción de datos para la identificación y validación. Los datos fueron procesadas para eliminar el ligero offset que no se pudo eliminar por completo con el convertidor.

Las señales usadas fueron filtradas para comparar los resultados de la identificación con las señales originales, en la figura 6 se muestran ambos grupos de señales.

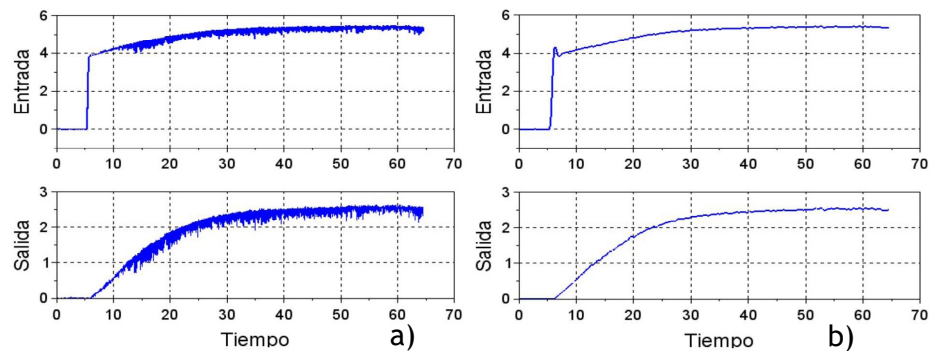


Fig. 6. Señales entrada-salida: a) sin filtrar, b) filtradas.

Los valores del filtro utilizado fueron seleccionados basados en el análisis espectral de la señal de entrada. Debido a los resultados de la señal filtrada, se decide usar un filtro con una frecuencia natural de 5 rad/seg. y un factor de amortiguamiento de 0.5.

Se siguió el procedimiento propuesto y descrito anteriormente. Se buscaron modelos de orden 2 y 4 (en concordancia con el análisis realizado en la subsección anterior). Para los modelos calculados se les aplicó la señal de entrada dedicada para validación y se comparó con las salidas medidas. Las gráficas pueden ser apreciadas en la figura 7. Las variantes consideradas corresponden a diferentes conjuntos de valores propios de la matriz F de los regresores. Los resultados son resumidos en la tabla II.

El modelo que mejor responde, (f), está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -0.0350314 \\ 1 & -0.2979834 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.0163995 \\ 0.0207935 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [0 \quad 1] x(t) \end{aligned} \tag{29}$$

Note que debido al procedimiento utilizado el modelo obtenido esta en la forma canónica de observador descrita previamente. Esto reduce el número de parámetros que se requiere estimar y hace que corresponda al número de parámetros que se determinan usando enfoques entrada-salida<sup>5</sup>. Observe que en un esfuerzo por relacionar el modelo (27) con el modelo calculado (29) se puede utilizar la transformación  $T$  del teorema en sentido inverso para encontrar o tratar de encontrar los valores de los parámetros físicos correspondientes.

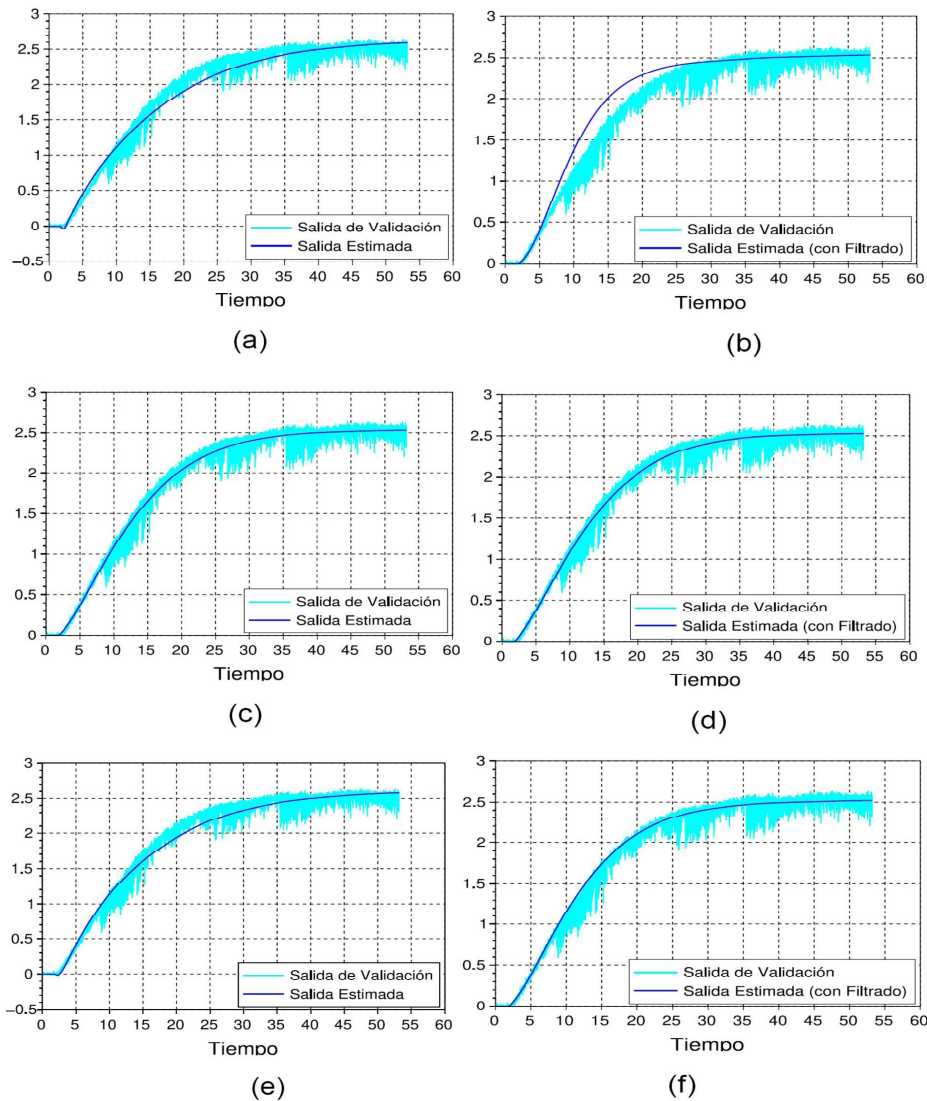


Fig. 7. Comparación de la respuesta de los modelos identificados de segundo orden.

Tabla. II. Resumen de resultados para los modelos obtenidos.

Características del Modelo de segundo orden	Valores propios del regresor	% de error
(a) Señal sin filtrar	{-3, -4}	4.51
(b) Señal filtrada	{-3, -4}	5.45
(c) Señal sin filtrar	{-0.3, -0.4}	3.07
(d) Señal filtrada	{-0.3, -0.4}	3.03
(e) Señal sin filtrar	{-1, -2}	4.01
(f) Señal filtrada	{-1, -2}	2.98

Note, sin embargo, que la relación entre parámetros físicos y los parámetros calculados (llamados frecuentemente parámetros matemáticos) pudiera ser no-lineal. En tales casos, es necesario la solución numérica de ecuaciones no lineales para obtener los parámetros físicos del modelo del sistema.

Los resultado de la aplicación del modelo determinado de orden dos, descrito por la ecuación (29), es verificado utilizando una medición distinta de la que se utilizo para hacer el cálculo de los parámetros, es decir, hay un conjunto de mediciones entrada-salida del sistema las cuales han sido usadas para la identificación (determinación experimental del modelo (29)) y hay otro conjunto de mediciones del mismo sistema que se utilizan para validar el modelo encontrado.

Para la estructura de cuarto orden los resultados se pueden apreciar en la figura 8.

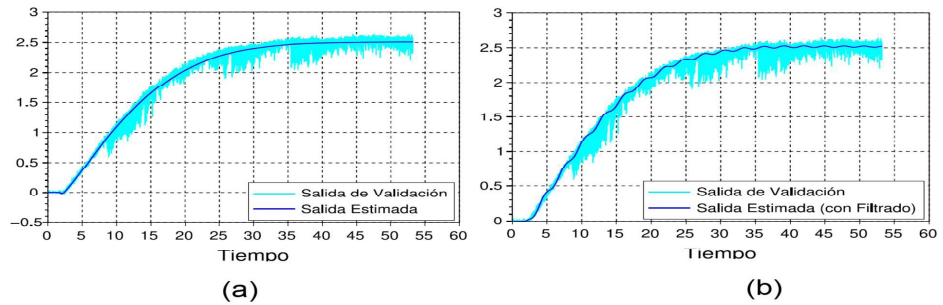


Fig. 8. Comparación de la respuesta de los modelos identificados de cuarto orden.

El correspondiente modelo de cuarto orden resultante es:

Se obtuvieron dos modelos (con algunas variantes cada uno), uno de segundo orden y otro de cuarto orden con la finalidad de corresponder con la estructura obtenida del procedimiento de modelado presentado previamente. Se incluyeron 7 decimales para cada parámetro calculado, sin embargo, habrá que revisar la sensibilidad des coeficientes ante errores de truncamiento.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.1032294 \\ 1 & 0 & 0 & -1.0347277 \\ 0 & 1 & 0 & -4.8353029 \\ 0 & 0 & 1 & -0.2789474 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.0480933 \\ 0.1425392 \\ -0.0458011 \\ 0.0242500 \end{bmatrix} u(t) \quad (30)$$

$$y(t) = [0 \ 0 \ 0 \ 1]x(t)$$

Tabla. III. Resumen de resultados para los modelos obtenidos de orden cuatro.

Características del Modelo de cuarto orden	Valores propios del regresor	% de error
(a) Señal sin filtrar	{-1, -2}	3.21
(b) Señal filtrada	{-1, -2}	2.76

### CONCLUSIONES

Lograr un modelo útil mediante identificación depende directamente de la función que se le dará al modelo estimado, esto es, la precisión que requiere de acuerdo con el uso que se le dará. En este trabajo se trató de obtener un modelo estimado que pudiera acercarse al comportamiento real entrada-salida del sistema, que pudiera ser útil para aplicaciones de simulación y control. El resultado obtenido tiene errores relativos, (alrededor del 3%) lo cual se considera un resultado exitoso. De las cuestiones a tomar en cuenta, primero consideremos el orden del sistema estimado. Aunque el sistema de cuarto orden obtuvo el mejor resultado, la diferencia con los mejores sistemas estimados de segundo orden

es de menos del 0.3%. El algoritmo y el trabajo extra para obtener y manejar un sistema de cuarto orden podría no justificarse, dado que el modelo obtenido de segundo orden alcanzó una precisión bastante aceptable, (por ejemplo para realizar control). Considerando que la obtención del modelo pudiera tener como objetivo desarrollar un compensador o controlador que permita modificar el comportamiento del sistema a uno con características deseadas, entonces un sistema de menor orden facilitará el análisis y diseño de tales controladores.

## REFERENCIAS

1. L. Ljung, System Identification. Theory for the user, Prentice Hall, 1999.
2. T. Söderström, P. Stoica, System Identification, Prentice Hall, 1989.
3. K. J. Keesman, An introduction to system identification, Springer, 2011.
4. R. Isermann, M. Münchhof, Identification of dynamic systems, an introduction with applications, Springer 2011.
5. H. Garnier, L. Wang, Identification of Continuous-time Models from Sampled Data, Springer, 2008.
6. L. Brillouin, Wave propagation in periodic structures: Electric filters and crystal lattices, McGraw Hill, New York, 1946. p. 2.
7. K. Ogata, Sistemas de control en tiempo discreto, Prentice Hall.1996.
8. R. S. Esfandiari and H. V. Vu, Dynamic systems: modeling and analysis. McGraw-Hill. 1997
9. Ljung, L., y Glad, T., Modeling of dynamic systems. PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1994.
10. G. Kreisselmeier, Adaptive Observers with Exponential Rate of Convergence, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-22, no. 1. February 1977.



**Ingenierías  
en línea**

**A TEXTO COMPLETO  
DESDE EL NÚMERO 1**

**<http://ingenierias.uanl.mx>**



LA **UANL**

¡EXTRA!  
¡EXTRA!



EN LA **XXVIII**

**FERIA**

INTERNACIONAL

DEL **LIBRO**  
DE **MONTERREY**

*¡Visítanos!*

STANDS PASILLO 900 **928** y **929**

**CINTERMEX | 13 AL 21 DE OCTUBRE 2018**

DIRECCIÓN DE EDITORIAL UNIVERSITARIA UANL  
☎ 8329.4126 y 11  
✉ editorialuniversitaria.uanl.mx

📱 /uanired 📺 /uanl  
📺 /culturauanl  
📱 /casalibrouanl 📺 /casa\_librouanl

**#SOMOSUNI**  
TRABAJAR · TRANSFORMAR · TRANSCENDER