

# Caracterización paramétrica para un modelo de segundo orden del servomotor RC

Melissa E. Pérez Morales, Manuel Zamora,  
Ángel Rodríguez-Liñán

UANL-FIME

melissa.perez1303@gmail.com, imtzamora@hotmail.com,

angel.rodriguezln@uanl.edu.mx

## RESUMEN

*El uso de algoritmos de control retroalimentado en mecanismos con servomotores RC suelen requerir el conocimiento del modelo dinámico del servomotor. Sin embargo, en ocasiones se omiten dinámicas y parámetros en estos modelos. Además, es frecuente no conocer el valor de los parámetros específicos para el servomotor utilizado. En este trabajo, se presenta un modelo de 2° orden de servomotor RC y una solución para estimar sus parámetros, a partir de mediciones de las señales de entrada y salida. Resultados de esta metodología de estimación paramétrica se ilustran para un servomotor RC comercial.*

## PALABRAS CLAVE

Servomotor RC, Modelo dinámico, Estimación paramétrica.

## ABSTRACT

*Usually, the feedback control algorithms in mechanisms with RC servomotors require the knowledge of a dynamic model of the servomotor. However, dynamics and parameters are sometimes omitted in these models. In addition, it is common to not know the value of the specific parameters for the use of the motor. In this work, we present a model of 2nd order of servomotor RC and a solution to estimate its parameters, based on the input and output signals. Results of this parametric estimation methodology are illustrated for a commercial RC servomotor.*

## KEYWORDS

RC servomotor, Dynamic model, Parametric estimation.

## INTRODUCCIÓN

Los servomotores son uno de los actuadores más utilizados en la industria, se emplean en sistemas electromecánicos, robotizados, automatizados, o en muchas otras aplicaciones, se pueden definir como un motor eléctrico ordinario que incorpora a un servodrive (controlador electrónico). Principalmente, cuenta con un sistema de realimentación (como un encoder o tacogenerador) con el servo drive, configurable para regular posición, velocidad o par de torsión del eje del servomotor<sup>1</sup>. Comercialmente existen diversos tipos de servomotores, dependiendo del tipo de motor electromecánico o del servodrive que incorporan,

como los de corriente directa, incluyendo a los de imanes permanentes, los servomotores RC (por su uso para Radio Control), de corriente alterna y los de transmisión directa. Particularmente, los servomotores RC son ampliamente requeridos en aplicaciones tales como biodispositivos, autotrónica, domótica y de entretenimiento, sin importar sus grados de libertad ni su configuración morfológica, esto se debe en gran medida al tamaño compacto, su gran precisión y bajo costo. Los servomotores RC se componen de un motor de corriente directa (CD), de un sistema electrónico de control y una caja de engranajes, cuya función principal es la reducción de la velocidad de giro y el aumento del par de torsión del eje motriz. Se puede medir la posición de este eje en todo momento puesto que está conectado a un potenciómetro. No obstante, a pesar de su vasto rango de aplicación, los servomotores RC presentan errores en ajustes y variaciones de posición, debidas principalmente a los cambios de temperatura, voltaje de alimentación, carga, ruido eléctrico en el circuito, entre otros.

En muchas ocasiones, la información de los parámetros de los servomotores es desconocida para los usuarios, puesto que no todos los fabricantes proporcionan dicha información en hojas de datos o simplemente hay variaciones paramétricas de un servomotor a otro por diversas causas como temperatura, envejecimiento, excesos a los que se han sometido, bajo control de calidad, etcétera. Datos como la relación del engranaje, resistencia e inductancia del devanado de armadura, coeficiente de fuerza contraelectromotriz, coeficiente de fricción y del momento de inercia, serían necesarios de conocer para poder encontrar un modelo matemático capaz de describir el comportamiento del servomotor con carga. Es por ello que es de interés encontrar un modelo matemático y caracterizar cuantitativamente sus parámetros, con la finalidad de tomarlos en cuenta en algoritmos y controladores que se implementan para reducir los errores que surgen en las diversas aplicaciones.

## Antecedentes

Como se ha mencionado, los servomotores se componen de un motor de CD, un sistema electrónico de control y un sistema de engranaje reductor. Cada uno de estos subsistemas pueden modelarse por separado y posteriormente interconectarse para obtener un modelo completo del servomotor. Para el caso del subsistema del motor de CD, se estudia como una parte mecánica y una eléctrica, con ciertas ecuaciones de acoplamiento entre ambas<sup>2</sup>. En otros trabajos, se presenta<sup>3</sup> un modelo de un motor de CD de imanes permanentes, tipo de motor más comúnmente usado por su bajo costo, en éste se puede apreciar la validación del modelo matemático con el modelo real. Con estos métodos, se obtiene una función de transferencia como modelo, lo que complica su uso en sistemas tales como mecanismos multi-articulados, puesto que son sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO por sus siglas del inglés multi-input/multi-output). Además, que estos modelos sólo corresponden al motor de CD y no incluyen los demás componentes de un servomotor.

En algunos trabajos<sup>4,5</sup>, se proponen modelos parciales del servomotor, que corresponden sólo a modelos del motor de CD y posteriormente se le aplican ciertas técnicas de estimación y de control, que compensan las dinámicas no modeladas, logrando la regulación de posición y velocidad angular. En un

trabajo<sup>6</sup>, se considera que incertidumbres tales como, errores de modelado, de medición y variaciones en los parámetros, afectan la precisión del servomotor, es por ello que utilizan un observador de perturbaciones, para estimar y compensar dichas incertidumbres. No obstante, el modelo que proponen sigue siendo sólo del motor de CD. En otro trabajo<sup>7</sup>, se obtiene el modelo de un motor de CD sin saturación magnética, a partir de las mediciones de la corriente y la velocidad del rotor mediante el método de Strejc. Sin embargo, en estos trabajos se enfocan básicamente con motores de CD instrumentados electrónicamente para utilizarlos en modo de servomotor, lo cual impide utilizar directamente la misma metodología en servomotores RC comerciales.

Algunos trabajos<sup>8,9</sup> incluyen el subsistema electrónico y de engranaje, proponiendo un modelo completo de servomotor. En uno de ellos<sup>8</sup>, validan el modelo, aunque no proporcionan la metodología para estimar los valores numéricos de los parámetros del servomotor, y en el otro<sup>9</sup>, se utiliza una técnica de identificación basada en mínimos cuadrados para la estimación paramétrica del modelo. Sin embargo, en ambos trabajos sólo se obtienen dichos modelos como funciones de transferencia, los cuales están limitados a condiciones iniciales cero (reposo), a sistemas con una sola entrada y una sola salida, a cargas lineales balanceadas, y en caso de aplicación en mecanismos multiarticulados, a analizarlos como articulaciones desacopladas.

### Contribución

Con base en lo anterior, en este trabajo se presenta el modelado del servomotor RC completo, obteniendo un modelo dinámico de 3° orden a través de ecuaciones diferenciales y un modelo dinámico de 2° orden en espacio de estados. Estos modelos permiten analizar la incorporación de cargas desbalanceadas, no lineales y de mecanismos con múltiples articulaciones acopladas. Además, se propone una metodología para caracterizar los parámetros del modelo de 2° orden. Una vez obtenido el modelo y caracterizados sus parámetros, se muestra la validación del modelo experimentalmente con un servomotor comercial.

### MODELO DINÁMICO DEL SERVOMOTOR

Un servomotor posee la característica de colocar su flecha rotativa en una determinada posición angular, de acuerdo a su capacidad de giro, y mantenerse estable en dicha posición<sup>8</sup>. Una manera de obtener un modelo matemático de un servomotor es dividirlo en subsistemas, para posteriormente incorporar los todos en un solo modelo. En la figura 1, se ilustran los subsistemas eléctrico y mecánico sin carga .

En el subsistema eléctrico, el flujo magnético  $\psi$  generado por el circuito de campo del motor es proporcional a la corriente de campo  $i_f$

$$\psi = k_f i_f \quad (1)$$

donde  $k_f$  es la constante de proporcionalidad. El par desarrollado por el motor  $\tau_m$ , es proporcional al flujo magnético y a la corriente de armadura  $i_a$

$$\tau_m = k_1 i_a \psi \quad (2)$$

Si la corriente de campo  $i_f$  es constante, el flujo magnético  $\psi$  de (1) se transforma en una constante  $k_2$ , de manera que la ecuación (2) puede escribirse

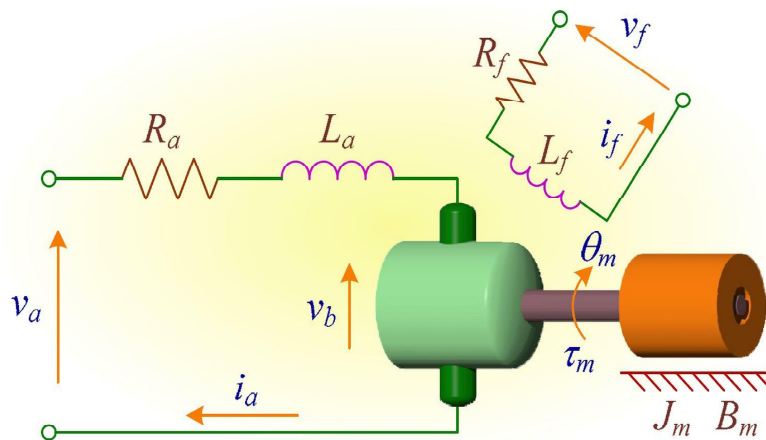


Fig. 1. Representación esquemática de los subsistemas eléctrico y mecánico de un servomotor<sup>8</sup>.

como

$$\tau_m = (k_1 k_2) i_a \quad (3)$$

Definiendo  $k_a := k_1 k_2$ , el par desarrollado por el motor es dado por la ecuación

$$\tau_m = k_a i_a \quad (4)$$

Cuando la armadura gira, se induce en ella un voltaje denominado fuerza contraelectromotriz  $v_b$ , la cual es proporcional al producto del flujo magnético y la velocidad angular  $\dot{\theta}_m$  de la forma

$$v_b = k \psi \dot{\theta}_m \quad (5)$$

Para un flujo magnético constante, la fuerza electromotriz inversa es directamente proporcional a la velocidad angular considerando  $k_b = k \psi$ , entonces la ecuación (5) puede escribirse como

$$v_b = k_b \dot{\theta}_m \quad (6)$$

Analizando la malla eléctrica de la figura 1, la relación entre la tensión de alimentación  $v_a$  y la corriente de armadura  $i_a$  se define como

$$v_a = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + v_b \quad (7)$$

donde  $L_a$  es la inductancia de armadura y  $R_a$  es la resistencia de armadura.

Analizando el diagrama de cuerpo libre de la figura 1, la relación entre la posición del eje  $\theta_m$  y el par de torsión  $\tau_m$  corresponde a

$$\tau_m = J_m \frac{d^2 \theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} \quad (8)$$

donde  $J_m$  es el momento de inercia del motor y  $B_m$  representa la fricción viscosa del motor. Así, las ecuaciones (4), (6), (7) y (8) representan al subsistema electromecánico del servomotor, es decir, su motor de CD sin carga.

Al añadir una caja de engranajes a la salida del eje del motor y acoplar una carga, como se ilustra en la figura 2, se involucran directamente la velocidad y fuerza de transmisión del motor hacia la carga. La relación entre la posición angular  $\theta_m$  con el par de torsión  $\tau_m$  de la flecha del motor está dada por

$$\tau_m = J_m \frac{d^2 \theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} + \frac{\tau_L}{n} \quad (9)$$

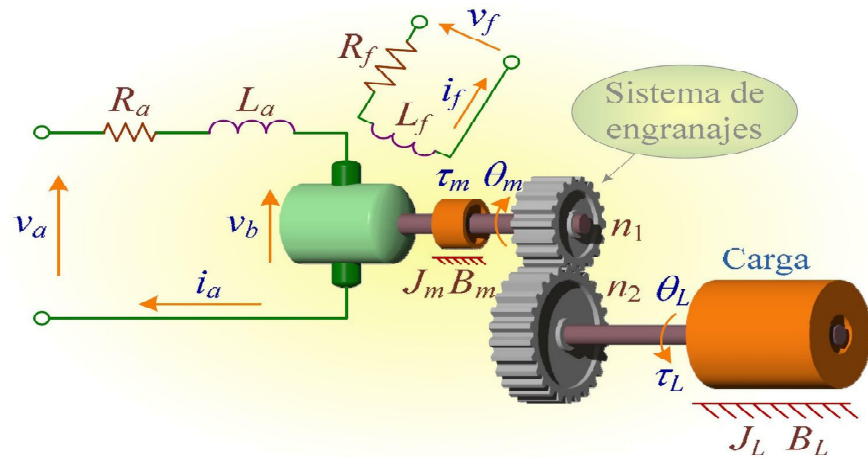


Fig. 2. Representación esquemática de un motor de CD con carga acoplada mediante engranajes<sup>8</sup>.

donde  $\tau_L$  es el par de torsión de la carga,  $n = \frac{n_2}{n_1}$ ,  $n_1$  es el número de dientes del engrane de entrada,  $n_2$  es el número de dientes del engrane de salida (en la práctica el engranaje suele componerse de más engranes, que serían equivalentes a la relación  $n$ ). La posición angular de la carga se define como

$$\theta_L = \frac{1}{n} \theta_m \quad (10)$$

Las ecuaciones (4), (6), (7), (9) y (10) describen el comportamiento del motor de CD con engranaje reductor y carga. Estas ecuaciones pueden manipularse para obtener la relación entre el voltaje de armadura del motor  $v_a$ , el par de torsión de la carga  $\tau_L$  y la posición angular de la carga  $\theta_L$ , lo cual resulta en la ecuación diferencial

$$\frac{L_a J_m}{R_a} \ddot{\theta}_L + \left( \frac{L_a}{R_a} B_m + J_m \right) \ddot{\theta}_L + \left( \frac{k_a k_b}{R_a} + B_m \right) \dot{\theta}_L + \frac{1}{n^2} \tau_L + \frac{L_a}{R_a n^2} \dot{\tau}_L = \frac{k_a}{R_a n} v_a \quad (11)$$

Puede utilizarse el teorema de perturbaciones singulares<sup>10</sup> para reducir el orden del modelo (11), al considerar que la inductancia de armadura  $L_a$  es un valor positivo suficientemente pequeño ( $\epsilon$ ), lo que implica que la dinámica de la ecuación (7) es más rápida que el resto, pudiéndola aproximar como una ecuación algebraica; lo que simplifica (11) a

$$n J_m \ddot{\theta}_L + n \left( \frac{k_a k_b}{R_a} + B_m \right) \dot{\theta}_L + \frac{1}{n} \tau_L = \frac{k_a}{R_a} v_a \quad (12)$$

En la figura 3 se incluye el subsistema electrónico de control, tal que el voltaje de armadura es

$$v_a = A k_s v_e = A k_s (V'_i - V_p) \quad (13)$$

donde  $A$  es la ganancia del amplificador (puente H),  $k_s$  representa la sensibilidad del comparador,  $v_e$  es el voltaje de error entre el voltaje de entrada  $V'_i$  y el voltaje del potenciómetro  $V_p$ . El voltaje de entrada se modela como

$$V'_i = k_{p2} w + V'_{ioff} \quad (14)$$

donde  $k_{p2}$  es una ganancia de entrada y  $V'_{ioff}$  un voltaje constante en el circuito electrónico,  $w$  es el ancho de pulso de la señal de entrada PWM (por sus siglas del inglés pulse width modulation). Sea el voltaje del potenciómetro modelado

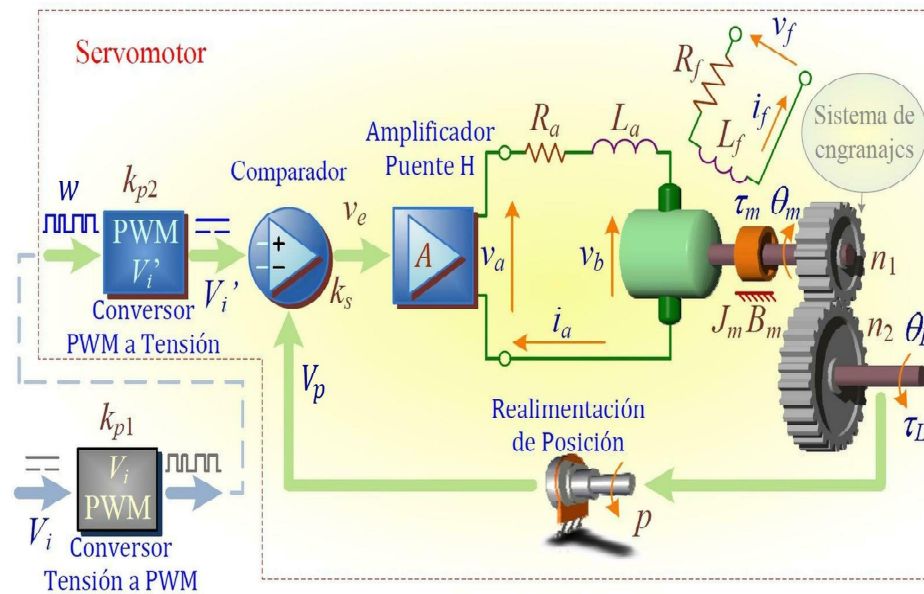


Fig. 3. Diagrama esquemático de un servomotor<sup>8</sup>.

por la ecuación

$$V_p = p\theta_L + V_{poff} \quad (15)$$

donde  $p$  y  $V_{poff}$  son parámetros propios del potenciómetro acoplado a la flecha de la carga. Sustituyendo (14) y (15) en (13), resulta la ecuación

$$v_a = Ak_s k_{p2} w + Ak_s V'_{ioff} - Ak_s p\theta_L - Ak_s V_{poff} \quad (16)$$

El subsistema electrónico puede interconectarse con el subsistema electromecánico del servomotor sustituyendo (16) en (12), manipulando algebraicamente se obtiene la ecuación

$$\frac{nJ_m R_a}{k_a A k_s p} \ddot{\theta}_L + \frac{nR_a}{k_a A k_s p} \left( \frac{k_a k_b}{R_a} + B_m \right) \dot{\theta}_L + \theta_L = \frac{k_{p2}}{p} w - \frac{R_a}{nk_a A k_s p} \tau_L + \frac{V'_{ioff} - V_{poff}}{p} \quad (17)$$

La ecuación diferencial (17) es un modelo de 2° orden del comportamiento completo del servomotor RC, que puede reescribirse en forma compacta como

$$c_1 \ddot{q} + c_2 \dot{q} + q = c_3 w - c_4 \tau_L + c_5 \quad (18)$$

con  $q = \theta_L$ ,  $\dot{q} = \dot{\theta}_L$ ,  $\ddot{q} = \ddot{\theta}_L$ ,  $c_1 = \frac{nJ_m R_a}{k_a A k_s p}$ ,  $c_2 = \frac{nk_a k_b + nR_a B_m}{k_a A k_s p}$ ,  $c_3 = \frac{k_{p2}}{p}$ ,  $c_4 = \frac{R_a}{nk_a A k_s p}$  y  $c_5 = \frac{V'_{ioff} - V_{poff}}{p}$ .

La ecuación (18) puede representarse como un modelo en espacio de estados, definiendo la entrada como el ancho de pulso  $w$  de la señal PWM, y los estados como la posición angular  $q$  y la velocidad angular  $\dot{q}$  de la carga, dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{c_1} & -\frac{c_2}{c_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{c_3}{c_1} \end{bmatrix} w - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{c_4}{c_1} \end{bmatrix} \tau_L + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{c_5}{c_1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Hasta ese punto, se ha presentado el modelo del motor CD con engranaje reductor y carga mediante el conjunto de ecuaciones (4), (6), (7), (9) y (10); se presentó un modelo de 3° orden del servomotor RC completo mediante el

conjunto de ecuaciones (4), (6), (7), (9), (10) y (16); así como un modelo de 2° orden del servomotor RC completo tanto en la ecuación diferencial (17) como en la ecuación de estado (19).

Con el propósito de utilizar estos modelos para análisis, diseño de sistemas con servomotor RC o para algoritmos de control, es necesario conocer los valores numéricos de sus parámetros. Sin embargo, en general estos valores numéricos se suponen desconocidos. Para ayudar a resolver esto, en este trabajo se ofrece un método para estimar valores numéricos constantes de  $c_1, c_2, c_3, c_4$  y  $c_5$  de (18) y (19). Una ventaja del método que se presenta es que sólo requiere la medición de las variables de entrada y salida, sin la necesidad de conocer cada parámetro físico del servomotor.

### CARACTERIZACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO

En el presente trabajo, se aborda el caso en que los valores nominales de los componentes del servomotor son desconocidos, tales como la relación entre el número de dientes de los engranajes, la corriente de armadura, la resistencia del motor, etcétera. Con la metodología que se propone, no es estrictamente necesario conocer cada parámetro en lo individual, sino que sería suficiente conocer el valor de los coeficientes  $c_1, c_2, c_3, c_4$  y  $c_5$  de (18) o (19) para utilizar dichos modelos en simulaciones y aplicaciones del servomotor RC. Para estimar dichos coeficientes, la metodología propuesta requiere medición de la señal de entrada PWM, de la señal de salida  $q=\theta_L$  y de la medición del voltaje  $V_p$  del potenciómetro de retroalimentación del servomotor; la cual se describe a continuación:

### Modelo para la señal PWM y voltaje del potenciómetro de retroalimentación

Una señal PWM con ancho de pulso  $w$  puede aproximarse como un voltaje  $V_i$  de corriente directa<sup>11</sup>, su relación depende del periodo  $T$  y la amplitud  $V_{dd}$  de la señal PWM, que se ilustran en la figura 4. Entonces, la relación entre el ancho del pulso  $w$  y  $V_i$  es dada por

$$w = k_{pl} V_i \tag{20}$$

donde  $k_{pl} = T/V_{dd}$  es un factor de equivalencia. Para algunas tarjetas electrónicas de control, el fabricante proporciona los valores de  $T$  y  $V_{dd}$  de la señal PWM que generan. De no ser el caso, puede utilizarse un osciloscopio para conocer los valores de  $T$  y  $V_{dd}$  de la señal PWM.

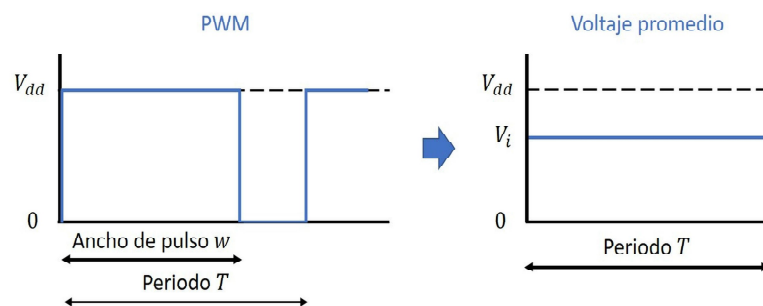


Fig. 4. Equivalencia de una señal PWM con el voltaje de corriente directa  $V_i$ .

En este trabajo se hace la suposición que el voltaje  $V_i$  (equivalente a la señal PWM) puede modelarse como

$$V_i = k_i q_{ref} + V_{ioff} \quad (21)$$

donde  $q_{ref}$  es la referencia de posición deseada para el servomotor,  $k_i$  y  $V_{ioff}$  son parámetros asociados al dispositivo o tarjeta electrónica que genera la señal PWM. Los coeficientes  $k_i$  y  $V_{ioff}$  se pueden obtener de la gráfica de los voltajes  $V_i$  (de las señales PWM generadas por la tarjeta electrónica de control) para varias referencias de posición deseada  $q_{ref}$ , como se ilustra en la figura 5. El coeficiente  $k_i$  es la pendiente en dicha gráfica y el  $V_{ioff}$  es el valor del voltaje  $V_i$  para  $q_{ref}=0$ . Luego, al sustituir (21) en (20) y evaluar los coeficientes estimados, resulta la ecuación

$$w = k_{p1} k_i q_{ref} + k_{p1} V_{ioff} \quad (22)$$

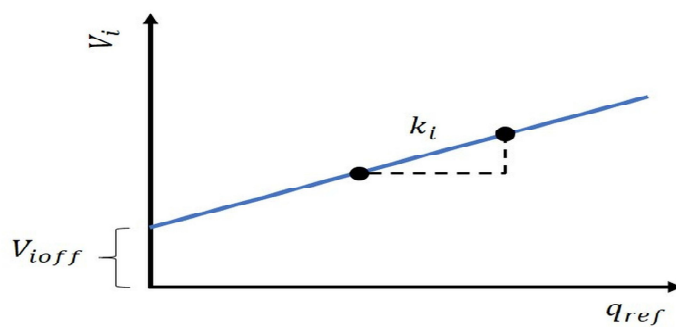


Fig. 5. Obtención de los coeficientes  $k_i$  y  $V_{ioff}$ .

Por otro lado, los coeficientes  $p$  y  $V_{poff}$  del voltaje del potenciómetro modelado en (15), se pueden calcular de la gráfica de varios voltajes  $V_p$  (medidos del potenciómetro de retroalimentación del servomotor) contra las correspondientes posiciones reales  $q$  de la flecha del servomotor, como se ilustra en la figura 6.

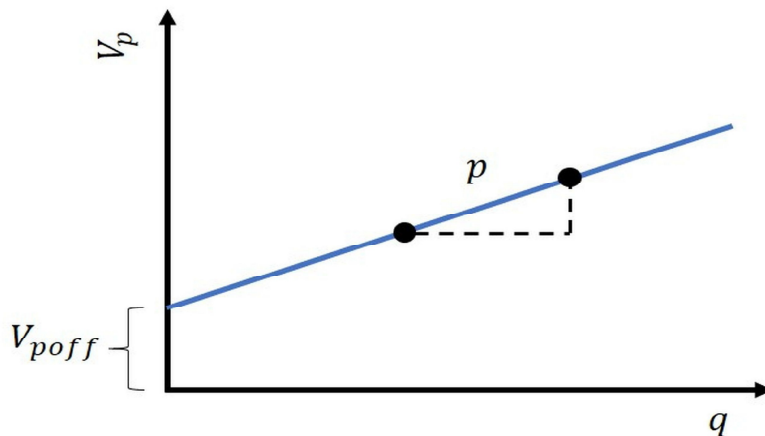


Fig. 6. Obtención de los coeficientes  $p$  y  $V_{poff}$ .

El coeficiente  $p$  es la pendiente en dicha gráfica y el  $V_{poff}$  es el valor del voltaje  $V_p$  para  $q = 0$ .

Como se puede ver de (12),  $v_a = 0$  en el caso que el servomotor no tenga carga ( $\tau_L = 0$ ) y esté en estado estacionario ( $\dot{q} = 0$  y  $\ddot{q} = 0$ ). Entonces de la ecuación (13), resulta  $V'_i = V_p$ . En ese escenario, con mediciones de voltajes  $V_p$  y el ancho  $w$



de la señales PWM correspondientes, se obtienen los coeficientes  $k_{p2}$  y  $V'_{ioff}$  del modelo (14). Como se ilustra en la figura 7, el coeficiente  $k_{p2}$  es la pendiente en dicha gráfica y el  $V'_{ioff}$  es el valor del voltaje  $V_p$  para  $w = 0$ .

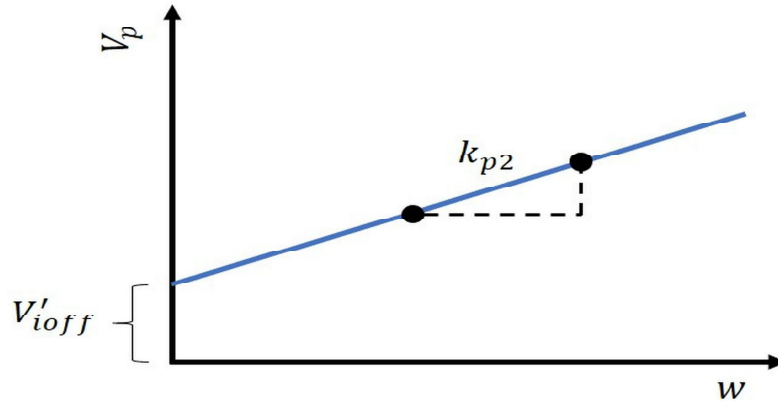


Fig. 7. Obtención de los coeficientes  $k_2$  y  $V_{ioff}$ .

### Estimación de coeficientes $c_1, c_2, c_3$ y $c_5$

Con el valor de los parámetros  $k_{p1}, k_i, V_{ioff}, p, V_{poff}, k_{p2}$  y  $V'_{ioff}$ , es posible estimar el valor de  $w$  y de los coeficientes  $c_3$  y  $c_5$  de (18).

Si se integra en el tiempo la ecuación (18) cuando el servomotor no tiene carga, con  $w$  constante debido a que  $q_{ref}$  sea constante, resulta

$$\begin{aligned} c_1 \int_0^t \ddot{q} dt + c_2 \int_0^t \dot{q} dt + \int_0^t q dt &= c_3 w \int_0^t dt + c_5 \int_0^t dt \\ c_1 \dot{q}(t) + c_2 q(t) + z(t) &= c_3 w t + c_5 t \end{aligned}$$

definiendo  $z(t) = \int_0^t q(t) dt$ . Para el caso en estado estacionario ( $\dot{q} = 0$  y  $q = 0$ ) en tiempo  $t = t_f$ , se obtiene

$$c_2 q(t_f) + z(t_f) = c_3 w t_f + c_5 t_f \quad (23)$$

Por lo tanto,

$$c_2 = \frac{c_3 w t_f + c_5 t_f - z(t_f)}{q(t_f)} \quad (24)$$

Por otro lado, la ecuación (18) se puede despejar como

$$c_1 = \frac{c_3 w - q(t) - c_2 \dot{q}(t) + c_5}{\ddot{q}(t)} \quad (25)$$

Tal que puede interpretarse que  $c_1$  es la pendiente de la recta que aparece en la figura 6. Esta línea recta aparece sólo con mediciones en el estado transitorio. Las derivadas  $\dot{q}(t)$  y  $\ddot{q}(t)$  se pueden calcular numéricamente a partir de los datos medidos y filtrados de  $q(t)$ .

### Estimación del coeficiente $c_4$

El procedimiento anterior es suficiente para obtener los coeficientes del modelo (18) del servomotor sin carga, o para uno con carga balanceada de la forma  $\tau_L = J_L \ddot{q} + B_L \dot{q}$ , tal que  $J_L$  y  $B_L$  sean incluidos en los coeficientes de  $\dot{q}$  y  $\ddot{q}$  en (18), respectivamente. En el caso de aplicaciones del servomotor con otro

tipo de cargas, es conveniente calcular el coeficiente  $c_4$ . Para ello, considérese una carga desbalanceada conocida, como la del péndulo descrita por

$$\tau_L = J_L \ddot{q} + B_L \dot{q} + mgl \sin(q) \quad (26)$$

donde  $J_L$  es el momento de inercia de la carga (puede ser desconocido),  $B_L$  es el coeficiente de fricción viscosa de la carga (puede ser desconocido),  $m$  es la masa de la carga (debe ser conocida),  $l$  es la distancia de la flecha del servomotor al centro de masa de la carga (debe ser conocida) y  $g$  es la aceleración gravitacional. Incluyendo la carga (26) en la ecuación (18), se obtiene la ecuación

$$(c_1 + c_4 J_L) \ddot{q} + (c_2 + c_4 B_L) \dot{q} + q = c_3 w - c_4 mgl \sin(q) + c_5 \quad (27)$$

Cuando el servomotor está en estado estacionario ( $\dot{q} = 0$  y  $\ddot{q} = 0$ ) en tiempo  $t_f$ , con una entrada  $w$  constante debido a que  $q_{ref}$  sea constante, se despeja  $c_4$  de (27) en la forma

$$c_4 = \frac{c_3 w + c_5 - q(t_f)}{mgl \sin(q(t_f))} \quad (28)$$

Entonces, con la estimación que se ha obtenido de los coeficientes  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $c_4$  y  $c_5$ , se caracteriza a los modelos (18) y (19), para poder utilizarlos en diseño, aplicaciones y algoritmos de control que requieran conocer el modelo del servomotor para cualquier carga  $\tau_L$ .

Para validar el modelo y la metodología de estimación de parámetros, en la siguiente sección se presentan resultados para un servomotor RC comercial.

## RESULTADOS

En esta sección se valida el procedimiento presentado anteriormente, al estimar los coeficientes  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $c_4$  y  $c_5$  de (18) y (19), para el servomotor RC comercial *Power HD High-Torque Servo 1501MG* que se muestra en la figura 8, a partir de mediciones de su entrada y salida.

Estas mediciones se obtuvieron durante experimentos de posicionamiento de la flecha del servomotor, utilizando una tarjeta Arduino Mega para generar la señal PWM requerida a la entrada del servomotor.

Estos experimentos se realizaron para 19 referencias de posiciones deseadas distintas, en los que se midieron los voltajes  $V_i$  y ancho de pulso  $w$  de la señal PWM (a la salida de la tarjeta Arduino Mega) asociados a cada referencia de posición



Fig. 8. Servomotor RC *Power HD High-Torque Servo 1501MG*.

deseada  $q_{ref}$ , así como los voltajes  $V_p$  (del potenciómetro de retroalimentación) asociados a cada posición medida  $q$  de la flecha del servomotor. Los voltajes  $V_i$  y  $V_p$  fueron medidos y luego filtrados por un filtro de mediana para atenuar el ruido eléctrico. Los valores numéricos de estas 19 mediciones en estado estacionario están contenidos en la tabla I.

A partir de las mediciones en la tabla I,  $k_{p1} = \frac{w}{V_i} \approx 3.957 \frac{\text{ms}}{\text{V}}$  para (20), lo cual se aproxima a  $k_{p1} = 4 \frac{\text{ms}}{\text{V}}$  calculado con los datos que proporciona el fabricante de la tarjeta Arduino Mega, que son  $T = 20 \text{ ms}$  y  $V_{dd} = 5 \text{ V}$ . Por lo tanto, en el caso de no medir el ancho de pulso  $w$ , puede generarse una aproximación a los valores  $w$  de la columna correspondiente en la tabla I, a partir del voltaje  $V_i$  y con el  $k_{p1}$  calculado con datos del fabricante.

Con los voltajes  $V_i$  asociados a cada referencia de posición deseada  $q_{ref}$  de la tabla I, se estiman los coeficientes  $k_i$  y  $V_{ioff}$  para (21). Lo que se ilustra en la figura 9.

Ahora, con los voltajes  $V_p$  asociados a cada posición medida  $q$  de la flecha del servomotor, de la tabla I, se estiman los coeficientes  $p$  y  $V_{poff}$  para (15). Lo que se ilustra en la figura 10.

Para los voltajes  $V_p$  asociados a cada ancho de pulso  $w$  de la señal PWM, de la tabla I, se estiman los coeficientes  $k_{p2}$  y  $V'_{ioff}$  para (14). Lo que se ilustra en la figura 11.

Con la estimación que se ha realizado de los parámetros  $k_{p1}$ ,  $k_i$ ,  $V_{ioff}$ ,  $p$ ,  $V_{poff}$ ,  $k_{p2}$  y  $V'_{ioff}$ , se calcula el valor de los coeficientes  $c_3$  y  $c_5$  de (18) y se genera el valor de ancho  $w$  para cualquier referencia de posición deseada  $q_{ref}$ .

Tabla I. Mediciones de los 19 experimentos de posicionamiento.

$q_{ref} [^\circ]$	$V_i [V]$	$w [ms]$	$V_p [V]$	$q [^\circ]$
0	0.138	0.545	0.7625	0
10	0.164	0.648	0.8016	9
20	0.190	0.751	0.8456	18
30	0.216	0.854	0.8895	26
40	0.242	0.957	0.9384	36
50	0.268	1.060	0.9824	45
60	0.294	1.163	1.0264	54
70	0.320	1.266	1.0704	65
80	0.346	1.369	1.1144	75
90	0.372	1.472	1.1632	88
100	0.398	1.575	1.2121	97
110	0.424	1.678	1.2561	107
120	0.450	1.781	1.3050	117
130	0.476	1.884	1.3587	127
140	0.502	1.987	1.4076	138
150	0.528	2.090	1.4565	149
160	0.554	2.193	1.5054	159
170	0.580	2.296	1.5543	170
180	0.606	2.400	1.6031	180

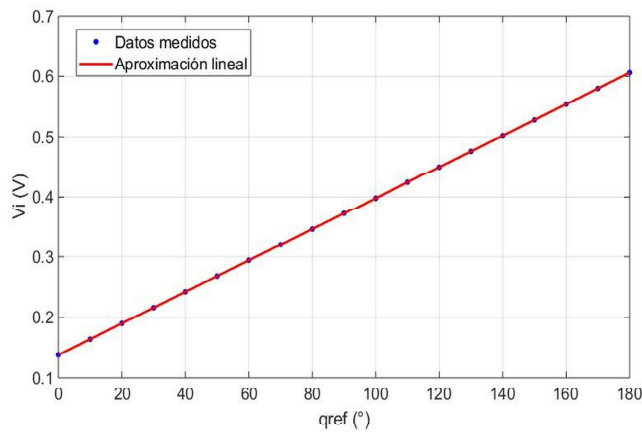


Fig. 9. Obtención experimental de los coeficientes  $k_i$  y  $V_{ioff}$

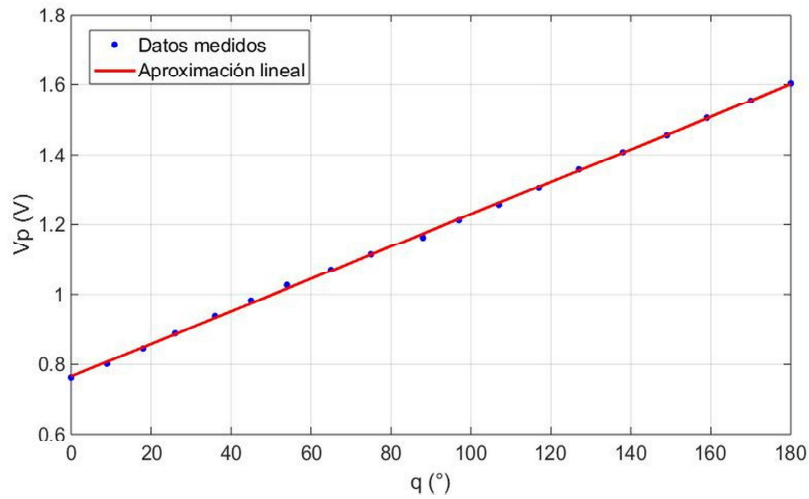


Fig. 10. Obtención experimental de los coeficientes  $p$  y  $V_{poff}$ .

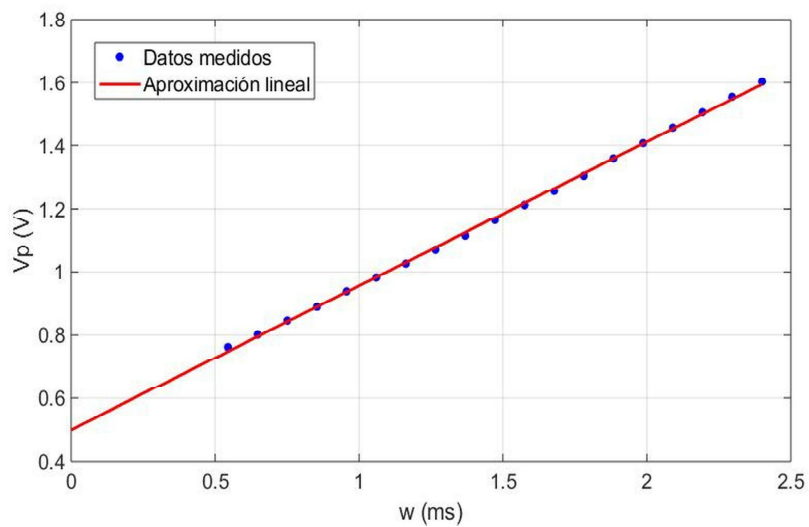


Fig. 11. Obtención experimental de los coeficientes  $k_{p2}$  y  $V'_{ioff}$

Utilizando la metodología descrita en la sección anterior, se estiman los valores numéricos de los coeficientes  $c_2$  con (24) y  $c_1$  con (25). Lo cual requiere conocer la posición  $q$  y su integral  $z$  en estado estacionario para un tiempo  $t_s$ , así como la posición  $q(t)$  y sus derivadas  $\dot{q}(t)$  y  $\ddot{q}(t)$  en estado transitorio. Entonces, se calculan numéricamente estas variables a partir de la posición  $q$  medida en estado transitorio. Debido a su extensión, no se muestran estos valores calculados para los 19 experimentos.

El coeficiente  $c_4$  se estima con (28), a partir de mediciones de  $q$  en estado estacionario, para una carga descrita por la ecuación (26), con  $m=0.100kg$ ,  $l=0.11m$  y  $g=9.8 m/s^2$ .

En resumen, los coeficientes estimados se muestran en la tabla II. Entonces, utilizando los coeficientes estimados  $c_1, c_2, c_3, c_4$  y  $c_5$  en la ecuación (19) es posible describir el comportamiento específico del servomotor RC de los experimentos, cuyo modelo en espacio de estados es

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.353 & -6.666 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 132.12 \end{bmatrix} w - \begin{bmatrix} 0 \\ 55.266 \end{bmatrix} \tau_L - \begin{bmatrix} 0 \\ 76.002 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Para validación del modelo (29), se compara la referencia de posición deseada  $q_{ref}$ , la posición calculada por el modelo y la posición medida  $q$  del servomotor.

Tabla II. Parámetros estimados para Arduino Mega y servomotor *Power HD High-Torque Servo 1501MG*.

Parámetro	Valor estimado
$k_{p1}$	3.9570 ms/V
$k_i$	0.0026V/°
$V_{poff}$	0.1380 V
$k_{p2}$	0.4558 V/ms
$V'_{ioff}$	0.5003 V
$\rho$	0.0046 V/°
$V_{poff}$	0.7600 V
$c_1$	0.7387 s <sup>2</sup>
$c_2$	4.9249 s
$c_3$	97.6017 °/ms
$c_4$	40.8270 °/N-m
$c_5$	56.1456 °

Los resultados pueden observarse en las figuras 12 y 13, donde se puede apreciar que la respuesta del modelo (29) es aproximada al comportamiento del servomotor. Para cuantificar dicha aproximación, se calculó la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE por sus siglas en inglés) entre la posición medida y la posición estimada por el modelo. Para el caso de la figura 12, el RMSE es 1.058°, con un error máximo de 2.83°. Para el caso de la figura 13, el RMSE es 2.052°, con error máximo de 7.74°, al eliminar las primeras muestras debido al retraso por el filtrado de la señal medida.

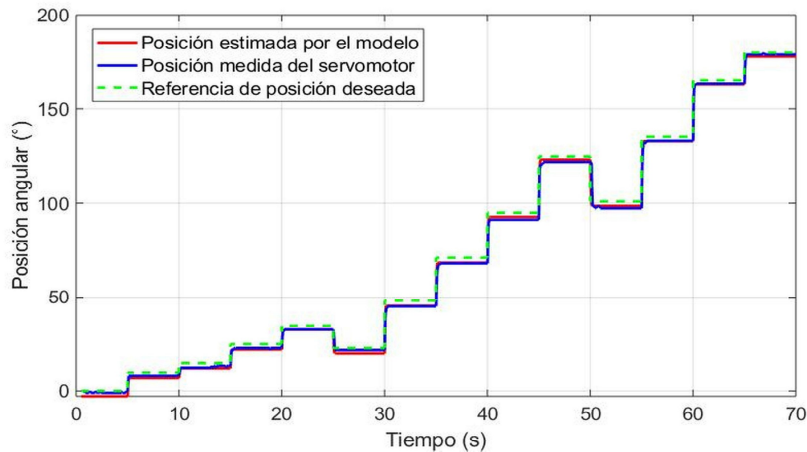


Fig. 12. Comparación de la posición del modelo y la posición medida  $q$  ante referencia de posición  $q_{ref}$  constante por tramos.

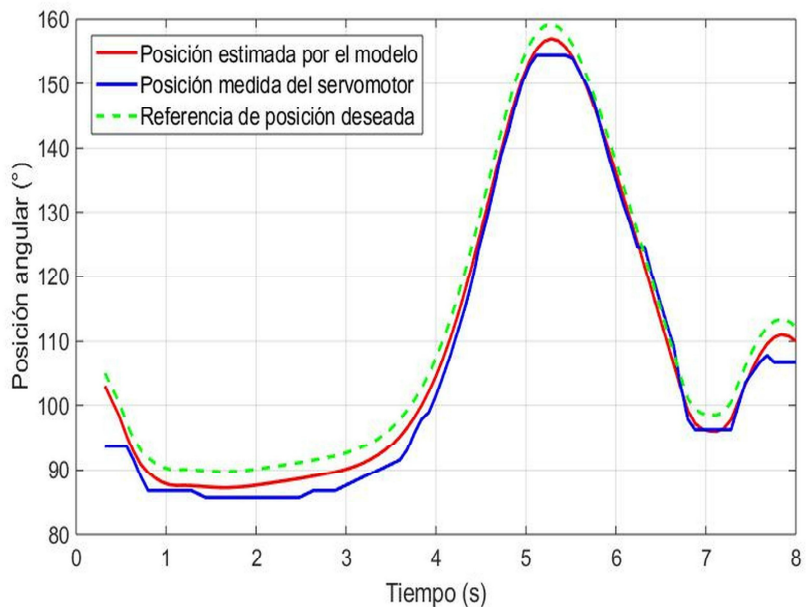


Fig. 13. Comparación de la posición del modelo y la posición medida  $q$  ante referencia de posición  $q_{ref}$  variable.

## CONCLUSIONES

En este trabajo, se muestran modelos de 3<sup>o</sup> y 2<sup>o</sup> orden para servomotores RC, considerando dinámicas que en otros modelos se omiten. Se propuso una metodología que permite la caracterización paramétrica del modelo de 2<sup>o</sup> orden, a partir solamente de mediciones de las señales de entrada y salida. Mediante experimentos con un servomotor RC comercial, se ilustra que los resultados de estimación con esta metodología permiten una buena aproximación del modelo al comportamiento medido del servomotor.

## REFERENCIAS

1. Austin Hughes. *Electric motors and drives*. Newness - Elsevier, 3rd edition, 2009.
2. Katsuhiko Ogata and Yanjuan Yang. *Modern control engineering*, volume 4. Prentice-Hall, 2002.
3. Ricardo Hernández Gaviño. *Introducción a los sistemas de control: conceptos, aplicaciones y simulación con matlab*. 2010.
4. Inteco Sp. z o.o., Krakow, Poland. *Modular Servo System - User Manual*, 2008.
5. J. Manuel Zamora. *Módulo didáctico de control basado en lego mindstorms y simulink*, 2016.
6. Wei-Sheng Huang, Chun-Wei Liu, Pau-Lo Hsu, and Syh-Shiuh Yeh. Precision control and compensation of servomotors and machine tools via the disturbance observer. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 57(1):420–429, 2010.
7. Jesús U. Liceaga-Castro, Irma I. Siller-Alcalá, Jorge Jaimes-Ponce, and Roberto Alcántara-Ramrez. Series dc motor modeling and identification. In *2017 International Conference on Control, Artificial Intelligence, Robotics & Optimization (ICCAIRO)*, pages 248–253. IEEE, 2017.
8. Claudio Urrea Onate and John Kern Molina. Characterization, simulation and implementation of a new dynamic model for a dc servomotor. *IEEE Latin America Transactions*, 12(6):997–1004, 2014.
9. Takashi Wada, Masato Ishikawa, Ryohei Kitayoshi, Ichiro Maruta, and Toshiharu Sugie. Practical modeling and system identification of r/c servo motors. In *2009 IEEE Control Applications (CCA) & Intelligent Control (ISIC)*, pages 1378–1383. IEEE, 2009.
10. Hassan K. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice-Hall, New Jersey, 2(5):5–1, 1996.
11. Nathaniel Pinckney. Pulse-width modulation for microcontroller servo control. *IEEE potentials*, 25(1):27–29, 2006.

**Anúnciese en:**

**Ingenierías**

**INFORMES:**

**Tel: (52) (81) 83294020 Ext. 5854 Fax: (52) (81) 83320904**

**E-mail: [revistaingenierias@gmail.mx](mailto:revistaingenierias@gmail.mx)**

**Internet: <http://ingenierias.uanl.mx>**