

La derivada conformable y sus aplicaciones en ingeniería

Jesús Gabino Puente-Córdova^A,
Flor Yanhira Rentería-Baltíerrez^B, Martín Edgar Reyes-Melo^A

^AFacultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,
Universidad Autónoma de Nuevo León

^BFacultad de Ciencias Químicas, Universidad Autónoma de Nuevo León
jesus.puentecr@uanl.edu.mx

RESUMEN

En este trabajo se describen algunas aplicaciones de la derivada conformable en la solución de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. Las derivadas de orden no entero son presentadas en función del tiempo para resolver el modelo de Maxwell, el circuito eléctrico RC en serie y la ley de enfriamiento de Newton. Los resultados obtenidos muestran la variación del parámetro α del operador fraccional conformable para modelar el comportamiento de los fenómenos propuestos. Se obtiene que los parámetros esfuerzo, corriente eléctrica y temperatura en función del tiempo, presentan un decaimiento más pronunciado a medida que α disminuye. La derivada conformable es una herramienta matemática que permite resolver ecuaciones diferenciales de orden fraccionario en una forma más simple.

PALABRAS CLAVE

Ecuación diferencial, cálculo fraccional, modelado, derivada conformable.

ABSTRACT

In this work some applications of the conformable derivative in the solution of fractional order differential equations are described. Derivatives of non-integer order are presented as a function of time to solve Maxwell's model, the series RC electric circuit and Newton's law of cooling. The results obtained show the variation of the alpha parameter of the conformable fractional operator to model the behavior of the proposed phenomena. It is obtained that the parameters stress, electric current and temperature as a function of time, show a more pronounced decay as α decreases. The conformable derivative is a mathematical tool that allows you to solve fractional order differential equations in a simpler way.

KEYWORDS

Differential equation, fractional calculus, modeling, conformable derivative.

INTRODUCCIÓN

El cálculo tradicional, basado en operadores diferenciales e integrales de orden entero, es una herramienta matemática que permite describir de manera cuantitativa a una gran variedad de fenómenos en las diversas áreas de la ciencia

e ingeniería.¹⁻³ Tradicionalmente, para la descripción de dichos fenómenos, generalmente se recurre al desarrollo de un modelo en forma de una ecuación diferencial de orden entero. La capacidad de estos modelos para describir o predecir resultados experimentales, es función de las variables que se toman en cuenta para dicho estudio, así como también de los operadores matemáticos utilizados. Debido a lo anterior, y al error inherente de las mediciones experimentales, las descripciones teóricas muestran ciertas desviaciones con respecto a los resultados experimentales. Se ha demostrado en muchos trabajos científicos que el orden entero de estos operadores diferenciales o integrales es un factor de peso para dichas desviaciones o discrepancias,¹⁻⁵ ya que se generan como resultado funciones cuya forma es restringida, siendo esto un impedimento para el ajuste de las curvas teóricas con las experimentales. Para minimizar este problema, en muchos trabajos teóricos y experimentales se han utilizado con éxito operadores diferenciales e integrales de orden fraccionario, inclusive de orden arbitrario, extendiéndose a los números complejos.⁶ A esta rama de las matemáticas se le conoce con el nombre de cálculo fraccionario o de una manera más correcta, método de integración y derivación de orden arbitrario.⁴⁻⁶

Es evidente que para la utilización de los operadores fraccionarios se requiere de una definición de estos. Actualmente existe una variedad de versiones matemáticas para definir las derivadas e integrales de orden fraccionario. Entre las más populares, se encuentran la de Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov, Caputo, Caputo-Fabrizio, Atangana-Baleanu,⁷⁻¹⁰ las cuales corresponden a operadores matemáticos no locales, debido a que son definidas utilizando integrales definidas. La utilización de alguna de estas definiciones permite la posibilidad de describir fenómenos o procesos mediante ecuaciones diferenciales temporales de orden fraccionario, en las que la solución analítica o numérica correspondiente se puede calcular, por un lado, utilizando la transformada de Laplace, si lo que se desea es obtener la solución en el dominio del tiempo, o, por otro lado, la transformada de Fourier, si se desea obtener la solución en el espacio de la frecuencia. El cálculo de la solución de una ecuación diferencial de orden fraccionario es un proceso que conlleva un alto grado de dificultad. Para la resolución en el dominio del tiempo, las funciones o soluciones obtenidas incorporan la función Mittag-Leffler, la cual es una generalización de la función exponencial, y se utiliza de manera recurrente para describir una gran cantidad de fenómenos físicos.^{6,11}

Sin embargo, desde un punto de vista práctico, las definiciones de derivadas e integrales fraccionarias carecen de un significado físico y geométrico preciso, como es el caso de las derivadas e integrales de orden entero. Aunado a lo anterior, es importante tomar en cuenta que las derivadas e integrales de orden fraccionario no cumplen con las reglas del cálculo tradicional, como lo son la regla de la cadena, la regla del producto, y la regla del cociente entre otras.^{6, 8} En este sentido, en el 2014 Khalil y colaboradores¹² propusieron un nuevo concepto de derivada, denominada “derivada fraccionaria conformable”. Esta derivada conformable tiene la característica de que cumple con las propiedades de las derivadas de orden entero y, además tiene la propiedad de ser un operador matemático local. Por lo anterior, la derivada conformable ha traído consigo un aumento considerable en el estudio de sus propiedades, así como también para aplicaciones en ciencia e ingeniería.¹³⁻¹⁵

Tomando en cuenta lo anterior, en este trabajo de investigación se llevó a cabo una aplicación del concepto de la derivada conformable para tres casos de ingeniería que corresponden a distintas manifestaciones de fenómenos de relajación o disipación de energía por parte de un sistema. El primero de ellos corresponde a la manifestación mecánica del fenómeno de relajación, el cual se describe mediante el modelo reológico análogo de Maxwell. El segundo versa sobre la manifestación eléctrica del fenómeno de relajación, el cual se describe mediante un circuito eléctrico equivalente RC en serie. Finalmente, se analiza la manifestación térmica del fenómeno de relajación, utilizando para tal efecto la ley de enfriamiento de Newton.

En este artículo, se describe en primer término el concepto de derivada conformable. En segundo término, se describe como se utilizó el concepto de derivada conformable, para modificar las ecuaciones diferenciales de orden entero de los tres sistemas bajo estudio. Posterior a esto se presentan y discuten las curvas teóricas calculadas para las tres manifestaciones de los fenómenos de relajación, el esfuerzo $\sigma(t)$ para la manifestación mecánica; la corriente eléctrica $I(t)$ para la manifestación eléctrica; y la temperatura $\Theta(t)$ para la manifestación térmica.

LA DERIVADA CONFORMABLE

El concepto de derivada conformable fue propuesto en el 2014 por Khalil y colaboradores,¹² quienes originalmente la identificaron con el nombre de derivada fraccionaria conformable. Para su definición, consideremos la función $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, entonces, la derivada conformable de orden α, T_α , se define de la siguiente manera, para todo $x > 0$, y $0 < \alpha \leq 1$.

$$T_\alpha f(x) = \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = D_x^\alpha f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hx^{1-\alpha}) - f(x)}{h} \quad (1)$$

En la ecuación 1, se establece que T_α también se puede expresar de las dos maneras siguientes: $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}$ o bien D_x^α . El operador T_α puede considerarse como una generalización de la definición que establece el cálculo tradicional para la derivada de primer orden de una función $f(x)$, dado que si $\alpha=1$, la ecuación 1 se transforma en la ecuación 2, que corresponde a la definición de derivada de primer orden, $\frac{df}{dx} = f'(x)$, lo anterior se resume de la siguiente manera: $T_1 f(x) = f'(x)$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad (2)$$

Con el propósito de definir la derivada conformable de una manera precisa, lo cual es fundamental para aplicaciones de ingeniería, se describen a continuación las propiedades más importantes de esta derivada, tomando en consideración el siguiente teorema.^{12, 14}

Teorema. Siendo $\alpha \in (0, 1]$ y que las funciones f, g sean α -diferenciables, para cualquier punto del intervalo $x > 0$, se establecen las siguientes seis propiedades.

1. $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $T_\alpha(x^\nu) = \nu x^{\nu-\alpha}$, para todo $\nu \in \mathbb{R}$.
3. $T_\alpha(\lambda) = 0$, para toda función constante $f(x) = \lambda$.
4. $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$.
5. $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$.
6. $T_\alpha f(x) = x^{n+1-\alpha} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} f(x)$, $\alpha \in (n, n + 1]$. Si $f(x)$ es $(n + 1)$ -diferenciable en $x > 0$.

La definición de derivada conformable permite un aspecto fundamental con respecto a su aplicación en las ciencias e ingenierías. Este aspecto, se refiere a la posibilidad de establecer ecuaciones diferenciales temporales de orden fraccionario para describir cierto fenómeno o proceso, y como consecuencia de lo anterior, la utilización de la definición de derivada conformable permite el cálculo de la solución de dichas ecuaciones diferenciales de una manera tal que se evita el cálculo (que en la mayoría de los casos es muy complejo) de las integrales definidas que caracterizan a las definiciones de derivada fraccionaria establecidas por Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov, Caputo, entre otros.

APLICACIONES EN LA INGENIERÍA

Las ecuaciones diferenciales constituyen la herramienta matemática tradicional para describir fenómenos o procesos en las ciencias e ingeniería. Existe mucha evidencia en la literatura que demuestra que, en las ecuaciones diferenciales construidas a base de derivadas de orden no entero, los fenómenos o procesos correspondientes se describen de una manera más precisa que cuando se utilizan ecuaciones diferenciales de orden entero.^{1,2,5} Sin embargo, encontrar la solución de estas ecuaciones diferenciales de orden fraccionario no es una tarea sencilla, y la utilización de la definición de derivada conformable es una alternativa interesante que se analiza en este trabajo de investigación. A continuación, se presentan los tres casos de estudio que fueron seleccionados para este análisis. Primeramente, se aborda el modelo reológico análogo de Maxwell, posteriormente se aborda el caso del circuito eléctrico equivalente RC en serie y finalmente el de la ley de enfriamiento de Newton.

Modelo reológico análogo de Maxwell

Una gran cantidad de materiales utilizados en ingeniería presentan un comportamiento denominado viscoelástico, cuya principal característica es que su comportamiento mecánico es función del tiempo. Entre estos materiales, se encuentran los polímeros, plásticos, hules y algunas aleaciones metálicas. Dicho comportamiento puede representarse y/o describirse como una primera aproximación mediante una combinación lineal de propiedades elásticas y viscosas. Entonces, el modelado del comportamiento viscoelástico puede llevarse a cabo a través de la construcción de arreglos mecánicos análogos que consisten en resortes y amortiguadores. Los modelos de Maxwell (figura 1), Voigt-Kelvin y Zener representan como primera aproximación dicho comportamiento, y en particular, a los ensayos mecánicos de relajación de esfuerzos y de fluencia “creep”.^{16,17}

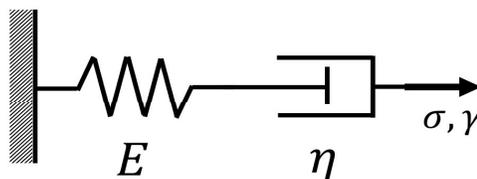


Fig. 1. Representación mecánica del modelo de Maxwell.

El modelo de Maxwell, mostrado en la figura 1, consiste en el arreglo mecánico de un resorte de módulo elástico E cuya respuesta mecánica corresponde a la ley de Hooke ($\sigma(t) = ED_t^0\gamma = E\gamma$) en serie con un amortiguador de viscosidad η cuya respuesta mecánica corresponde a la ley de Newton de los líquidos viscosos puros ($\sigma(t) = \eta D_t^1\gamma$). El resorte representa la componente elástica del material, mientras el amortiguador representa la componente viscosa. La ecuación diferencial de orden entero que caracteriza a dicho arreglo es la siguiente:

$$\eta D_t^1\gamma = \tau_m D_t^1\sigma + D_t^0\sigma \tag{3}$$

Donde $\tau_m = \frac{\eta}{E}$ es el tiempo de relajación característico del modelo. Para el análisis de la manifestación mecánica del fenómeno de relajación o disipación de energía que manifiesta el modelo de Maxwell, es necesario resolver la ecuación 3 bajo condiciones a la frontera que definen a un ensayo de relajación de esfuerzos. Para dichas condiciones, el arreglo de Maxwell se somete a cierto nivel de deformación abrupta que permanece constante durante el tiempo que dure el ensayo mecánico, $\gamma(t)=\gamma_0$, y tomando en cuenta también que la deformación abrupta estará asociada al esfuerzo casi instantáneo del resorte del modelo, por lo que se puede establecer que para el $t=0$, $\sigma(t=0)=\sigma_0$. Tomando en cuenta estas condiciones a la frontera, la solución que satisface la ecuación diferencial 3 es la ecuación 4, que es un indicador de cómo se disipa la energía en el modelo de Maxwell.

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau_m}} \tag{4}$$

Sin embargo, la forma de las curvas teóricas $\sigma(t)$ calculadas a partir de la ecuación 4, no son más que una primera aproximación de curvas experimentales obtenidas para una gran variedad de materiales viscoelásticos, y para mitigar esta discrepancia, una alternativa es abordar este estudio mediante una ecuación diferencial de orden fraccionario. En la literatura, una práctica común es sustituir las derivadas de orden entero en las ecuaciones diferenciales, por operadores de orden fraccionario.^{13, 18, 19} Aunque matemáticamente dicha estrategia es correcta, desde el punto de vista dimensional no lo es. Un análisis dimensional de un operador diferencial de orden entero y otro fraccionario demuestra que las unidades son diferentes, ver ecuación 5.

$$\frac{d^1}{dt^1} \propto \frac{1}{\tau} \quad , \quad \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \propto \frac{1}{\tau^\alpha} \quad \forall \alpha \in (0, 1] \tag{5}$$

En la ecuación 5 τ tiene unidades de tiempo, por lo tanto, se puede establecer la siguiente ecuación.

$$\frac{\frac{d^1}{dt^1}}{\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}} = \frac{\frac{1}{\tau}}{\frac{1}{\tau^\alpha}} = \frac{\tau^\alpha}{\tau} = \tau^{\alpha-1} \tag{6}$$

Tomando en cuenta la ecuación 6, se establece una expresión matemática (ecuación 7) que puede ser utilizada para remplazar una derivada de primer orden por una derivada de orden fraccionario α , pero manteniéndose la consistencia de sus unidades:

$$D_t^1 = \tau_m^{\alpha-1} D_t^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1 \tag{7}$$

Donde τ_m está relacionado con el tiempo de relajación del modelo de Maxwell, algunos autores establecen que este parámetro representa componentes de tiempo

fraccionario en el sistema.^{18, 19} Sustituyendo el operador de la ecuación 7 en la ecuación 3, se obtiene la siguiente ecuación diferencial fraccionaria:

$$\eta \tau_m^{\alpha-1} D_t^\alpha \gamma = \tau_m^\alpha D_t^\alpha \sigma + D_t^0 \sigma, \quad 0 < \alpha \leq 1 \tag{8}$$

Entonces, tomando en cuenta la propiedad 6 del teorema de la derivada conformable, para $n = 0$ y $\alpha \in (0, 1]$, $D_t^\alpha f = t^{1-\alpha} D_t^1 f$, la ecuación 8 se transforma en una ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$\eta \tau_m^{\alpha-1} t^{1-\alpha} D_t^1 \gamma = \tau_m^\alpha t^{1-\alpha} D_t^1 \sigma + D_t^0 \sigma, \quad 0 < \alpha \leq 1 \tag{9}$$

La solución analítica de la ecuación diferencial 9 bajo condiciones a la frontera definidas por un ensayo de relajación de esfuerzos: $\gamma(t) = \gamma_0$ y $\sigma(t=0) = \sigma_0$, es la expresión matemática de la ecuación 10:

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-\frac{1}{\alpha} \left(\frac{t}{\tau_m}\right)^\alpha} \tag{10}$$

La ecuación 10 (solución de la ecuación 9) es función del tiempo y del significado físico respectivo de σ_0 , τ_m , y del exponente $0 < \alpha \leq 1$. El significado físico de α , tomando en cuenta que representa el orden de una derivada fraccionaria, está relacionado con la tasa de disipación de energía que manifiesta un sistema viscoelástico.⁵ Puesto que todos los elementos de la ecuación 10 tienen un significado físico definido, este resultado puede ser considerado como un modelo físico. Algo que resulta interesante de la ecuación 10, es su comparación con la función empírica KWW (Kohlrausch-Williams-Watts), también conocida como “función exponencial estirada”, y que fue propuesta en 1854 por Kohlrausch y formalmente abordada en 1970 por Williams y Watts. Esta expresión matemática $\phi(t)$ (ecuación 11) se ha utilizado ampliamente para ajustarla a resultados experimentales que representan fenómenos de relajación en sistemas poliméricos complejos,^{20, 21} sin embargo, presenta la desventaja de que el parámetro β carece de significado físico.

$$\phi(t) = A e^{-\left(\frac{t}{\tau_s}\right)^\beta}, \quad 0 < \beta \leq 1 \tag{11}$$

Donde τ_s es el tiempo característico del sistema bajo estudio, A es un parámetro pre-exponencial, y $0 < \beta \leq 1$ se identifica como exponente “estirado”.

En la figura 2 se presenta un gráfico con las curvas teóricas calculadas a partir de la ecuación 10. Se observa que al variar el valor de α la forma de la curva cambia. A medida que disminuye el valor de α , la curva tiende a decaer de una manera más pronunciada. Cuando $\alpha=1$, se obtiene la solución clásica del modelo de Maxwell, en donde no se han tomado en cuenta derivadas de orden fraccionario. Este comportamiento puede justificarse por el hecho de que cuando α aumenta, la viscosidad representada por el amortiguador se impone con mayor intensidad en la respuesta global del modelo, lo que se traduce en una menor tasa de disipación de energía cuando α aumenta, dicho en otras palabras, el fenómeno de relajación es más lento.

Por otra parte, si se requiere llevar a cabo el ajuste de la ecuación 10 a un conjunto de datos experimentales (σ, t) , una manera de realizarlo es linealizar la ecuación para obtener la forma $y = Ax + B$, donde $y = \ln \ln \left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)$, $x = \ln t$, $A = \alpha$ y $B = \ln \left(\frac{\tau_m^{-\alpha}}{\alpha}\right)$. Los parámetros α y τ_m se pueden calcular aplicando una regresión lineal (mínimos cuadrados), a los datos expresados en la forma $y=Ax+B$.

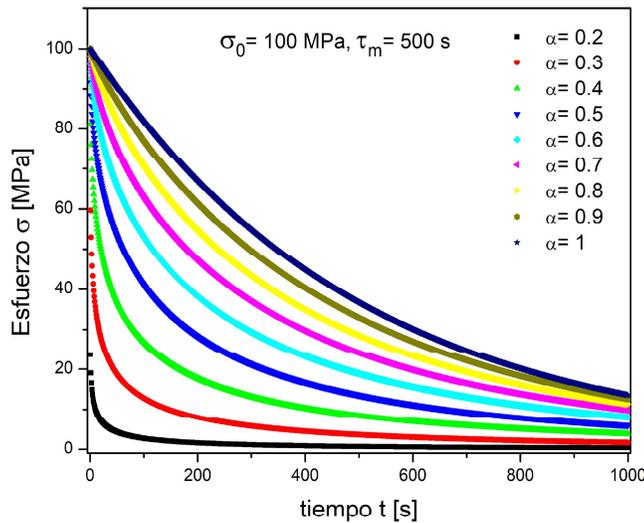


Fig. 2. Variación de la ecuación 10 en función del parámetro α .

Circuito eléctrico equivalente RC en serie

En el campo de las propiedades eléctricas y dieléctricas de los materiales que se utilizan como aislantes eléctricos y/o dieléctricos, el circuito eléctrico equivalente RC en serie, se utiliza como primera aproximación para abordar el estudio de la manifestación eléctrica de fenómenos de relajación.^{22, 23} En este sentido, el resistor R ($V(t) = RD_t^0 I = RD_t^1 Q$) representa la disipación de energía y, por otra parte, el capacitor C ($V(t) = \frac{1}{C} D_t^0 Q$) representa la componente de almacenamiento de energía, en forma de carga eléctrica Q .

En la figura 3 se presenta el circuito RC en serie. La ecuación diferencial que describe la respuesta eléctrica del arreglo de la figura 3 se describe en la ecuación 12, la cual fue deducida tomando en cuenta las leyes de Kirchoff y la corriente se define como $I(t) = D_t^1 Q$:

$$CD_t^1 V = \tau_e D_t^1 I + D_t^0 I \tag{12}$$

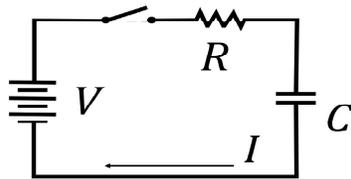


Fig. 3. Representación esquemática de un circuito eléctrico equivalente RC en serie.

Donde $\tau_e = RC$ es el tiempo respuesta del circuito, R es la resistencia eléctrica, y C es la capacitancia. La manifestación eléctrica de fenómenos de relajación corresponde a la solución de la ecuación diferencial 12 tomando en consideración condiciones a la frontera, donde el voltaje del circuito permanece constante $V(t) = V_0$, y tomando en cuenta también que la corriente eléctrica en el circuito en el tiempo $t=0$ es $I(t=0) = I_0$. La solución analítica calculada de esta ecuación 12 con las condiciones a la frontera anteriormente definidas, es la siguiente:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau_e}} \tag{13}$$

La ecuación 13 describe como una primera aproximación la manifestación eléctrica de fenómenos de relajación. Para mejorar esta descripción, la ecuación diferencial 12 fue modificada utilizando la expresión matemática de la ecuación 7, de una manera análoga a cómo se llevó a cabo el análisis para el caso de la manifestación mecánica. Tomando en cuenta lo anterior la ecuación 12 se transformó en una ecuación diferencial fraccionaria:

$$C\tau_e^{\alpha-1}D_t^\alpha V = \tau_e^\alpha D_t^\alpha I + D_t^0 I, \quad 0 < \alpha \leq 1 \tag{14}$$

Entonces, tomando en cuenta la propiedad 6 del teorema de la derivada conformable, para $n = 0$ y $\alpha \in (0, 1]$, $D_t^\alpha f = t^{1-\alpha} D_t^1 f$, la ecuación 14 se reescribe como:

$$C\tau_e^{\alpha-1}t^{1-\alpha}D_t^1 V = \tau_e^\alpha t^{1-\alpha}D_t^1 I + D_t^0 I, \quad 0 < \alpha \leq 1 \tag{15}$$

Esta ecuación es más fácil de resolver, ya que no es una ecuación diferencial de orden fraccionario. La solución analítica de la ecuación 15 bajo condiciones a la frontera de $V(t)=V_0$, y tomando en cuenta también que la corriente eléctrica en el circuito en el tiempo $t=0$ es $I(t=0)=I_0$ es la ecuación 16, esta ecuación describe la manifestación eléctrica de los fenómenos de relajación.

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{t}{\tau_e})^\alpha} \tag{16}$$

La ecuación 16 tiene la misma forma de la función empírica KWW donde el parámetro β es análogo al orden fraccionario α de la ecuación 15, que como se estableció anteriormente α se relaciona con la rapidez del fenómeno de relajación. Cuando $\alpha=1$, se retoma el caso clásico de la solución del circuito RC, ecuación 13. En la figura 4 se presentan las curvas calculadas a partir de la ecuación 16 para diferentes valores de α . Se observa que a medida que decrece el valor de α , la corriente eléctrica decae más lentamente, por lo que la corriente en estado estable se alcanza en una menor cantidad de tiempo.

Los parámetros α y τ_e se pueden obtener de manera práctica si se realiza el ajuste de la ecuación 16 a un conjunto de datos experimentales (I, t) . Para ello, se linealiza la ecuación para obtener la forma

$$y = Ax + B, \text{ donde } y = \ln \ln \left(\frac{I_0}{I} \right), x = \ln t, A = \alpha \text{ y } B = \ln \left(\frac{\tau_e^{-\alpha}}{\alpha} \right).$$

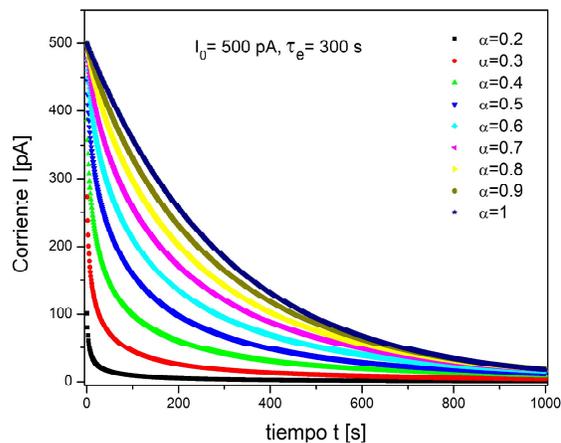


Fig. 4. Variación de la ecuación 16 en función del parámetro α .

Ley de enfriamiento de Newton

En lo que respecta a la manifestación térmica de fenómenos de relajación, las diferencias de temperatura en cualquier situación cotidiana resultan en el flujo de energía hacia un sistema u objeto o desde un sistema al entorno. El primer caso conduce a un proceso de calentamiento, mientras que el segundo produce el enfriamiento de un objeto. Se suele considerar que el enfriamiento de los objetos se debe a tres mecanismos fundamentales: conducción, convección y radiación. Aunque estos mecanismos de transferencia de calor son diferentes entre sí, a menudo se encuentra una ley muy simple para su acción combinada que describe fenomenológicamente las curvas de enfriamiento de los objetos calientes, si las diferencias de temperatura son pequeñas. Esta ley, conocida como la ley de enfriamiento de Newton, se expresó originalmente de una manera que establece que la diferencia de temperatura entre un objeto y su entorno disminuye exponencialmente, si no hay calentamiento adicional involucrado.^{24, 25} Matemáticamente lo anterior se expresa a través de la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$D_t^1 \Theta = -k(D_t^0 \Theta - \Theta_m) \quad (17)$$

Donde Θ es la temperatura en cualquier instante de tiempo t , Θ_m es la temperatura del medio ambiente y k es una constante llamada coeficiente de convección. La solución analítica de la ecuación diferencial 17 es la siguiente, tomando la condición inicial $\Theta(t=0) = \Theta_0$:

$$\Theta(t) = \Theta_m + (\Theta_0 - \Theta_m)e^{-kt} \quad (18)$$

Existe abundante evidencia en la literatura que demuestra que la ecuación 18 discrepa del comportamiento real en procesos de enfriamiento para una diversidad de materiales. Con la finalidad de aminorar estas diferencias entre resultados experimentales y lo que describe la ley de Newton de enfriamiento, se modificó la ecuación 17 transformándola en una ecuación diferencial fraccionaria, para tal efecto se tomó en cuenta que k tiene unidades inversas del tiempo, por lo que se puede establecer la siguiente expresión matemática:

$$D_t^1 = k^{1-\alpha} D_t^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (19)$$

Entonces, sustituyendo esta expresión en la ecuación 17, se obtiene la ecuación diferencial fraccional de orden α :

$$D_t^\alpha \Theta = -k^\alpha (D_t^0 \Theta - \Theta_m), \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (20)$$

Tomando en cuenta la propiedad 6 del teorema de la derivada conformable, $D_t^\alpha f = t^{1-\alpha} D_t^1 f$, la ecuación 20 se reescribe como:

$$D_t^1 \Theta = -k^\alpha t^{\alpha-1} (D_t^0 \Theta - \Theta_m), \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (21)$$

La solución de la ecuación anterior se obtiene de una manera más sencilla, en comparación con la solución analítica de la ecuación diferencial de orden fraccionario. Para ello, se utiliza el método de separación de variables, obteniendo la siguiente función:

$$\Theta(t) = \Theta_m + (\Theta_0 - \Theta_m) e^{-\frac{1}{\alpha}(kt)^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (22)$$

Se observa en esta ecuación, que la función exponencial también toma forma de la función empírica KWW. En la ecuación 22 cuando $\alpha=1$, se retoma el caso clásico de la ley de enfriamiento de Newton, ecuación 18.

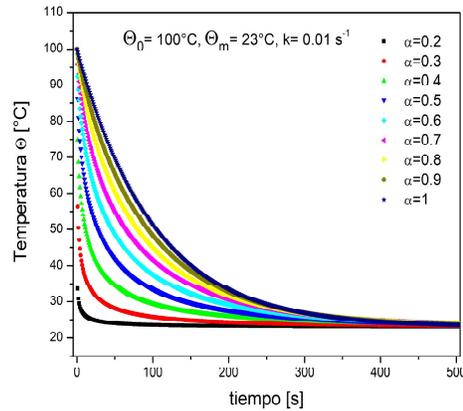


Fig. 5. Variación de la ecuación 22 en función del parámetro α .

En la figura 5 se presenta el modelado de la ecuación 22 para diferentes valores de α . Se observa que a medida que decrece el valor de α , la temperatura del cuerpo o sistema decae más rápido, por lo que la temperatura final se alcanza en una menor cantidad de tiempo.

Para llevar a cabo el ajuste de la ecuación 22 a un conjunto de datos experimentales (Θ, t) , se linealiza dicha ecuación para obtener la forma

$$y = Ax + B, \text{ donde } y = \ln \ln \left(\frac{\Theta_0 - \Theta_a}{\Theta - \Theta_a} \right), x = \ln t, A = \alpha \text{ y } B = \ln \left(\frac{k^\alpha}{\alpha} \right).$$

En la actualidad, se han reportado una variedad de aplicaciones de la derivada conformable a diversos problemas de física e ingeniería, como lo es el caso de caída libre de cuerpos, modelado de circuitos eléctricos RL y RLC, estudios de difusión, modelos de crecimiento de la población mundial, modelado de concentración de alcohol en la sangre, entre otros.^{13, 15, 19, 26-28} Sin embargo, las aplicaciones prácticas aún son un área intensa de investigación, por lo que en futuros trabajos se buscará llevar a cabo la correlación entre los modelos matemáticos propuestos y resultados experimentales de fenómenos de relajación en materiales poliméricos.

CONCLUSIONES

En este trabajo se presentaron las ecuaciones diferenciales de primer orden para el modelo de Maxwell, el circuito eléctrico RC en serie y la ley de enfriamiento de Newton. Dichas ecuaciones describen el esfuerzo, la corriente y la temperatura en función del tiempo, respectivamente. A través del concepto de la derivada conformable se obtuvieron versiones de ecuaciones diferenciales fraccionarias para cada caso de estudio, y fue posible calcular soluciones analíticas en el dominio del tiempo, para dichas ecuaciones diferenciales de orden fraccionario planteadas para cada modelo. La variación del orden fraccional conformable $0 < \alpha \leq 1$ mostró un descenso más pronunciado en la respuesta a medida que α disminuye, donde la respuesta se aproxima a soluciones del tipo KWW. El parámetro fraccionario α tiene un distinto significado físico para los tres fenómenos de relajación, aunque se trate del mismo material bajo estudio. El procedimiento mostrado en este trabajo es una alternativa importante para el cálculo de las soluciones analíticas de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario.

REFERENCIAS

1. Hilfer, R. Applications of Fractional Calculus in Physics. Universität Mainz & Universität Stuttgart, Germany, 2000.
2. Baleanu, D. New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications. Springer, 2010.
3. Das, S. Kindergarten of Fractional Calculus. Cambridge Scholars Publishing, 2020.
4. Sánchez-Muñoz, J. M. Génesis y desarrollo del cálculo fraccional. Pensamiento Matemático, 1, 2011, 15 pp.
5. Reyes-Melo, M.E., González-González, V.A., Guerrero-Salazar, C.A., García-Cavazos, F., Ortiz-Méndez, U. Application of fractional calculus to the modeling of the complex rheological behavior of polymers: From the glass transition to flow behavior. I. The theoretical model. Journal of Applied Polymer Science, 108, 2008, 731-737.
6. Buesaquillo-Gómez V.G., Pérez-Riascos A., Rugeles-Pérez A. Cálculo fraccional. Revista de Ciencias, 4 (1), 2014, 16 pp.
7. Capelas-de Oliveira, E., Tenreiro-Machado, J.A. A review of definitions for fractional derivatives and integral. Mathematical Problems in Engineering, 2014, 6 pp.
8. Sales-Teodoro, G., Tenreiro-Machado J.A., Capelas-de Oliveira, E. A review of definitions of fractional derivatives and other operators. Journal of Computational Physics, 388, 2019, 195-208.
9. Caputo, M., Fabrizio, M. A new definition of fractional derivative without singular kernel. Progress in Fractional Differentiation and Applications, 1 (2), 2015, pp. 1-13.
10. Atangana A., Baleanu D. New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and application to heat transfer model. arXiv:1602.03408, 2016.
11. Shukla, A.K., Prajapati, J.C. On a generalization of Mittag-Leffler function and its properties. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 336, 2007, 797-811.
12. Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., Sababheh, M. A new definition of fractional derivative. Journal of Computational and Applied Mathematics, 264, 2014, 65-70.
13. Martínez, L., Rosales, J.J., Carreño, C.A., Lozano, J.M. Electrical circuits described by fractional conformable derivative. International Journal of Circuit Theory and Applications, 2018, 1-10.
14. Abdeljawad, T. On conformable fractional calculus. Journal of Computational and Applied Mathematics, 279, 2015, 57-66.
15. Chung, W.S. Fractional Newton mechanics with conformable fractional derivative. Journal of Computational and Applied Mathematics, 290, 2015, 150-158.
16. Xua, H., Jiang, X. Creep constitutive models for viscoelastic materials based on fractional derivatives. Computers and Mathematics with Applications, 73, 2017, 1377-1384.

17. Hristov, J. Response functions in linear viscoelastic constitutive equations and related fractional operators. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 14, 2019, 34 pp.
18. Gómez-Aguilar, J.F., Razo-Hernández, R., Granados-Lieberman, D. A physical interpretation of fractional calculus in observable terms: analysis of the fractional time constant and the transitory response. *Revista Mexicana de Física*, 60, 2014, 32-38.
19. Rosales-García, J., Andrade-Lucio, J.A., Shulika, O. Conformable derivative applied to experimental Newton's law of cooling. *Revista Mexicana de Física*, 66 (2), 2020, 224-227.
20. Alvarez, F., Alegria, A., Colmenero, J. Relationship between the time-domain Kohlrausch-Williams-Watts and frequency-domain Havriliak-Negami relaxation functions. *Physical Review B*, 44, 7306, 1991.
21. Lukichev, A. Physical meaning of the stretched exponential Kohlrausch function. *Physics Letters A*, 383 (24), 2019, 2983-2987.
22. Das-Gupta, D.K. Polyethylene: Structure, morphology, molecular motion and dielectric property behavior. *IEEE Electrical Insulation Magazine*, 10 (3), 1994, 5-15.
23. Frank, A. Dielectric characterization. TA Instruments USA, APN032, 2012, 10 pp.
24. Ortega, A., Rosales, J.J. Newton's law of cooling with fractional conformable derivative. *Revista Mexicana de Física*, 64, 2018, 172-175.
25. Mondol, A., Gupta, R., Das, S., Dutta, T. An insight into Newton's cooling law using fractional calculus. *Journal of Applied Physics*, 123, 06490, 2018, 9 pp.
26. Ebaid, A., Masaedeh, B., El-Zahar, E. A New fractional model for the falling body problem. *Chinese Physics Letters*, 34 (2), 2017, 3 pp.
27. Abdelhakim, A.A., Tenreiro-Machado, J.A. A critical analysis of the conformable derivative. *Nonlinear Dynamics*, 95, 2019, 3063-3073.
28. Anderson, D.R., Camrud, E., Ulness, D.J. On the nature of the conformable derivative and its applications to physics. *Journal of Fractional Calculus and Applications*, 10 (2), 2019, 92-135.