Análisis estrés-resistencia Weibull con parámetro de forma ß diferente mediante el uso de Weibull++ y la relación cerrada Weibull-Gumbel

Manuel Baro-Tijerina
Instituto Tecnológico Superior de Nuevo Casas Grandes,
Cd. Nuevo Casas Grandes, Chih.
al164467@alumnos.uacj.mx

RESUMEN

La confiabilidad de un producto cuando este se somete a un estrés variante se calcula mediante la probabilidad de que la resistencia (S) inherente, sea mayor al estrés (s). Dado que el estrés es una variable y el producto es una variable aleatoria también, entonces, el análisis de su confiabilidad se realiza con la metodología estrés-resistencia. Lamentablemente, cuando el estrés y la resistencia siguen una distribución Weibull, los parámetros de forma β del estrés y resistencia serán diferentes debido al medio ambiente y dado que la distribución Weibull no tiene propiedad aditiva, no existe solución cerrada en este caso. Este manuscrito presenta un método de análisis estrés-resistencia Weibull para $\beta_1 \neq \beta_2$, *basado en la relación Weibull/Gumbell.*

PALABRAS CLAVE

Distribución Weibull, distribución normal, distribución Gumbel, análisis estrés-resistencia.

ABSTRACT

The reliability of a product when this is subject to a variant stress is given by the probability that the design resistance (S) of the product is greater than the stress (s) to which the product will be subjected, is say $R(t)=P(S>s)$. *Since, the time is random and the stress also is random then, the reliability analysis tool is the stress-strength methodology. Unfortunately, when the stress and the strength follow a Weibull distribution, the shape parameters β will be different, this because the environment almost is different and given that the Weibull distribution has no additive property for* $\beta_S \neq \beta_s$ *there will be no closed solution for this case. Thus, in this manuscript, based on the Weibull / Gumbel relationship, a method is presented to perform the stress-resistance analysis when the stress variable and the resistance variable have a Weibull distribution with a different parameter* $\beta_1 \neq \beta_2$.

KEYWORDS

Weibull distribution, normal distribution, Gumbel distribution, stress-resistance analysis.

INTRODUCCIÓN

En la determinación de la confiabilidad $R(t)$ de un producto, elemento o sistema, que está sometido a estrés variante, el producto presenta una resistencia inherente para soportar dichos valores del estrés, de esta forma la confiabilidad estará dada por la probabilidad de que la resistencia de diseño del producto sea mayor a la resistencia del estrés al cual se somete este producto, entonces se tiene $R(t)=P(S>s)$.[1] De esta manera, la confiabilidad $R(t)$ está dada por la variable aleatoria del estrés y la variable aleatoria de la resistencia, de forma que la herramienta correcta para determinar la confiabilidad del producto es el análisis estrés-resistencia.[2] Cabe mencionar que en el análisis estrés-resistencia si el comportamiento de la variable tanto del estrés como de la resistencia siguen una distribución Weibull con parámetros de forma diferentes, es decir, $\beta_1 \neq \beta_2$ el análisis estrés-resistencia no está definido, esto se atribuye a que el análisis estrés-resistencia es un convolución entres dos variables aleatorias, esto es, la suma algebraica de la variable de la resistencia y la variable del estrés, entonces, dado que la convolución de dos variables aleatorias independientes Weibull $W\sim(\beta_1,\eta_1)$ y $W\sim(\beta_2,\eta_2)$ no está definida cuando $(\beta_1 \neq \beta_2)$, de forma que el análisis estrés-resistencia Weibull-Weibull tampoco está definido, esto es, no existe solución cerrada.

Por otra parte, aunque las piezas o unidades sean fabricadas bajo los mismos parámetros, es decir, de forma idéntica, las unidades fabricadas presentarán variación en su resistencia (S), esto es, la resistencia de las unidades o productos; suponiendo $(S_1,S_2,\ldots,S_n)$ es una variable aleatoria continua, y por tanto su comportamiento debe representarse mediante una distribución de probabilidad (Pdf).[3] Además la segunda variable de análisis es la variación del estrés, esto debido a que las condiciones de uso siempre serán diferentes y aunado a esto existen factores de ruido que implican un nivel de estrés variante, de esta forma, el estrés de igual forma debe representarse mediante una distribución de probabilidad.[4] Ya que ambas variables del estrés y de la resistencia son independientes y se modelan mediante una distribución de probabilidad el análisis en la determinación de la confiabilidad $R(t)$ se realiza mediante el análisis estrés-resistencia, esto es, determinar la probabilidad $(P(S>s))$, es decir, $R(t)=(P(S>s))$.[5]

Como el análisis estrés-resistencia representa la probabilidad de que el rango del estrés al que se somete el producto no exceda la resistencia del mismo, entonces, el análisis estrés-resistencia es la suma algebraica de la distribución de la resistencia y de la distribución del estrés,[6] sin embargo, cuando la variable del estrés y la variable de la resistencia se distribuyen mediante una distribución Weibull con parámetros de forma β diferentes el análisis estrés-resistencia no es posible ya que la distribución Weibull no posee la propiedad de cerradura, esto es, la suma de variables Weibull para $(\beta_1 \neq \beta_2)$ no está definido.[7] A continuación, se demuestra la propiedad de cerradura: Para un conjunto de variables independientes Weibull $X:i \sim W(\eta_i,\beta)$,i=1,….,n,, digamos $X_1,\ldots X_n$, entonces la probabilidad conjunta es

$$P(\min(X_1,\ldots,X_n) > t)P(X_1 > t,\ldots,x_n t)\ \prod_{i=1}^{n} P(X_i > t) = \prod_{i=1}^{n} \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta_i}\right)^{\beta_i}\right] =$$

$$\exp\left[-t^{\beta_i}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\eta_i^{\beta}}\right] = \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta_*}\right)^{\beta_i}\right. \text{ con } \eta\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\eta_i^{\beta}}\right)^{-1/\beta_i} \qquad (1)$$

Como puede observarse en la Ec. (1), la suma de variables Weibull sólo es posible cuando las funciones poseen el mismo parámetro de forma β. En el caso cuando las variables del estrés y de la resistencia siguen una distribución Weibull es común hacer el análisis usando el método normal, pero debido a que no existe relación entre los parámetros de la distribución normal, es decir, N~(σ,μ) con los de la distribución Weibull W~(β,η) la aplicación del método no es eficiente en la estimación de la confiabilidad R(t), de forma que en este articulo se propone un método para la estimación de la confiabilidad R(t) mediante el análisis estrés-resistencia Weibull-Weibull con el uso de la relación de parámetros Weibull y los parámetros log-normales.

Generalidades del análisis estrés-resistencia

En ocasiones la confiabilidad de los productos depende de la resistencia inherente del mismo, de modo que si el nivel de estrés al que el producto es sometido es mayor se presentará la falla del producto. Por tanto, si la variable aleatoria x representa el estrés y la variable aleatoria y la resistencia, en ese caso la confiabilidad del análisis estrés-resistencia está dada por la probabilidad de y>x, es decir, R(t)=P(y<x). En el análisis estrés-resistencia el término estrés se refiere a la carga que produce la falla y la resistencia refiere a la habilidad del componente o producto para soportar dicha carga. Debido a que ambos, el estrés y la resistencia son variables aleatorias su comportamiento debe ser modelado por una distribución de probabilidad. De esta manera cuando las dos distribuciones se interpolan se produce una dispersión natural y cuando la variable del estrés se hace más grande que la variable de la resistencia se produce la falla. En otra forma, cuando la función de densidad de probabilidad de ambos, el estrés y la resistencia son conocidos, la confiabilidad del componente puede ser determinada de forma analítica por medio de la intersección de las funciones de densidad (figura 1). De esta forma siendo (x,y) variables aleatorias continuas que siguen una función de densidad conjunta (Pdf) f(x,y). Entonces la confiabilidad del componente sujeto al estrés variante basado en f(x,y) está dado como:

$$R = P(X < Y) = \iint_{-\infty}^{x} f(y,x)dx\,dy \tag{2}$$

Donde P(x<y) es la probabilidad de que la resistencia exceda al estrés que se somete el componente y f(x,y) es la función de densidad de probabilidad conjunta de la variable de la resistencia (y) y la variable del estrés (x).[8]

La siguiente ecuación es usada en el análisis estrés-resistencia para el cálculo de la probabilidad de falla.

$$F = P[s \geq S] = \int_0^{\infty} f_S(x) * R_s(x)dx \tag{3}$$

Y probabilidad de éxito en la confiabilidad esperada, R(t) esta dada por:

$$R(t) = P[s \leq S] = \int_0^{\infty} f_s(x) * R_S(x)dx \tag{4}$$

Como puede observarse en la Ec.(4) el análisis estrés-resistencia está en el dominio positivo.[9]

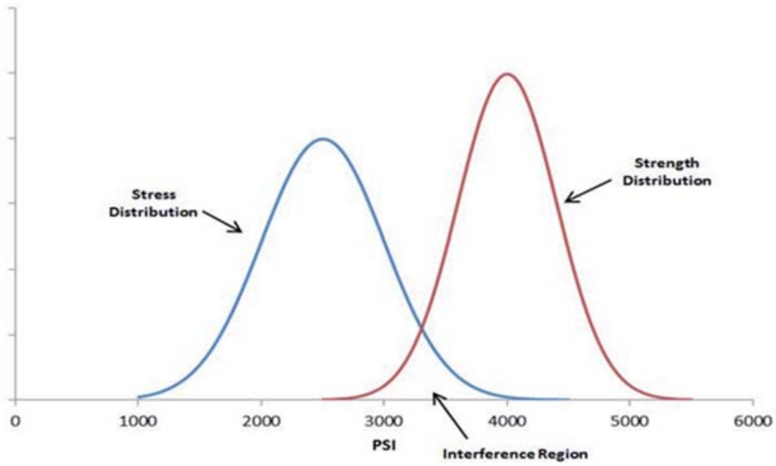

Fig. 1. Representación del estrés y la resistencia.

Generalidades de la distribución Weibull

La distribución Weibull es ampliamente utilizada en la ingeniería de confiabilidad y en el análisis de vida de productos, componentes, sistemas, etc. Debido a su versatilidad [10] ya que dependiendo del valor de los parámetros, la distribución Weibull puede ser utilizada para modelar una gran variedad de comportamientos de vida. [4] Otro aspecto importante de la distribución Weibull es como el valor del parámetro de forma β y el parámetro de escala η, afecta las características de la distribución. El parámetro de forma de la distribución Weibull β, es también llamado parámetro de pendiente, esto ya que el valor de β es igual a la línea de la pendiente en el grafico de probabilidad. Diferentes valores del parámetro de forma β tienen grandes efectos en el comportamiento de la distribución Weibull, de hecho de acuerdo a los valores del parámetro de forma la distribución Weibull puede reducirse a otra distribución. Como ejemplo, para $\beta=1$ la función de densidad de probabilidad de una distribución Weibull se reduce a una exponencial de doble parámetro. Cabe mencionar que β es solo un número, es decir, no tiene dimensión. En la figura 2 se muestran diferentes comportamientos de la distribución Weibull de acuerdo al parámetro de forma β.

Por otro lado, un cambio en el parámetro de escala de la distribución Weibull η hace un cambio en la escala abscisa. Un incremento en η manteniendo a β constante hace que la función de densidad de probabilidad sea más alargada.[11]

La función de densidad de probabilidad Weibull esta dada por:

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} \tag{5}$$

La función acumulada está dada por:

$$F(t) = 1 - e\{-(t/\eta)^{\beta}\} \tag{6}$$

Y la función de confiabilidad Weibull es:

$$R(t) = e\,\{-(t/\eta)^{\beta}\} \tag{7}$$

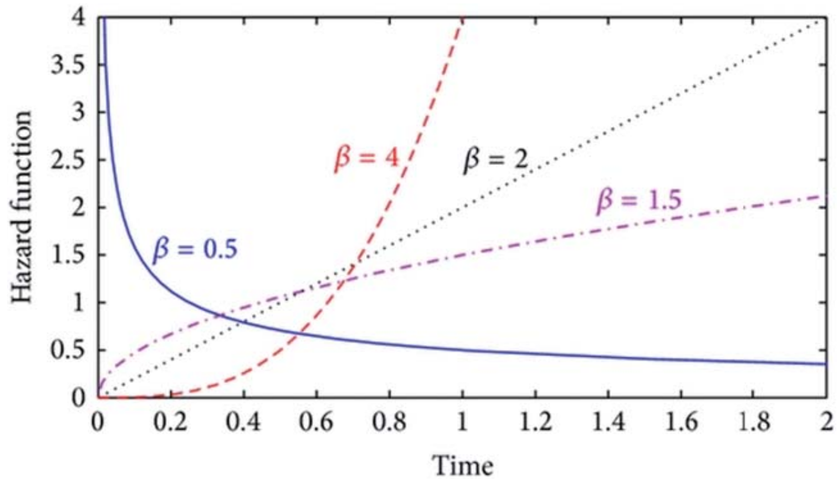

Fig. 2. Efectos de Beta con valores diferentes.

Propiedad de cerradura de la distribución Weibull

Para un sistema con n componentes en serie o que posean diferentes modos de falla, donde cada modo de falla sigue una distribución Weibull con parámetro de forma β y de escala η entonces la función de tasa de falla conjunta se puede determinar como:

$$P(\min(X_1, \ldots, X_n) > x) = P(X_1 > t, \ldots, x_n t) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > t) = \prod_{i=1}^{n} \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta_i}\right)^{\beta}\right] = \exp\left[-t^{\beta} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\eta_i^{\beta}}\right] = \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta*}\right)^{\beta} \quad with \quad \eta *= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\eta_i^{\beta}}\right)^{-1/\beta} \tag{8}$$

Como se muestra en la Ec.(8), conocida como propiedad de cerradura de la distribución Weibull, se puede observar que la suma de variables aleatorias Weibull está definida si y solo si el parámetro de forma β permanece constante, es decir, es igual en cada variable aleatoria. Entonces si el modo de falla de variables aleatorias tienen comportamiento Weibull, pero presentan diferente parámetro de forma β, el resultado de la distribución de las variables no tendrá un comportamiento Weibull.[12]

Modelo general estrés-resistencia Weibull

El uso de la distribución Weibull en ingeniería de confiabilidad y control de calidad ha sido empleado por Kao [13], la distribución Weibull suele ser adecuada cuando no se cumple la condición de aleatoriedad estricta. Por otro lado, considerando el problema de encontrar o determinar la resistencia en cuanto a confiabilidad de algún elemento o producto de su funcionalidad hasta que ocurra a primera falla. de esta forma si X sigue una distribución Weibull y *Y* se ajusta a una distribución Weibull ambas con W~(β,η) con la función de densidad de probabilidad como:

$$f(x) = \beta\eta t^{\beta-1} e^{\eta t^{\beta}} \tag{9}$$

El análisis estrés-resistencia Weibull puede realizarse cuando el parámetro de forma β sea igual en la distribución del estrés y en la distribución de la resistencia, es decir, $\beta_1=\beta_2$, aunque existen algunos casos propuestos en el análisis estrés-resistencia tales como: $2\beta_1=\beta_2$ o $\beta_1=2\beta_2$. Cuando se tienen parámetros de forma iguales se puede observar que el modelo estrés-resistencia Weibull-Weibull es el mismo modelo que el exponencial-exponencial, siempre y cuando se mantenga constante β_1 y β_2.[14] El problema de encontrar la confiabilidad de la resistencia de un elemento que funciona hasta el primer fracaso, cuando tanto la resistencia (Y) y el estrés (X) siguen la distribución de Weibull se define como:

$$P(X > Y) = \int_1^\infty \int_0^\infty y(g)yf(vy)dydv \tag{10}$$

Por lo cual

$$R = P(Y > X)$$

$$R(t) = \int_0^\infty f(x)\left[\int_t^\infty f(y)dy\right]dx \tag{11}$$

Entonces

$$R(t) = \frac{\eta_y^\beta}{\eta_y^\beta+\eta_x^\beta} \tag{12}$$

Caso práctico de análisis estrés-resistencia Weibull usando Weibull ++

Se considera como *Y*, la resistencia del casco de un motor de un cohete aeroespacial de la NASA, y *X*, como la presión a la que se somete el motor, es decir, es el estrés que el motor deberá resistir. La confiabilidad R(*t*) del casco de motor entonces dependerá del rango de la presión a la cual opere el motor. En la tabla I se muestra el resultado de la experimentación con n=16 cascos de motor. [15]

Tabla I. Datos de la experimentación del motor de cohete.

Estrés (Psi)	Resistencia (Psi)
5.88	15.30
5.98	17.10
6.70	16.30
5.94	16.05
5.98	16.75
6.00	16.60
6.06	7.10
6.07	17.50
5.82	16.10
6.04	16.00
5.76	16.75
5.84	17.50
5.95	16.50
5.69	16.40
5.93	16.00
5.93	16.20

PROPUESTA DE ESTIMACIÓN DE LA CONFIABILIDAD

Relación de los parámetros de las distribuciones Weibull-Gumbel

A continuación se demuestra la relación de los parámetros de la distribución Weibull y la distribución Gumbel, con el objetivo de determinar la relación cerrada entre estas distribuciones, y cómo es posible estimar los valores de la media y la desviación estándar Gumbel (μ_{ev} y σ_{ev}), a partir de la familia Weibull. Para ello, se hace uso del teorema dado en [16].

Teorema: si una variable aleatoria t sigue una distribución Weibull (t~W(η,β), entonces su logaritmo x=ln(t) sigue una distribución Gumbel [x~G(μ_{ev},σ_{ev})].

Demostración: Sea F(ln(t))=Pr(ln(t)≤ln(T)) la función acumulada de x=ln(t), donde (T) es el tiempo de falla. Dado que en términos de x,F(ln(t))=Pr[ln(t)≤ln(x]; F(x)=Pr[t≤exp(x)], entonces sustituyendo:

$\mathrm{t} = \exp(\mathrm{x})$, en $\mathrm{F(t)} = 1 - \exp\left(-\frac{\mathrm{t}}{\eta}\right)^{\beta}$; F(x) es:

$$\mathrm{F}(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\exp(\mathrm{x})}{\eta}\right)^{\beta}\right] \tag{13}$$

Y la función de densidad es dada por:

$$\mathrm{f}(t) = -\frac{\mathrm{dR(t)}}{\mathrm{d(t)}} = -[-\exp^{-\exp^{W}}\exp^{W} = \exp^{W-\exp^{W}} \tag{14}$$

De tal forma que la Ec.(14) en términos de sustitución de W:

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{\sigma_{\mathrm{ev}}}\exp^{\left(\frac{\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{ev}}}{\sigma_{\mathrm{ev}}}\right)-\exp^{\left(\frac{\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{ev}}}{\sigma_{\mathrm{ev}}}\right)}} \tag{15}$$

La Ec.(15) es conocida como la distribución Gumbel (mínimo valor extremo tipo I).

La relación de los parámetros de la distribución Weibull y la distribución Gumbel se da por

$$\mu_{\mathrm{ev}} = \ln(\eta) \tag{16}$$

$$\sigma_{\mathrm{ev}} = \frac{1}{\beta} \tag{17}$$

De esa forma, utilizando el método de momentos NIST/SEMATECH [17] los parámetros de Weibull-Gumbel están dados por:

$$\mu_{\mathrm{ev}} = \mathrm{E(x)} = \mu_{\gamma} + \gamma\sigma_{\mathrm{ev}} \tag{18}$$

$$\sigma_{\mathrm{ev}} = \frac{\sqrt{6}}{\pi}\sigma_{\gamma} \tag{19}$$

Finalmente, una estimación de μ_{γ} y σ_{γ}, representada por $\hat{\mu}_{\gamma}$ y $\hat{\sigma}_{\gamma}$ están dados por:

$$\hat{\mu}_{\gamma} = \mu_{\mathrm{ev}} - \gamma\sigma_{\mathrm{ev}} \tag{20}$$

$$\hat{\sigma}_{\gamma} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\sigma_{\mathrm{ev}} \tag{21}$$

En la Ec.(20) γ es la constante de Euler (γ=0.577216). [16]. Mediante la relación de parámetros Weibull-Gumbel basado en las Ec.(12,13,16 y 17), para la estimación de β, por solución numérica, como se muestra en la tabla II. Como se puede ver en la tabla III los resultados obtenidos usando el software Weibull++

y el método Weibull-Gumbel son iguales, de modo que se puede concluir que usando esta relación de parámetros se puede calcular de manera eficiente la confiabilidad en el análisis estrés-resistencia cuando el parámetro de forma sea diferente, es decir, ($\beta_1 \neq \beta_2$).

Tabla II. Confiabilidad del método estándar.

Método estándar				
B_S	η_s	B_s	η_S	$R(t)$
1	9.8842	1.5	16.7664	67.99
2	9.8842	2.5	16.7664	78.03
3	9.8842	3.5	16.7664	85.79
4.5	9.8842	4.9	16.7664	92.79
5	9.8842	6	16.7664	95.62

Tabla III. Confiabilidad del método propuesto.

Método propuesto				
B_c	η_s	B_c	η_S	$R(t)$
1.42554158	9.8842	1.42554158	16.7664	67.99
2.39841233	9.8842	2.39841233	16.7664	78.03
3.40238945	9.8842	3.40238945	16.7664	85.79
4.83474569	9.8842	4.83474569	16.7664	92.79
5.8347911	9.8842	5.8347911	16.7664	95.62

CONCLUSIÓN

Como puede verse en el resultado del análisis de estrés-resistencia Weibull con parámetro de forma diferente ($\beta_1 \neq \beta_2$), el método propuesto, comparado con la salida del software Weibull++ resulta eficiente lo cual puede ser de gran ayuda en la toma de decisiones cuando se tiene un producto o elemento que está sujeto a estrés variante y que por ende la resistencia disminuye, es decir, existe daño acumulado hasta que se presenta la primera falla.

Además, se demuestra que utilizando las ecuaciones con el valor de β_c se representa de manera efectiva el valor de β del estrés y el valor de β de la resistencia para la estimación de la confiabilidad $R(t)$ en el análisis estrés-resistencia cuando las variables de ambos el estrés y la resistencia presenta diferentes valores de β.

Por otra parte, como la distribución Weibull no posee la propiedad de cerradura, en el análisis estrés-resistencia solo existe forma cerrada cuando se tiene $\beta_1=\beta_2$;$2\beta_1=\beta_2$ o $\beta_1=2\beta_2$, entonces, el uso de este método resulta eficiente para los practicantes de la ingeniería de confiabilidad.

REFERENCIAS

1. Piña-Monarrez, M. R. (2017). Weibull stress distribution for static mechanical stress and its stress/strength analysis. Quality and Reliability Engineering International, 34 (May), 229–244. https://doi.org/10.1002/qre.2251.
2. Bickel, P., Diggle, P., Fienberg, S., Gather, U., Olkin, I., Zeger, S., … Demography, S. (2010). Traci J. Hess. (Springer, Ed.). New York. https://doi.org/10.1007/978-0-387-98135-2.
3. Levitin, G., & Finkelstein, M. (2017). A new stress–strength model for systems subject to stochastic shocks. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability, 1748006X1668954. https://doi.org/10.1177/1748006X16689543.
4. Piña-Monarrez, M. R., Ramos-López, M. L., Alvarado-Iniesta, A., & Molina-Arredondo, R. D. (2016). Robust sample size for Weibull demonstration test plan. DYNA Colombia, 83(197).
5. Piña-Monarrez, M. R. (2018). Weibull Analysis for Constant and Variant Stress Behavior Using the Alt Method for Single Stress and the Taguchi Method for Several Stress Variables, (July). https://doi.org/10.19080/BBOAJ.2018.06.555681.
6. Rinne, H. (2009). Distribution The Weibull Distribution A Handbook. (T. & F. Group, Ed.). Giessen, Germany. https://doi.org/10.1201/9781420087444.
7. Lai, C.-D. (2014). Generalized Weibull Distributions. https://doi.org/10.1007/978-3-642-39106.
8. Quanterion Solutions Incorporated. (2014). Interference Stress/Strength Analysis. Retrieved from https://www.quanterion.com/interference-stressstrength-analysis/.
9. Bhuyan, P., Unit, A. S., Dewanji, A., & Unit, A. S. (2014). Dynamic Stress-Strength Modeling with Cumulative Stress and Strength Degradation Dynamic Stress-Strength Modeling with Cumulative Stress and Strength Degradation.
10 McCool, J. I. (2012). Using the Weibull Distribution: Reliability, Modeling and Inference. https://doi.org/10.1002/9781118351994.
11. Pham, H. (2003). Handbook of reliability engineering. https://doi.org/10.1002/9780470172414.
12. Ebeling, C. E. (2010). An introduction to reliability and maintainability engineering. (W. Press, Ed.) (2nd ed.). Boston. Retrieved from http://books.google.com.my/books/about/An_introduction_to_reliability_and_maint.html?id=23BRAAAAMAAJ&pgis=1.
13. Kao, J. H. K. (1959). "A Graphical Estimation of Mixed Weibull Parameters in Life- Testing of Electron Tubes", Technometrics 1, pp 389-407.
14. Nadarajah, S., Cordeiro, G. M., & Ortega, E. M. M. (2013). The exponentiated Weibull distribution: A survey. Statistical Papers, 54(3), 839–877. https://doi.org/10.1007/s00362-012-0466-x.
15. NASA. (1963). Confidence Limits for Stress-Strength Models With Explanatory Variables. NASA Reports (Vol. 30).

16. Piña-Monarrez, M. R., Ortiz-Yañez, J. F., & Rodríguez-Borbón, M. I. (2016). Non-normal capability indices for the Weibull and lognormal distributions. Quality and Reliability Engineering International, 32(4), 1321–1329. https://doi.org/10.1002/qre.1832.
17. NIST/SEMATECH. (2012). e-Handbook of Statistical Methods. Retrieved January 1, 2015, from http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda366g.htm.