Método para resolver una matriz cuadrada mediante la descomposición y reducción de orden

José Luis Cantú Mata
Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
jose.cantumt@uanl.mx

RESUMEN

En el presente escrito su muestra un método para calcular matrices de m x n ≥3 para obtener determinantes. El método mostrado reduce el tamaño de la matriz hasta obtener una matriz 1 x 1 o bien tener un elemento, el cual, con las respectivas operaciones se obtiene el determinante. El método tiene una aproximación al método de condensación desarrollado por Dodgson en 1866, sin embargo, el respectivo desarrollo del sistema es diferente, en el presente escrito se estructura y desarrolla el método paso por paso hasta obtener el determinante.

PALABRAS CLAVE

Determinantes, descomposición y reducción de orden, matriz cuadrada.

ABSTRACT

This paper shows a method to calculate m x n ≥ 3 matrices to obtain determinants. The method shown reduces the size of the matrix until obtaining a 1 x 1 element, with the appropriate operations, obtains the determinant. The method has an approximation to the condensation method developed by Dodgson in 1866, however, the respective development of the system is different. In this paper, the method is structured and developed step by step until the determinant is obtained.

KEYWORDS

Determinants, decomposition and order reduction, square matrix.

INTRODUCCIÓN

En la evolución de las matrices y determinantes, han aparecido métodos que han tratado de simplificar su desarrollo y convertir cada paso en un proceso más sencillo de resolver. Los métodos de mayor reconocimiento son los propuestos por Cramer, Gauss - Jordan, Sarrus, entre otros, sin embargo, mientras que algunos métodos tienden a ser complejos o de mayor trabajo y aunque la evolución de las herramientas informáticas ha proporcionado que el resultado de una operación sea rápida y correcta, ha generado que el estudiante no obtenga la comprensión del respectivo procedimiento, tal es el caso de que al utilizar un software matemático y al proporcionar los datos correspondientes, el software arroja un resultado sin saber que representa, ocasionando que el estudiante no sabe el porqué de ese resultado.

Por lo tanto, el método propuesto es una alternativa que permite comprender fácilmente el procedimiento para obtener un determinante utilizando operaciones aritméticas básicas cuya finalidad es el entendimiento y la lógica del resultado.

ANTECEDENTES

En los estudios realizados sobre matrices y determinantes, en 1693 Leibniz resuelve un sistema de ecuaciones, en la matriz acomodaba los elementos que pertenecían a una ecuación en filas, y el desarrollo del sistema consiste en obtener la suma del producto de los elementos que se encuentran en diagonal restando la suma del producto de los elementos que se encuentran en la diagonal inversa. [1]

$$A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1_0 & 1_1 & 1_2 & 1_0 & 1_1 \\ 2_0 & 2_1 & 2_2 & 2_0 & 2_1 \\ 3_0 & 3_1 & 3_2 & 3_0 & 3_1 \end{array}\right|$$

En 1750 Cramer sustituía la igualdad de las ecuaciones lineales en la matriz desarrollada para obtener el determinante, [2] en 1801 Gauss solucionaba la matriz utilizando operaciones aritméticas para convertir una columna en ceros dejando un elemento para multiplicar por sus adjuntos, [3] en 1866 Dodgson [4] realizó la condensación de una matriz y dividía por el respectivo centro. Así como estos autores ha habido muchos que han realizado aportaciones para que la aplicación de las matrices y determinantes resulte con mayor exactitud y facilidad de desarrollar, se aplica en las áreas de ingeniería, economía, ciencias sociales, geografía, física, matemáticas, entre otras. Se debe tener presente que estos métodos fueron planteados en épocas en que no existían los recursos de cómputo y software para realizar estas las operaciones rápidamente.

OBJETIVO

Obtener el determinante de una matriz cuadrada mediante la descomposición y reducción de orden.

DEFINICIONES

Matriz. Es un arreglo rectangular de números reales ordenados en filas y columnas.

Orden de una matriz. Corresponde a la cantidad m (filas) y n (columnas) que conforman la matriz. Si m = n, se le denomina matriz cuadrada.

Representación algebraica de una matriz. El arreglo rectangular de m x n se estructura de la siguiente manera:

Donde:

$$A = \left| a_{ij} \right| = \left|\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right|$$

a. Es el elemento.

i. Es la fila a la que corresponde el elemento.

j. Es la columna a la que corresponde el elemento.

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

a) El determinante de una matriz es igual al determinante de su traspuesta.

b) De intercambiar dos filas o dos columnas entre sí, el determinante cambia de signo.

c) Si un determinante tiene dos filas o dos columnas iguales, el determinante es cero.

d) Si en un determinante se multiplica por un número todos los elementos de una fila o de una columna, el determinante queda multiplicado por ese número, ya que todos los sumandos que proporcionan el resultado del determinante están multiplicados por dicho número.

e) Si un determinante tiene dos filas o dos columnas iguales, el determinante es cero.

f) Si todos los elementos de una fila o de una columna están constituidos por dos sumandos, el determinante puede descomponerse en la suma de dos determinantes.

g) El valor de un determinante no varía si a una fila o una columna se le suma otra paralela multiplicada por un número.

M

mxn

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{mj} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{vmatrix}$$

6x6

$$\begin{vmatrix} 25 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

5x5

$$\begin{vmatrix} 16 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

4x4

$$\begin{vmatrix} 9 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

3x3

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2x2

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1x1

$$\begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix}$$

a) El elemento inicial (e_i) se encuentra en la posición a_{11}.

b) El número ubicado en a_{11}, representa el total de ocasiones que va a intervenir su posición con los elementos de su adjunto, de acuerdo a su orden.

c) Cada elemento adjunto del e_i es multiplicado por el e_i, para formar una matriz (m-1) x (n-1), cada matriz se denominará con la letra A_1 con la finalidad de identificar las matrices que formen.

d) Los elementos correspondientes a la fila y columna del e_i (a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{31}, … a_{ij}) representan las ocasiones en que intervendrá su respectiva posición.

e) Los elementos correspondientes a la fila y columna del e_i serán multiplicados entre sí para formar otra matriz (m – 1) x (n – 1), la cual se denominará A_2.

f) De la matriz original, se forman 2 matrices de menor tamaño y se realizará la operación: $A_1 - A_2 = A_3$, y así sucesivamente dependiendo del tamaño de la matriz, cuyas matrices generadas son:

Orden	Matrices generadas
1x1	1
2x2	3
3x3	6
4x4	9
5x5	12
6x6	15
mxn	k

g) El formar una matriz representa la reducción de la matriz cuadrada original, por lo tanto, m x n – 1.

El método utilizado para resolver matrices cuadradas de tamaño 3x3 o superiores permite reducir el tamaño de la matriz, eliminando una fila y una columna, una vez que se hayan realizado las operaciones correspondientes. Sin embargo, para obtener el determinante se debe considerar la cantidad de ocasiones que un elemento interviene en la operación, por lo tanto, la matriz conformada de m filas = n columnas, considera la siguiente estructura:

Notación matemática orden 3x3

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & a_{23} \\ & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} \\ a_{11}a_{32} & a_{11}a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & & \\ a_{31} & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12}a_{21} & a_{13}a_{21} \\ a_{12}a_{31} & a_{13}a_{31} \end{vmatrix}$$

$$A_1 - A_2 = A_3 = \begin{vmatrix} a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} \\ a_{11}a_{32} & a_{11}a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{12}a_{21} & a_{13}a_{21} \\ a_{12}a_{31} & a_{13}a_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{vmatrix}$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & \\ & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{vmatrix}$$

$$A_5 = \begin{vmatrix} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & \end{vmatrix}$$

$$A_4 - A_5 = A_6 = \left| (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \right|$$

$$A = \frac{\left| (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \right|}{C}$$

PROCEDIMIENTO

Para tener un mejor entendimiento de lo mencionado anteriormente, se propone el siguiente ejemplo: el arreglo de m x n = 4 x 4, por lo tanto, la matriz es cuadrada.

Paso no. 1. Identificar el elemento que iniciará la operación, al cual denominaremos como elemento inicial (e_i), donde $e_i \neq 0$. Se recomienda iniciar en la posición a_{11} debido a que es la posición que representa mayor facilidad para desarrollar el sistema, aunque el e_i puede estar ubicado en cualquier posición de la matriz, si y solo si es diferente de 0.

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 3 & 9 \\ 6 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

A

Paso no. 2. Obtener el producto de e_i con el resto de los elementos que no corresponden a su fila y columna, para de esta manera formar una matriz de orden 3x3.

$$\begin{vmatrix} 5 & & & \\ & 3 & 1 & 4 \\ & 7 & 3 & 9 \\ & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} =(5*3) & =(5*1) & =(5*4) \\ =(5*7) & =(5*3) & =(5*9) \\ =(5*1) & =(5*4) & =(5*0) \end{vmatrix} = \underset{A_1}{\begin{vmatrix} 15 & 5 & 20 \\ 35 & 15 & 45 \\ 5 & 20 & 0 \end{vmatrix}}$$

Paso no 3. Obtener el producto de los elementos que conforman la fila con los elementos que conforman la columna correspondientes al e_i, también para formar una matriz de orden 3x3.

$$\begin{vmatrix} & 3 & 2 & 3 \\ 0 & & & \\ 3 & & & \\ 6 & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} =(3*0) & =(2*0) & =(3*0) \\ =(3*3) & =(2*3) & =(3*3) \\ =(3*6) & =(2*6) & =(3*6) \end{vmatrix} = \underset{A_2}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 9 \\ 18 & 12 & 18 \end{vmatrix}}$$

Paso no 4. Al obtener dos matrices de orden 3x3, se procede a realizar $A_1 – A_2 = A_3$.

$$\underset{A_1}{\begin{vmatrix} 15 & 5 & 20 \\ 35 & 15 & 45 \\ 5 & 20 & 0 \end{vmatrix}} - \underset{A_2}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 9 \\ 18 & 12 & 18 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} =(15\text{-}0) & =(5\text{-}0) & =(20\text{-}0) \\ =(35\text{-}9) & =(15\text{-}6) & =(45\text{-}9) \\ =(5\text{-}18) & =(20\text{-}12) & =(0\text{-}18) \end{vmatrix} = \underset{A_3}{\begin{vmatrix} 15 & 5 & 20 \\ 26 & 9 & 36 \\ -13 & 8 & -18 \end{vmatrix}}$$

Paso no 5. Al reducir de tamaño la matriz, el procedimiento se repite (pasos 1 a 4) hasta reducir la matriz a orden 1x1.

Procedimiento	Pasos
$A_3 = \begin{vmatrix} 15 & 5 & 20 \\ 26 & 9 & 36 \\ -13 & 8 & -18 \end{vmatrix}$	Paso no 1
$A_4 = \begin{vmatrix} 15 & & \\ & 9 & 36 \\ & 8 & -18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 135 & 540 \\ 120 & -270 \end{vmatrix}$	Paso no 2
$A_5 = \begin{vmatrix} & 5 & 20 \\ 26 & & \\ -13 & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 130 & 520 \\ -65 & -260 \end{vmatrix}$	Paso no 3
$A_4 - A_5 = A_6 = \begin{vmatrix} 135 & 540 \\ 120 & -270 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 130 & 520 \\ -65 & -260 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 185 & -10 \end{vmatrix}$	Paso no 4

Procedimiento	Pasos
$A_6 = \begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 185 & -10 \end{vmatrix}$	Paso no 1
$A_7 = \begin{vmatrix} 5 & \\ & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -50 \end{vmatrix}$	Paso no 2
$A_8 = \begin{vmatrix} & 20 \\ 185 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3700 \end{vmatrix}$	Paso no 3
$A_7 - A_8 = A_9 = \begin{vmatrix} -50 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3700 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3750 \end{vmatrix}$	Paso no 4

Paso no 6. Al obtener la matriz de orden 1 x 1, se procede a realizar la última parte del procedimiento para obtener el determinante, el cual, se debe seguir la siguiente regla:

a) m x n = x, si y solo si la matriz es cuadrada.

b) El valor obtenido en la matriz 1x1 será dividido entre C.

c) C = (x-2).

d) C representa la operacion a realizar, que corresponde al producto de cada e_i utilizado.

e) Si un e_i tomado en cuenta para desarrollar el sistema, no corresponde a la posición a_{11}, el resultado cambia de signo.

f) Un mayor entendimiento de la regla puede apreciarse en la tabla I, donde según el tamaño de la matriz será el valor de x y las respectivas operaciones de C para encontrar el determinante.

Paso no 7. Al revisar la regla, se identifica que la matriz del ejemplo de orden 4, C = $e_{i1}e_{i2}$ * e_{i1}, por lo tanto, se procede a realizar el final del ejercicio, donde la matriz 1 x 1:

Tabla I. Valores de x y las respectivas operaciones de C.

Tamaño	**x**	**C = x - 2**				
3x3	3	e_{i1}				
4x4	4	$e_{i1}e_{i2}$	e_{i1}			
5x5	5	$e_{i1}e_{i2}e_{i3}$	$e_{i1}e_{i2}$	e_{i1}		
6x6	6	$e_{i1}e_{i2}e_{i3}e_{i4}$	$e_{i1}e_{i2}e_{i3}$	$e_{i1}e_{i2}$	e_{i1}	
mxn	x-2	$e_{i1}e_{i2}e_{i3}e_{i4}...e_{ik}$	$e_{i1}e_{i2}e_{i3}...e_{ik}$	$e_{i1}e_{i2}...e_{ik}$	$e_{i1}e_{i2}...e_{ik}$	e_{i1}

Nota. El nombrar una matriz Asubíndice es para identificar la cantidad de matrices generadas con el método propuesto y definir la notación. La matriz 1 x 1 es la última matriz que se enumera para realizar las operaciones con la regla C y obtener el resultado.

$$A = \frac{-3750}{C} = \frac{-3750}{(e_{i1}e_{i2})\ (e_{i1})} = \frac{-3750}{(5*15)\ (5)} = \underline{-10}$$

CONCLUSIONES

El método utilizado es muy sencillo de desarrollar y es una alternativa para resolver problemas de matrices cuadradas, permite reducir la matriz cuadrada eliminando una fila y una columna al mismo tiempo. La diferencia con otros métodos utilizados en matrices de orden 3 o superiores es que no requiere convertir en ceros una sola columna, ni multiplicar por algún número para convertir en cero una posición.

El e_i puede estar ubicado en cualquier posición de la matriz cuadrada, sin embargo, de no utilizar la posición a_{11} en cada nueva matriz, se debe recurrir a una de las propiedades de los determinantes, cambio de signo, o bien recurrir a la permutación. Se han realizado pruebas con números enteros y racionales.

REFERENCIAS

1. Medel – Juarez, J. J. y García – Mendoza, C.V. (2016). Historia del determinante. Ciencia. 67 (1), 60 – 67.
2. Ufuoma, O. (2013). A New and Simple Method of Solving Large Linear Systems: Based on Cramer's Rule but Employing Dodgson's Condensation. In Proc. World Congr. Eng. Comput. Sci. (Vol. 1).
3. Rosales, A. (2008). Evolución histórica del concepto de matriz. Revista Digital Matemática, 9(1), 1-20.
4. Dodgson, C. L. (1866). Condensation of determinants, being a new and brief method for computing their arithmetical values. Proceedings of the Royal Society of London, (15), 150-155.