

# Diferentes familias de atractores extraños en un sistema caótico memristivo de 4D

Ernesto Zambrano-Serrano<sup>A</sup>, Cornelio Posadas-Castillo<sup>A</sup>,  
Roberto R. Rivera-Durón<sup>B</sup>

<sup>A</sup>Universidad Autónoma de Nuevo León.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

erneszambrano@gmail.com; cornelio.posadascs@uanl.edu.mx

<sup>B</sup>Laboratory of Nonlinear Electronics of the Unnamed Systems Research

Institute Northwestern Polytechnical University, Xi'an, Shannxi Province, China

## RESUMEN

Considerado como el cuarto elemento pasivo en la teoría de circuitos, un memristor puede ser utilizado para diseñar sistemas caóticos e incrementar su complejidad. En este artículo se presenta la generación de atractores autoexcitados, coexistentes y ocultos. Las diferentes familias de atractores se generan al agregar la función no lineal de un memristor controlado por flujo a un sistema caótico. La riqueza de la dinámica caótica en el sistema es investigada a través de diagramas de bifurcación, exponentes de Lyapunov, planos de fase y dimensión Kaplan-Yorke. Estos métodos muestran que en un rango de parámetros, el sistema caótico propuesto presenta atractores caóticos coexistentes. Finalmente, el sistema caótico es diseñado con circuitos electrónicos analógicos. Los resultados obtenidos de la simulación del circuito electrónico están en concordancia con los resultados de los análisis teóricos y numéricos.

## PALABRAS CLAVE

Atractores ocultos; atractores coexistentes; diseño analógico; sistema memristivo

## ABSTRACT

*Considered as the fourth passive element in circuit theory, a memristor can be used to design chaotic systems, even can increase the complexity of the system. In this article, we present the generation of self-excited, coexisting and hidden attractors. The different families of attractors are generated by adding the nonlinear function of a flow-controlled memristor to a chaotic system. The richness of the chaotic dynamics in the system is investigated through bifurcation diagrams, Lyapunov exponents, phase planes and Kaplan-Yorke dimension. These methods shown that in a range of parameters, the chaotic system has coexisting chaotic attractors. Finally, the proposed chaotic system is designed with analog electronic circuits. The results obtained from the simulation of the electronic circuit are in accordance with the results of the theoretical and numerical analyzes.*

## KEYWORDS

Hidden attractors; coexisting attractors; analog design; memristive system

## INTRODUCCIÓN

Alrededor de 150 años, los elementos pasivos fueron el capacitor, descubierto en 1745; la resistencia, en 1827; y el inductor en 1831. No fue sino hasta 1971 que el padre de los circuitos no lineales, Leon O. Chua, publicó un artículo llamado “Memristor – The missing circuit element”.<sup>1</sup> En este artículo, se establece el concepto matemático de un cuarto dispositivo fundamental. Memristor es una contracción de resistencia con memoria. La resistencia de un memristor depende de la magnitud, dirección y duración de voltaje aplicado a través de sus terminales. Una vez que se deja de suministrar voltaje, el memristor recuerda su resistencia más reciente hasta la próxima vez que se enciende la fuente de voltaje. Además, Chua definió dos tipos de memristor; uno controlado por carga y otro por flujo, esto en función de su relación resistencia-memoria. Un memristor tiene varias propiedades interesantes tales como: (i) un ciclo de histéresis fijado en el origen; (ii) si la frecuencia de la señal periódica de entrada aumenta, el ciclo de histéresis se vuelve más pequeño y se contrae; (iii) si la frecuencia tiende a infinito, entonces el ciclo de histéresis tiende a ser una línea recta; (iv) el memristor tiene una resistencia negativa.<sup>2</sup> Fue hasta 2008, cuando HP labs anunció que habían desarrollado el elemento faltante y publicaron sus hallazgos en Nature.<sup>3</sup> A partir de ese momento ha existido una gran expectativa del uso de las propiedades del memristor, específicamente las no lineales, en una amplia gama de aplicaciones, tales como: diseño de memorias flash, mejores redes neuronales y construcción de sistemas caóticos.

Los sistemas caóticos tienen tres características principales, las cuales son: la sensibilidad a las condiciones iniciales, un comportamiento aperiódico a largo término, y definición por medio de un sistema dinámico determinista. Los más representativos son: el sistema de Lorenz (descubierto en 1963), el sistema de Chen, el sistema de Rössler, sistema de Lü, entre otros.<sup>4</sup> Recientemente los investigadores han propuesto sistemas caóticos con características interesantes, por ejemplo, sistemas con múltiples enrollamientos, sistemas con múltiples alas, sistemas caóticos de orden fraccionario y sistemas con estabilidad múltiple; los cuales brindan algunas ventajas, tales como proporcionar flexibilidad en el rendimiento del sistema, sin la necesidad de ajustar parámetros. Algunos casos especiales de estabilidad múltiple son estabilidad extrema y megaestabilidad. Los sistemas con estabilidad extrema tienen un número infinito de atractores coexistentes, mientras que los sistemas con megaestabilidad tienen un número infinito contable de atractores coexistentes.<sup>5</sup>

En el artículo de Kuznetsov y Leonov,<sup>5</sup> los autores proporcionan las bases para clasificar a los atractores en dos familias, atractores autoexcitados y atractores ocultos. Un atractor autoexcitado implica que se puede observar al menos un equilibrio inestable en su cuenca de atracción. Mientras que el atractor oculto no está excitado por el punto de equilibrio inestable, y su cuenca de atracción no se interseca con ningún punto de equilibrio inestable. Los sistemas caóticos como el de Lorenz, Chen, Rossler, Lü, etc., pertenecen a la familia de sistemas caóticos autoexcitados, debido a que tienen un número contable de puntos de equilibrio, por lo tanto, la existencia de caos es verificada por medio del criterio de Shilnikov. Mientras que la familia de sistemas (atractores) ocultos están agrupados en: (i) sin puntos de equilibrio, (ii) puntos de equilibrio estables, y (iii)

infinito número de puntos de equilibrio. Se ha demostrado que la presencia de atractores ocultos siempre está relacionada con multiestabilidad. Los atractores ocultos son importantes, no sólo en la comunidad académica, sino en aplicaciones de ingeniería, debido a que su presencia permite el estudio y la comprensión de respuestas inesperadas y potencialmente desastrosas de los sistemas a las perturbaciones. Por ejemplo, un puente, alas de un avión, control de sistemas de aviones o circuitos de seguimiento de fase.<sup>6</sup>

La investigación anterior motivo el modelo matemático del memristor controlado por flujo, es empleado en un sistema dinámico que invierte el campo geomagnético de la tierra, para diseñar un sistema caótico de 4-Dimensiones (4D). El sistema propuesto es capaz de generar tres tipos de familias de atractores, (i) atractores ocultos, (ii) atractores autoexcitados, y (iii) atractores coexistentes autoexcitados. El sistema propuesto presenta características dinámicas complejas, que incluyen atractores extraños diferentes. La presencia del caos es validada por medio de diagramas de bifurcación, exponentes de Lyapunov y planos de fase. Finalmente, un circuito electrónico analógico es diseñado con la finalidad de obtener simulaciones y comparar nuestro desarrollo teórico. El resto del artículo está organizado de la siguiente manera, en la Sección 2, se introduce el modelo del memristor. En la Sección 3 se presentan los diferentes tipos de atractores. El diseño en electrónica analógica del sistema es presentado en la Sección 4. Finalmente se presentan conclusiones.

### MODELO DE UN MEMRISTOR

Chua comparó las cuatro principales variables de un circuito (voltaje, corriente, flujo magnético y carga) y su relación entre ellas con la teoría de la materia de Aristóteles. De acuerdo con la teoría de Aristóteles toda la materia está compuesta de los siguientes cuatro elementos: tierra, agua, aire y fuego como se muestra en la figura 1(a).

Cada uno de estos elementos representa la relación entre dos de las cuatro propiedades fundamentales: sequedad, calor, humedad y frío.<sup>7</sup> Chua observó una interesante relación entre elementos y las variables de los circuitos. voltaje  $v$ , corriente  $i$ , flujo magnético  $\phi$  y carga  $q$  como se muestra en la figura 1(b).

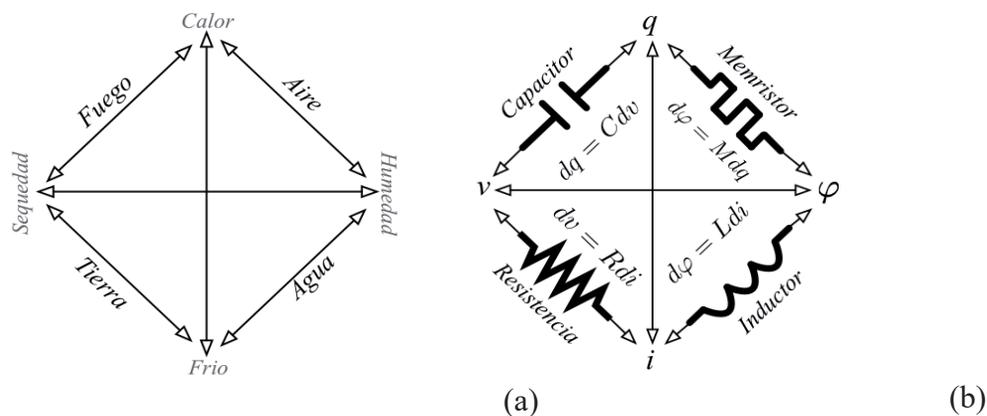


Fig. 1. (a) Teoría de la materia de Aristóteles. (b) Relación entre las cuatro variables fundamentales de un circuito.

El capacitor es la relación entre voltaje y carga  $dq=Cdv$ , una resistencia es la relación entre voltaje y corriente  $dv=Rdi$ , un inductor es la relación entre flujo y corriente  $d\varphi=Ld$ , mientras que el memristor es controlado por carga o por flujo.

La expresión matemática para describir al memristor se define de la siguiente manera <sup>8</sup>:

$$\begin{aligned} y &= g(x, u, t)u, \\ \dot{x} &= f(x, u, t), \end{aligned} \tag{1}$$

donde  $x$  es una variable de estado,  $u$  es la entrada y la salida del sistema es definida por  $y$ ,  $f$  es una función continua  $n$ -dimensional y  $g$  es una función continua. El memristor se divide en dos tipos: el controlado por carga y controlado por flujo. El voltaje a través de un memristor controlado por carga está dado por:

$$\begin{aligned} v(t) &= M(q(t))i(t), \\ M(q) &= d\varphi(q)/dq. \end{aligned} \tag{2}$$

Similarmente, la corriente de un memristor controlado por flujo se define como:

$$\begin{aligned} i(t) &= W(\varphi(t))v(t), \\ W(\varphi) &= dq(\varphi)/d\varphi, \end{aligned} \tag{3}$$

donde  $M(q)$  indica la memresistencia y tiene unidades de resistencia y  $W(\varphi)$  indica la memductancia y tiene unidades de conductancia.

En este artículo, se considera el modelo del memristor controlado por flujo, el cual es descrito como <sup>2</sup>:

$$W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d(\varphi)} = \alpha + \gamma\varphi^2, \tag{4}$$

Donde  $\alpha$  y  $\gamma$  son constantes reales. De acuerdo con Chua  $\gamma$  indica la polaridad del memristor, si el parámetro  $\gamma > 0$  el memristor es pasivo, si  $\gamma < 0$  es llamado activo. Si se aplica una señal periódica a través del memristor con la finalidad de analizar sus propiedades, entonces el estímulo es definido de la siguiente manera:

$$v(t) = A \sin(2\pi\omega t), \tag{5}$$

donde  $A$  es la amplitud y  $\omega$  es la frecuencia. Entonces sustituyendo (4) y (5) en (3) obtenemos la salida del memristor

$$i(t) = (\alpha + \gamma\varphi^2) A \sin(2\pi\omega t), \tag{6}$$

de la ecuación (6), se observa que la salida  $i(t)$  depende de la frecuencia del estímulo aplicado a la entrada. Para valores de  $\alpha=0.3$ ,  $\gamma=\pm 0.5$ ,  $A=1$ , y  $\omega=0.1$  la relación entre el comportamiento pasivo y activo del lazo de histéresis es el mostrado en figura 2(a).

Figura 2(b), muestra el lazo de histéresis del memristor cuando diferentes valores de frecuencia son aplicados. El lazo de histéresis centrado en el origen en el plano  $v(t)$ - $i(t)$  indica una huella característica del dispositivo memristor.

## SISTEMA CAÓTICO DE 4 DIMENSIONES BASADO EN UN MEMRISTOR

Introducimos el modelo del memristor analizado en la sección anterior a un sistema dinámico el cual invierte el campo geomagnético de la tierra.<sup>9</sup> Como consecuencia obtenemos un sistema dinámico no lineal de cuatro dimensiones.

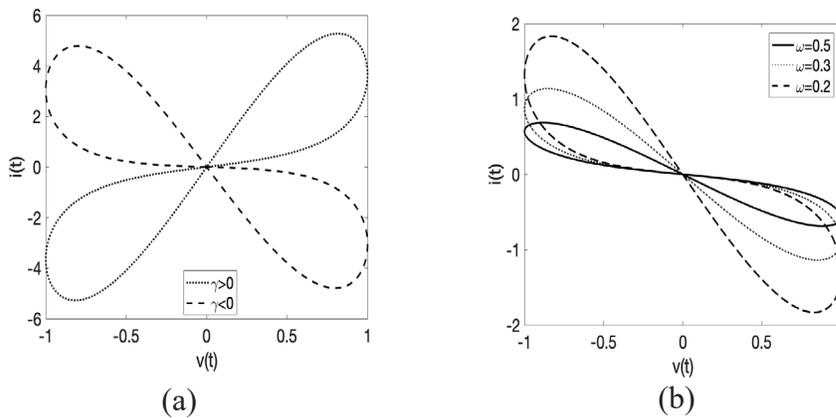


Fig. 2. Lazo de histéresis fijado en el origen. (a) Relación de  $v(t)-i(t)$  activo (línea con guiones) pasivo (línea punteada). (b) Curva de histéresis con diferentes valores de frecuencias.

El modelo matemático del sistema caótico basado en el memristor es descrito de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= ax - yz, \\
 \dot{y} &= -by + xz, \\
 \dot{z} &= -z + xy - W(w), \\
 \dot{w} &= kz,
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

donde  $x,y,z,w$  son variables de estado, y  $a,b,k$  son parámetros reales. La función  $W(w)$  representa al modelo matemático del memristor controlado por flujo, dicho modelo es expresado de la siguiente forma:  $W(w)=\alpha+\gamma w^2$ . Los puntos de equilibrios del sistema (7) se obtienen igualando el lado izquierdo del sistema a cero como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 0 &= ax - yz, \\
 0 &= -by + xz, \\
 0 &= -z + xy - W(w), \\
 0 &= kz.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se observa que existen dos puntos de equilibrio, los cuales están ubicados en  $E_{1,2}(0,0,0,\sqrt{-\alpha/\gamma})$ . Aquí analizamos que la relación  $\alpha/\gamma$  actúa como un parámetro de control, es decir esta condición nos permite obtener un sistema caótico con puntos de equilibrio cuando  $\alpha/\gamma < 0$  y un sistema sin puntos de equilibrio cuando  $\alpha/\gamma > 0$ . Como consecuencia, es posible generar una familia de atractores ocultos de acuerdo a la siguiente definición:

**Definición 1.** Un atractor es llamado autoexcitado si su base de atracción se interseca con cualquier vecindad abierta de un punto fijo inestable. De otra manera se dice que el atractor es oculto.

Con el objetivo de encontrar una solución numérica, fijamos los parámetros del sistema como se muestra en la tabla I, establecemos las condiciones iniciales  $(1, 0.1, 0.1, 0)$  y utilizamos el algoritmo numérico Runge-Kutta de cuarto orden con un paso de integración  $h=0.01$ . En la figura 3 se presenta el atractor oculto generado y proyectado en los diferentes planos  $x-y-z$ ,  $x-y$ ,  $y-z$  y  $x-w$ , respectivamente.

Tabla I. Parámetros del sistema para generar diferentes tipos de atractores.

Parámetros	$a$	$b$	$k$	$\alpha$	$\gamma$	Tipo de atractor
Valores	0.12	0.1	-0.1	-0.15	-0.3	Oculto

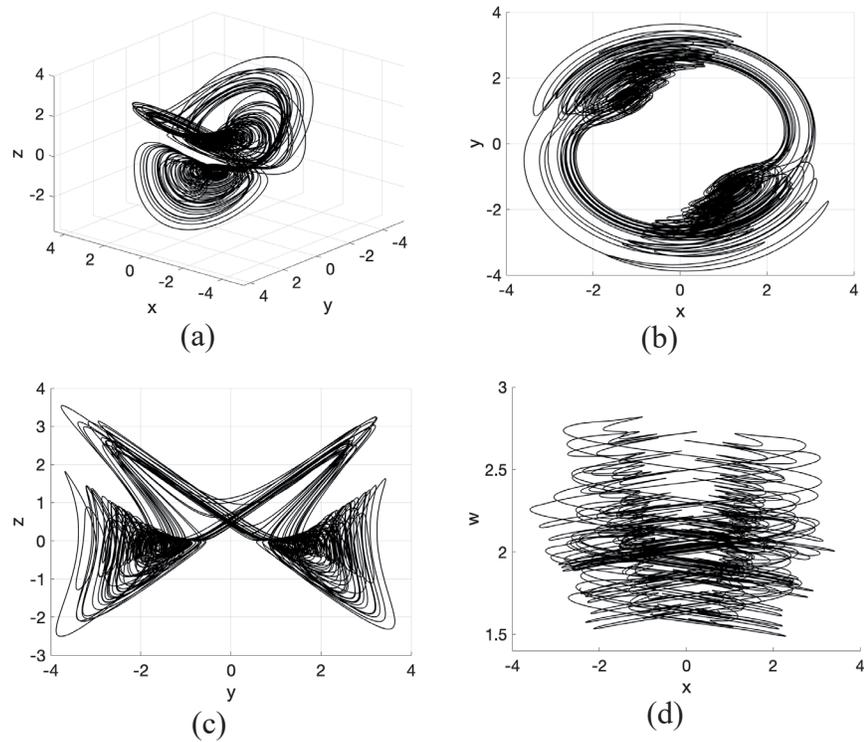


Fig. 3. Planos de fase del sistema caótico propuesto, mostrando un atractor oculto considerando los parámetros de la tabla I y condiciones iniciales  $(1, 0.1, 0.1, 0)$ . (a)  $x$ - $y$ - $z$ , (b)  $x$ - $y$ , (c)  $y$ - $z$  y (d)  $x$ - $w$ .

Los exponentes de Lyapunov del sistema caótico de cuatro dimensiones tienen la siguiente magnitud,  $LE_1=0.0612$ ,  $LE_2=0$ ,  $LE_3=-0.0054$  y  $LE_4=-1.0363$ , respectivamente. Aquí se observa que el sistema tiene un exponente de Lyapunov con valor positivo, uno cero y dos negativos, entonces se comprueba que el comportamiento mostrado en la figura 3 es caótico. La suma de todos los exponentes es  $-0.9805$ , lo cual significa que el sistema dinámico propuesto es acotado y/o disipativo. Además, los exponentes de Lyapunov muestran que todo el volumen de fase se está contrayendo exponencialmente, por lo que el sistema es caótico bajo los parámetros considerados. La dimensión Kaplan-Yorke del sistema se obtiene al considerar la siguiente expresión:

$$D_{KY} = 3 + \frac{LE_1 + LE_2 + LE_3}{|LE_4|} = 3.0538 \quad (9)$$

### COEXISTENCIA DE ATRACTORES

El concepto de multiestabilidad (coexistencia de atractores) aparece cuando diferentes valores de condiciones iniciales son considerados bajo el mismo conjunto de parámetros y pueden generar atractores diferentes.

Si consideran los parámetros  $a=0.12$ ,  $b=0.1$ ,  $k=-0.1$ ,  $\alpha=-0.15$  y  $\gamma=0.25$ , se podrán observar que la relación  $\alpha/\gamma$  es negativa, por lo tanto, los atractores resultantes serán autoexcitados. El diagrama de bifurcación del sistema (7) variando la condición inicial de  $x(0)$  y fijando las demás de acuerdo con  $(x,y,z,w)=(x(0), 0.1, 0.1, 0)$  es mostrado en la figura 4, dicho diagrama se obtiene al considerar un plano de Poincaré sobre  $z=0$ , un paso de integración  $h=0.1$ , y un tiempo de simulación de  $t=2000\text{seg}$ .

A partir del diagrama de bifurcación mostrado en la figura 4, se observa que al considerar diferentes valores de condiciones iniciales, surgen dos regiones de bifurcación, una definida en  $(-0.11, 0.3)$  y la otra definida en  $(-3, -0.11) \cup (0.3, 3)$ . como consecuencia, dos atractores diferentes pueden ser observados. La figura 5 muestra la proyección de los atractores coexistentes del sistema (7), sobre los planos  $x$ - $y$ - $z$ ,  $x$ - $y$ ,  $y$ - $z$  y  $x$ - $w$  con condiciones iniciales diferentes.

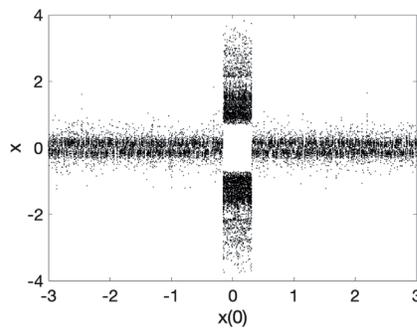


Fig. 4. Diagrama de bifurcación variando la condición inicial  $x(0)$ , el resto de las condiciones iniciales se fijan de acuerdo con  $(x(0), 0.1, 0.1, 0)$ .

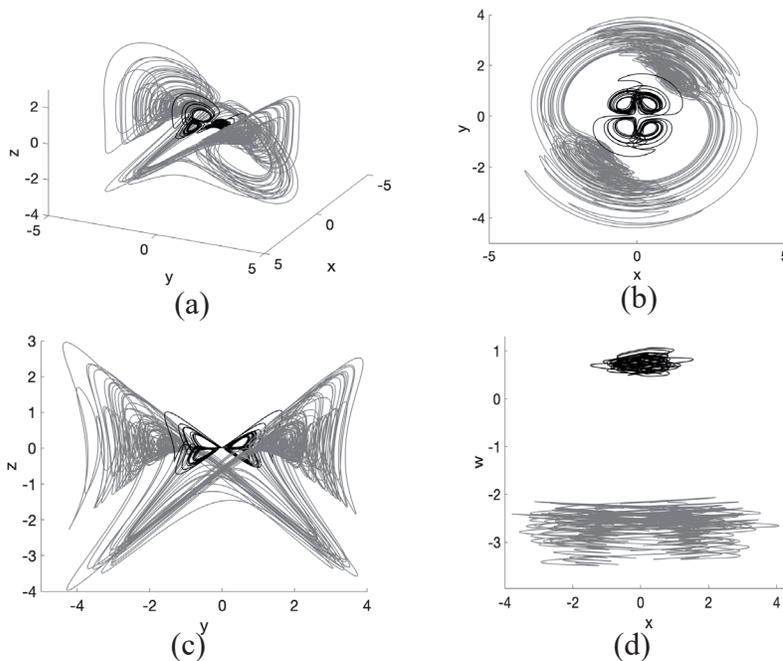


Fig. 5. Atractores coexistentes autoexcitados para los parámetros  $a=0.12$ ,  $b=0.1$ ,  $k=-0.1$ ,  $\alpha=-0.15$  y  $\gamma=0.25$ , con condiciones iniciales  $(0.1, 0.1, 0.1, 0)$  en color gris, y condiciones iniciales  $(1, 0.1, 0.1, 0)$  en color negro. (a) plano  $x$ - $y$ - $z$ , (b) plano  $x$ - $y$ , (c) plano  $y$ - $z$  y (d) plano  $x$ - $w$  respectivamente.

La trayectoria en color gris comienza en la condición inicial  $(0.1, 0.1, 0.1, 0)$  y sus exponentes de Lyapunov son :  $LE_1=0.0528$ ,  $LE_2=0$ ,  $LE_3=-0.0028$  y  $LE_4=-1.0304$ , mientras que la trayectoria en color negro comienza en  $(1, 0.1, 0.1, 0)$  y sus respectivos exponentes de Lyapunov son :  $LE_1=0.0118$ ,  $LE_2=0$ ,  $LE_3=-0.0017$  y  $LE_4=-0.9896$ , entonces al contar con un exponente de Lyapunov positivo, se dice que los atractores coexistentes son caóticos.

Basado en el análisis previo se observa que diferentes valores de condiciones iniciales tienen una gran influencia sobre el comportamiento dinámico del sistema analizado. Lo anterior indica la existencia del fenómeno de multiestabilidad. Además, los planos de fase muestran atractores con diferentes formas, con esto se confirma que al considerar el modelo de un memristor en un sistema caótico la complejidad de un sistema puede verse afectada.

### DIAGRAMAS DE BIFURCACIÓN PARA LOS PARÁMETROS $b$ Y $k$

Con la finalidad de investigar el comportamiento dinámico del sistema caótico basado en un memristor, se consideran diagramas de bifurcación y el máximo exponente de Lyapunov. Un diagrama de bifurcación es una herramienta útil en el área de dinámica no lineal, porque muestra los cambios del comportamiento dinámico en el sistema. Mientras que un valor positivo del máximo exponente de Lyapunov mide la tasa de divergencia de trayectorias cercanas. Específicamente, es el tiempo promedio de la tasa de crecimiento logarítmico de la distancia entre dos trayectorias. En ese sentido se investigó la dinámica del sistema (7) considerando el diagrama de bifurcación y el máximo exponente de Lyapunov del sistema cuando los parámetros  $b$  y  $k$  están variando.

Considerando el sistema (7) y fijando los parámetros  $a=0.12$ ,  $k=-0.1$ ,  $\alpha=-0.15$  y  $\gamma=0.25$ , con las siguientes condiciones iniciales  $(0.1, 0.1, 0.1, 0)$ , y variando el valor del parámetro  $b$  en el intervalo  $b \in (0, 4)$ , se obtiene el diagrama de bifurcación mostrado en la figura 6(a). Este confirma una diversidad en los atractores autoexcitados generados por el sistema (7).

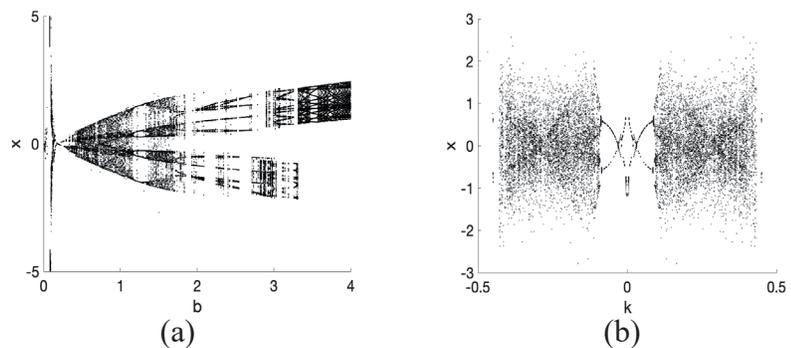


Fig. 6. Diagramas de bifurcación del sistema (7) con condiciones iniciales  $(0.1, 0.1, 0.1, 0)$ . (a) variando el parámetro  $b$ . (b) variando el parámetro  $k$ .

En la figura 6(b), se muestra el diagrama de bifurcación fijando los parámetros  $a=0.12$ ,  $b=1$ ,  $\alpha=-0.15$  y  $\gamma=0.25$  y variando el parámetro  $k$  en el intervalo  $k \in (-0.5, 0.5)$ . Además, con el fin de saber más acerca de las diferentes dinámicas del sistema caótico se ha investigado por medio del máximo exponente de Lyapunov (MLE) la influencia de los parámetros  $b$  y  $k$  en el sistema.

Este estudio proporciona una idea global del comportamiento dinámico del sistema no lineal cuando dos parámetros cambian simultáneamente.

La figura 7 muestra un diagrama de estabilidad basado en el máximo exponente de Lyapunov en el plano  $b-k$  con condiciones iniciales  $(0.1, 0.1, 0.1, 0)$ . Se puede observar la evolución de la estabilidad en términos de los parámetros considerados. Además, los valores del exponente de Lyapunov cambian con el color. En particular, el dominio azul (versión online) representa estados periódicos estables, y el resto de dominios están relacionados con oscilaciones caóticas, mientras que la región de color blanco muestra divergencia del sistema propuesto. Cabe mencionar que este gráfico es muy importante al momento de considerar aplicaciones, y ofrece la posibilidad de utilizar el oscilador en una zona específica.

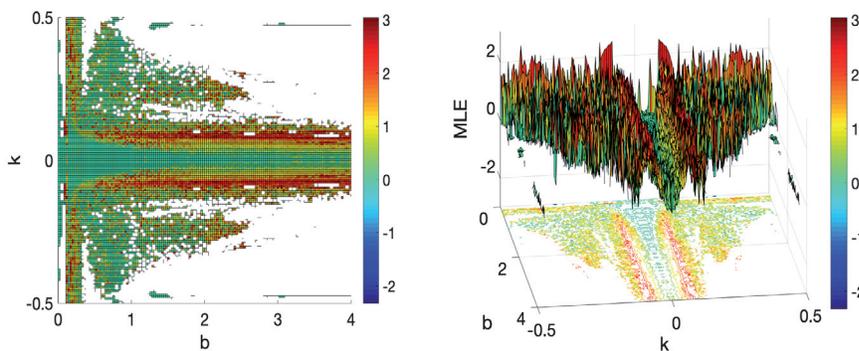


Fig. 7. Diagramas de estabilidad basados en el máximo exponente de Lyapunov de los parámetros en el plano  $b-k$ , mostrando la dinámica global del sistema caótico, basado en un memristor con condiciones iniciales  $(x(0), y(0), z(0), w(0)) = [0.1, 0.1, 0.1, 0]$  y  $a=0.12, b=1, \alpha=-0.15$  y  $\gamma=0.25$ . Estos diagramas son importantes para visualizar dominios caóticos o periódicos del nuevo sistema (versión a color online).

A continuación, con ayuda de los diagramas de bifurcación y MLE, se definen los siguientes conjuntos de parámetros  $a=0.12, b=1, k=0.1, \alpha=-0.15$  y  $\gamma=0.25$ ; y condiciones iniciales  $(1, 0.1, 0.1, 0)$  respectivamente, entonces el atractor mostrado en la figura 8 es obtenido. La figura 8 muestra las proyecciones en los diferentes planos de un atractor autoexcitado con cuatro enrollamientos. Sus exponentes de Lyapunov son  $LE_1=0.0161, LE_2=0, LE_3=-0.1430$  y  $LE_4=-1.7506$ . Basado en el análisis anterior, todos estos resultados tanto planos de fase, diagramas de bifurcación y exponentes de Lyapunov muestran que el sistema caótico tiene interesantes y complejos atractores caóticos (autoexcitados, coexistentes y ocultos), lo cual enriquece a los tipos de atractores caóticos y provee una interesante aportación al área de comunicaciones seguras.

## DISEÑO ELECTRÓNICO DEL SISTEMA CAÓTICO DE 4 D

Con la finalidad de demostrar la viabilidad del sistema caótico propuesto, se diseñó un circuito electrónico, el cual sintetiza el sistema caótico basado en memristor mostrado en (7). El circuito electrónico se diseñó considerando dispositivos estándar. El diseño de circuitos, especialmente el relacionado al de los sistemas caóticos, juega un papel importante en las ciencias no lineales

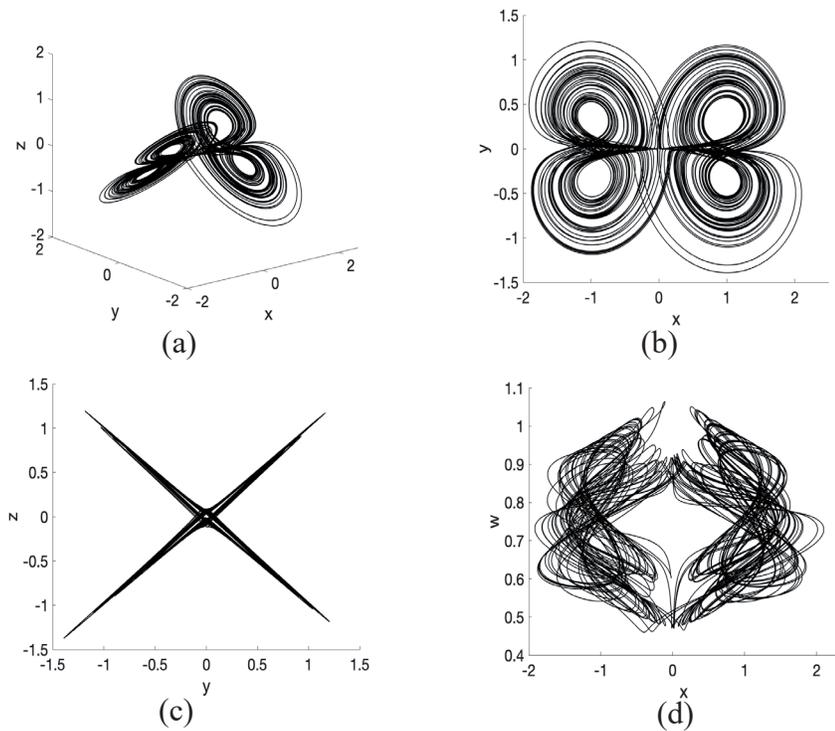


Fig. 8. Planos de fase del sistema caótico propuesto, mostrando un atractor autoexcitado con cuatro enrollamientos considerando los parámetros  $a=0.12$ ,  $b=1$ ,  $k=0.1$ ,  $\alpha=-0.15$  y  $\gamma=0.25$  y condiciones iniciales  $(1, 0.1, 0.1, 0)$ . (a)  $x$ - $y$ - $z$ , (b)  $x$ - $y$ , (c)  $y$ - $z$  y (d)  $x$ - $w$ .

y tiene variadas aplicaciones en muchas otras áreas, como en comunicaciones seguras, procesamiento de señales, generadores de aleatorios de bits, incluso en la planificación de rutas de robots autónomos. Además, la implementación electrónica de sistemas caóticos proporciona un método efectivo para investigar y probar dinámicas de los sistemas teóricos.

La figura 9 muestra el diagrama esquemático del circuito analógico propuesto. Consta de cuatro integradores ( $U1$ ,  $U3$ ,  $U5$  y  $U7$ ), cuatro amplificadores inversores ( $U2$ ,  $U4$ ,  $U6$ , y  $U8$ ), los cuales son implementados considerando el amplificador operacional TL081, y cuatro multiplicadores analógicos AD633 ( $M1$ - $M4$ ).

Aplicando las leyes de circuito de Kirchoff, la ecuación del circuito correspondiente al diseño propuesto, puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{RC} \left( \frac{R}{Ra} x - \frac{R}{10VR1} yz \right), \\ \dot{y} &= \frac{1}{RC} \left( -\frac{R}{Rb} y + \frac{R}{10VR2} xz \right), \\ \dot{z} &= \frac{1}{RC} \left( z + \frac{R}{10VR3} xy + Va - \frac{R}{10VRg} w^2 \right), \\ \dot{w} &= \frac{1}{RC} \left( \frac{R}{Rk} \right) z. \end{aligned} \quad (10)$$

En el sistema (10), las variables  $x, y, z$  y  $w$  corresponden a los voltajes en la salida de los integradores ( $U2$ ,  $U4$ ,  $U6$ , y  $U8$ ). Normalizando las ecuaciones del sistema (10) considerando  $\tau=1/RC$  nosotros podemos ver que el sistema, es equivalente al propuesto en la ecuación (7), con  $a=R/Ra$ ,  $b=R/Rb$ ,  $k=R/Rk$ ,  $\gamma=R/Rg$ . Los componentes del circuito han sido seleccionados como  $R=10k\Omega$ ,

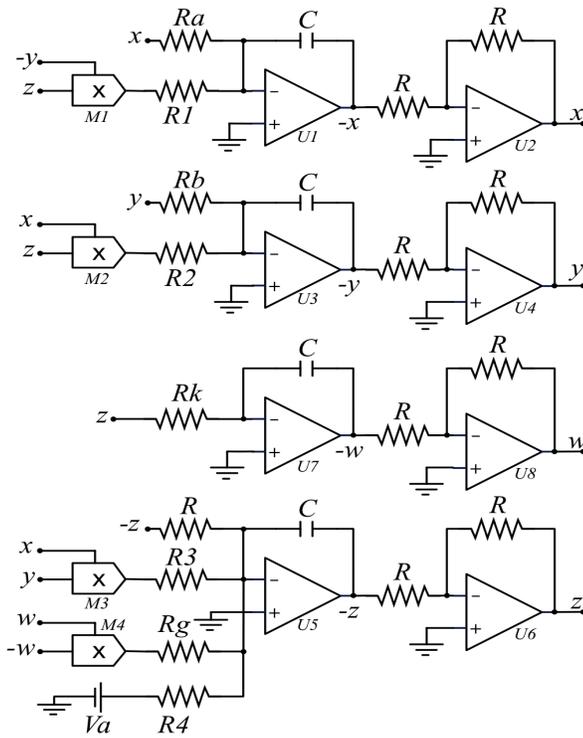


Fig. 9. Diseño de circuito analógico, el cual emula el sistema generador de caos de 4D basado en un memristor.

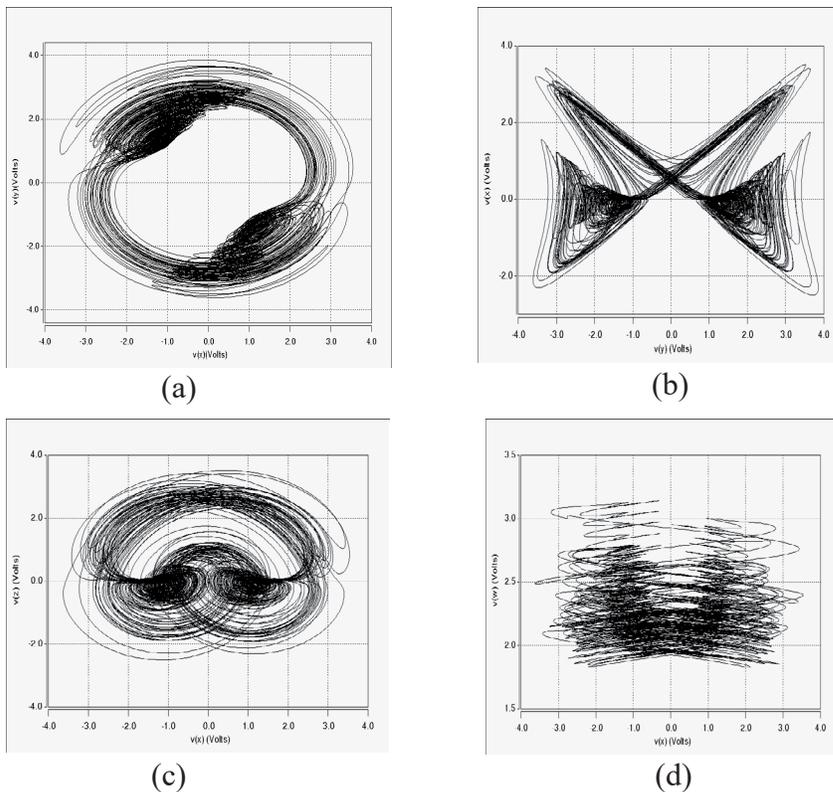


Fig. 10. Resultados de la simulación en SPICE para el atractor caótico oculto. (a) Plano x-y. (b) Plano y-z. (c) Plano x-z. (d) Plano x-w.

$R1=R2=R3=R4=1k\Omega$ ,  $Ra=83.3k\Omega$ ,  $Rb=100k\Omega$ ,  $Rk=100k\Omega$ ,  $Rg=4k\Omega$ ,  $C=10nF$ ,  $Va=0.15V$ . Mientras que las fuentes de alimentación de los amplificadores operacionales son  $\pm 15V$ .

El diseño del circuito es implementado en el software especializado SPICE y los resultados obtenidos son mostrados en las figuras 10. Los resultados teóricos mostrados en las figuras 3 son similares con los obtenidos del circuito.

## CONCLUSIONES

En este artículo, el modelo de un memristor controlado por flujo, fue agregado a un sistema dinámico que invierte el campo geomagnético de la tierra, como resultado, se obtuvo un sistema de cuatro dimensiones. Después de analizar su comportamiento por medio de diagramas de bifurcación, exponentes de Lyapunov, planos de fase, dimensión Kaplan-Yorke, entre otros, se observó que el sistema genera comportamientos complejos. Considerando el diagrama de bifurcación y el máximo exponente de Lyapunov bajo diferentes valores del parámetro  $b$  y  $k$ , se observó que el sistema tiene atractores ocultos. Bajo ciertos valores de parámetros el sistema muestra atractores coexistentes autoexcitados; además de atractores de cuatro enrollamientos autoexcitados. Finalmente, se mostró la consistencia de los análisis teóricos y simulaciones numéricas a través del diseño del circuito electrónico del sistema propuesto. Este además puede ser utilizado en aplicaciones basadas en caos, como criptografía, comunicaciones seguras, generación de números aleatorios, y sincronización.

## AGRADECIMIENTOS

E. Zambrano-Serrano agradece a Conacyt/México (350385) por el apoyo para realizar una estancia posdoctoral en la “Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica” de la UANL. C. Posadas-Castillo agradece a Conacyt/México No. 166654, A1-5-31628. E.Z.S y C.P.C. agradecen a la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (FIME-UANL).

## REFERENCIAS

1. Chua, L. (1971). Memristor-the missing circuit element. *IEEE Transactions on circuit theory*, 18(5), 507-519.
2. Muthuswamy, B., & Chua, L. O. (2010). Simplest chaotic circuit. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 20(05), 1567-1580.
3. Strukov, D. B., Snider, G. S., Stewart, D. R., & Williams, R. S. (2008). The missing memristor found. *nature*, 453(7191), 80.
4. Sprott, J. C. (2010). *Elegant chaos: algebraically simple chaotic flows*. World Scientific.
5. Vo, T. P., Shaverdi, Y., Khalaf, A. J. M., Alsaadi, F. E., Hayat, T., & Pham, V. T. (2019). A Giga-Stable Oscillator with Hidden and Self-Excited Attractors: A Megastable Oscillator Forced by His Twin. *Entropy*, 21(5), 535.
6. Leonov, G. A., Kuznetsov, N. V., & Vagaitsev, V. I. (2011). Localization of hidden Chua's attractors. *Physics Letters A*, 375(23), 2230-2233.
7. Dudkowski, D., Jafari, S., Kapitaniak, T., Kuznetsov, N. V., Leonov, G. A., &

- Prasad, A. (2016). Hidden attractors in dynamical systems. *Physics Reports*, 637, 1-50.
8. Rahma, F., & Muneam, S. (2019). *Memristive Nonlinear Electronic Circuits: Dynamics, Synchronization and Applications*. Springer.
9. Volos, C., Pham, V. T., Zambrano-Serrano, E., Munoz-Pacheco, J. M., Vaidyanathan, S., & Tlelo-Cuautle, E. (2017). Analysis of a 4-D hyperchaotic fractional-order memristive system with hidden attractors. In *Advances in memristors, memristive devices and systems* (pp. 207-235). Springer, Cham.
10. Rajagopal, K., Akgul, A., Moroz, I. M., Wei, Z., Jafari, S., & Hussain, I. (2019). A simple chaotic system with topologically different attractors. *IEEE Access*, 7, 89936-89947.



**¡Anúnciense en  
INGENIERIAS!**

**i**

INFORMES:

Tel. (52) 818-329-4020 ext. 5854  
e-mail: [revistaingenierias@uanl.mx](mailto:revistaingenierias@uanl.mx)  
Internet: [www.ingenierias.uanl.mx](http://www.ingenierias.uanl.mx)

The advertisement features a large green circle on a black background. Inside the circle, the text '¡Anúnciense en INGENIERIAS!' is written in white, bold, sans-serif font. Below this is a white logo consisting of a lowercase 'i' inside a circle. To the right of the logo are three overlapping covers of the journal 'Ingenierías', numbered 56, 57, and 58. Below the logo, the word 'INFORMES:' is written in white. At the bottom of the circle, contact information is provided: 'Tel. (52) 818-329-4020 ext. 5854', 'e-mail: revistaingenierias@uanl.mx', and 'Internet: www.ingenierias.uanl.mx'.