

Realización electrónica de sistemas caóticos: Parte 2, Analógicos lineales por tramos

Francisco Antonio Rodríguez Cruz, César de Jesús Chacón Rendón,
Angel Rodriguez-Liñan

Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,
franciscoantoniordz@hotmail.com, ces.chre98@gmail.com, angel.rodriguezln@uanl.edu.mx

RESUMEN

En la primera parte, se mostró la realización electrónica con circuitos analógicos de algunos sistemas caóticos continuos cuadráticos. En esta segunda parte, se resume la realización electrónica de algunos sistemas caóticos lineales por tramos, mediante circuitos con amplificadores operacionales y diodos. Se demuestra la equivalencia de sus variables y componentes electrónicos con las variables y parámetros normalizados de los modelos matemáticos caóticos. Además, se ilustran resultados del comportamiento caótico de cada circuito comparado con simulaciones de sus modelos matemáticos establecidos. En la siguiente parte de este trabajo, se mostrará la implementación de sistemas caóticos en dispositivos digitales.

PALABRAS CLAVE

Sistemas caóticos, computación analógica, amplificadores operacionales, funciones lineales por tramos.

ABSTRACT

In the first part, the electronic realization with analog circuits of some continuous quadratic chaotic systems was shown. In this second part, the electronic realization of some piecewise linear chaotic systems is summarized, by means of circuits with operational amplifiers and diodes. The equivalence of its variables and electronic components with the normalized variables and parameters of chaotic mathematical models is demonstrated. In addition, results of the chaotic behavior of each circuit are illustrated compared to simulations of their established mathematical models. In the next part of this work, the implementation of chaotic systems in digital devices will be shown.

KEYWORDS

Chaotic systems, analog computation, operational amplifiers, piecewise linear functions.

INTRODUCCIÓN

En la primera parte de este trabajo, se abordó la implementación o realización de sistemas caóticos con no linealidades cuadráticas mediante circuitería analógica con multiplicadores y amplificadores operacionales (op-amp, por sus siglas en inglés). Sin embargo, también existen sistemas lineales por tramos que exhiben comportamiento caótico, que pueden ser implementados electrónicamente, sin requerir multiplicadores.

Tal es el caso del circuito electrónico de Chua, que es uno de los primeros y más conocidos, creado en 1984¹, consta de resistencias, dos capacitores, una bobina y dos op-amp. Puede ser modelado a través de un sistema de tres ecuaciones diferenciales de las tensiones en los capacitores y la intensidad de la corriente eléctrica en la bobina. Lo que caracteriza a este circuito es su autonomía, al ser alimentado sólo por fuentes de corriente directa; y el uso de un único elemento no lineal: la resistencia negativa o diodo de Chua, que brinda una función lineal a tres tramos¹⁻³.

Existen sistemas no lineales, cuyos atractores pueden ser generados con sistemas lineales por tramos, como el sistema afín a Rössler^{4,5}, donde sustituye el elemento no lineal por uno lineal a tramos que produce el mismo atractor. Otra familia de sistemas caóticos bien conocida es la de Sprott⁶, cuyas realizaciones electrónicas utilizan arreglos con diodos y op-amp como elementos lineales por tramos.

En caso de dichas realizaciones electrónicas, es conveniente conocer los modelos matemáticos de los circuitos y la relación o equivalencia de sus variables eléctricas con las ecuaciones diferenciales de los sistemas caóticos, para poder hacer análisis, aplicaciones y control de sus patrones de oscilación basados en su dinámica.

A continuación, se explica la realización de algunos sistemas caóticos mediante circuitos analógicos lineales por tramos, incluyendo el mapeo entre magnitudes de los componentes electrónicos y las variables normalizadas de los modelos caóticos. Posteriormente, se ilustra la comparación de los atractores caóticos mediante simulaciones numéricas e implementación de circuitos. En la tercera parte de este trabajo, se mostrará la implementación de sistemas caóticos en dispositivos digitales.

REALIZACIÓN CON CIRCUITOS ANALÓGICOS

En esta sección, se resume la realización electrónica de algunos sistemas caóticos utilizando resistores, capacitores, diodos y op-amp en las configuraciones conocidas como amplificador inversor, amplificador no inversor, sumador inversor, restador inversor e integrador⁷. También se presenta el mapeo entre las magnitudes eléctricas de dichos componentes y las variables de sus modelos caóticos adimensionales.

Circuito afín al sistema Rössler

El sistema caótico Rössler adimensional puede representarse por el modelo lineal a tramos⁸ descrito por

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = -\alpha x_1 - \beta x_2 - \lambda x_3 \\ \frac{dx_2}{d\tau} = x_1 + \gamma x_2 \\ \frac{dx_3}{d\tau} = -\eta(x_1) - x_3 \end{cases} \quad (1)$$

con

$$\eta(x_1) = \begin{cases} 0, & x_1 \leq 3 \\ -\mu(x_1 - 3), & x_1 > 3 \end{cases} \quad (2)$$

donde x_1, x_2 y x_3 son las variables de estado, τ es una variable normalizada de tiempo, $\alpha, \beta, \lambda, \gamma$ y μ son parámetros constantes. El sistema (1) tiene una realización electrónica por el circuito de la figura 1, donde $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}, R_{11}, R_{12}, R_{13}$ son resistencias, C_1, C_2 y C_3 son capacitancias, D_1 es un diodo, V_{CC} y V_{DD3} son los voltajes de alimentación de los amplificadores operacionales U1A, U1B, U1C, U1D y U2, $V_{DC} < 0$ es un voltaje constante respecto a tierra, v_1, v_2 y v_3 son los voltajes de salida de los op-amp U2, U1B y U1D, respectivamente.

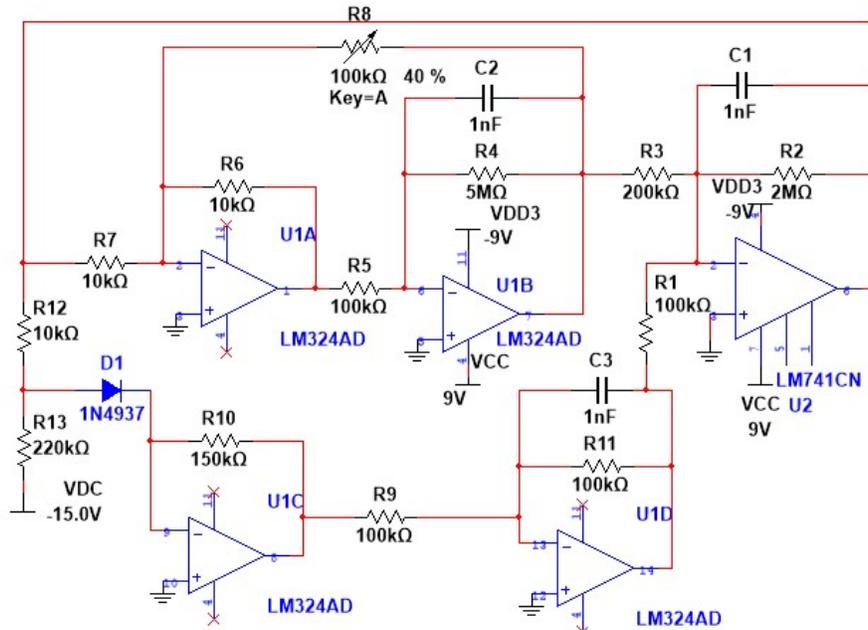


Fig. 1. Diagrama esquemático de la realización del sistema de Rössler lineal por tramos.

Para demostrar la equivalencia del circuito de la figura 1 con el sistema (1) se realiza el siguiente análisis: Se inicia con el op-amp U2, analizando las corrientes en su terminal inversora, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{v_2}{R_3} + \frac{v_3}{R_1} + \frac{v_1}{R_2} + C_1 \frac{dv_1}{dt} &= 0 \\ \frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{C_1} \left(-\frac{v_1}{R_2} - \frac{v_2}{R_3} - \frac{v_3}{R_1} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

donde t es la variable de tiempo. Para el op-amp U1A, la salida de voltaje es

$$V_{1A} = -\frac{R_6}{R_7} v_1 - \frac{R_6}{R_8} v_2$$

Para el op-amp U1B, analizando las corrientes en su terminal inversora se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{V_{1A}}{R_5} + \frac{v_2}{R_4} + C_2 \frac{dv_2}{dt} &= 0 \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= -\frac{V_{1A}}{R_5} - \frac{v_2}{R_4} = \frac{R_6}{R_5 R_7} v_1 + \frac{R_6}{R_5 R_8} v_2 - \frac{1}{R_4} v_2 \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} \left(\frac{R_6}{R_5 R_7} v_1 + \frac{R_6}{R_5 R_8} v_2 - \frac{1}{R_4} v_2 \right) \end{aligned} \quad (4)$$

En el op-amp U1C, las corrientes en la entrada inversora son

$$i_d + \frac{V_{1C}}{R_{10}} = 0 \quad (5)$$

donde $i_d > 0$ es la corriente a través del diodo $D1$ en polarización directa y V_{1C} es el voltaje de salida del op-amp U1C. La corriente i_d es

$$i_d = \frac{v_1 - V_D}{R_{12}} - \frac{V_D - V_{DC}}{R_{13}} \quad (6)$$

donde V_D es el voltaje de polarización directa del diodo $D1$. Para que $i_d > 0$, es necesario satisfacer $v_1 > \left(V_D + \frac{(V_D - V_{DC})R_{12}}{R_{13}} \right)$, en otro caso $i_d = 0$. Sustituyendo (6) en (5) y despejando el voltaje de salida del op-amp U1C resulta

$$\begin{cases} V_{1C} = 0, i_d = 0 \\ V_{1C} = R_{10} \left(-\frac{v_1 - V_D}{R_{12}} + \frac{V_D - V_{DC}}{R_{13}} \right) = -\frac{R_{10}}{R_{12}} \left[v_1 - V_D - \frac{(V_D - V_{DC})R_{12}}{R_{13}} \right], i_d > 0 \end{cases} \quad (7)$$

Para el op-amp U1D, analizando las corrientes en la terminal inversora, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{V_{1C}}{R_9} + \frac{v_3}{R_{11}} + C_3 \frac{dv_3}{dt} &= 0 \\ \frac{dv_3}{dt} &= \frac{1}{C_3} \left[-\frac{V_{1C}}{R_9} - \frac{v_3}{R_{11}} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

Por lo tanto, las ecuaciones (3), (4), (8) y (7) pueden escribirse como

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{R_5 C_1} \left(-\frac{R_5 v_1}{R_2} - \frac{R_5 v_2}{R_3} - \frac{R_5 v_3}{R_1} \right) \\ \frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{R_5 C_2} \left(\frac{R_6}{R_7} v_1 + \left(\frac{R_6}{R_8} - \frac{R_5}{R_4} \right) v_2 \right) \\ \frac{dz}{dt} = \frac{1}{R_5 C_3} \left[-\frac{R_5 V_{1C}(v_1)}{R_9} - \frac{R_5 v_3}{R_{11}} \right] \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{con } V_{1C}(v_1) = \begin{cases} 0, v_1 \leq \left(V_D + \frac{(V_D - V_{DC})R_{12}}{R_{13}} \right) \\ -\frac{R_{10}}{R_{12}} \left(v_1 - \left(V_D + \frac{(V_D - V_{DC})R_{12}}{R_{13}} \right) \right), v_1 > \left(V_D + \frac{(V_D - V_{DC})R_{12}}{R_{13}} \right) \end{cases} \quad (10)$$

que es un modelo de la implementación electrónica de la figura 1, equivalente al sistema caótico de Rössler descrito por (1)-(2), bajo las condiciones y mapeos del tiempo, estados y parámetros dados por

$$\tau = \frac{1}{R_5 C_1} t, \frac{v_1}{x_1} = \frac{v_2}{x_2} = \frac{v_3}{x_3} = M, M = \frac{(V_D + \frac{(V_D - V_{DC})R_{12}}{R_{13}})}{3}, \alpha = \frac{R_5}{R_2}, \beta = \frac{R_5}{R_3}, \lambda = \frac{R_5}{R_1}, \gamma = \frac{R_6}{R_8} - \frac{R_5}{R_4}, \mu = \frac{R_{10}}{R_{12}}, C_1 = C_2 = C_3, R_6 = R_7, R_5 = R_9 = R_{11} \text{ y } \eta(x_1) = \frac{V_{1C}(x)}{M}.$$

Circuito de Chua

El sistema caótico Chua¹ está representado en su forma adimensional como

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = \alpha(x_2 - x_1 - \eta(x_1)) \\ \frac{dx_2}{d\tau} = x_1 - x_2 + x_3 \\ \frac{dx_3}{d\tau} = -\beta x_2 - \gamma x_3 \end{cases} \tag{11}$$

con

$$\eta(x_1) = bx_1 + \frac{1}{2}(a - b)(|x_1 + 1| - |x_1 - 1|) = \begin{cases} bx_1 - a + b, & x_1 \leq -1 \\ ax_1, & -1 \leq x_1 \leq 1 \\ bx_1 + a - b, & x_1 \geq 1 \end{cases} \tag{12}$$

donde x_1, x_2 y x_3 son las variables de estado, τ es una variable normalizada de tiempo, α, β, γ, a y b son parámetros constantes. El sistema (11) tiene una realización electrónica por medio del circuito de la figura 2, con el componente denominado diodo Chua (NR), que es una resistencia negativa no lineal implementada por el circuito de la figura 3, donde $R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7$ son resistencias, L_1 es una inductancia, C_1 y C_2 son capacitancias, V_1 y V_2 son los voltajes en los capacitores C_1 y C_2 , respectivamente. i_1, i_2, i_3, i_4 e i_o son corrientes, V_{CC} es el voltaje de alimentación de los amplificadores operacionales U1A y U2A.

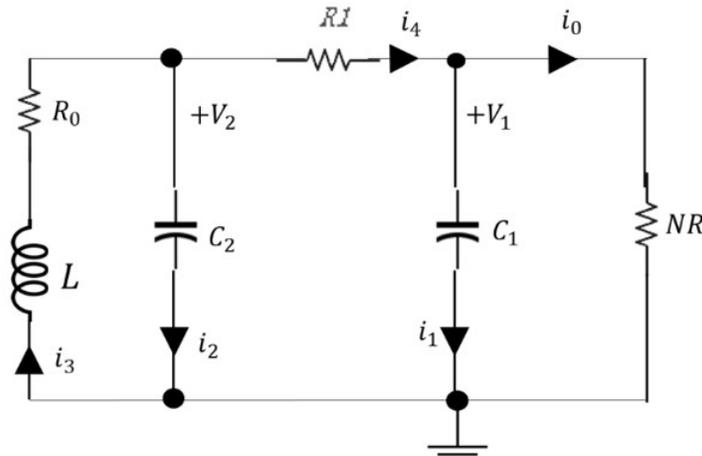


Fig. 2. Diagrama esquemático de la realización del sistema de Chua.

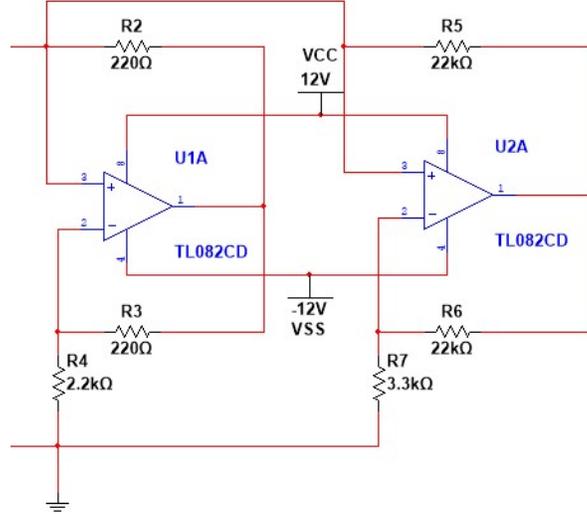


Fig. 3. Diagrama esquemático de la realización del diodo de Chua NR.

Para demostrar la equivalencia del circuito de las figuras 2 y 3 con el sistema (11)-(12) se analiza lo siguiente: La corriente que pasa por el capacitor C_1 es

$$\begin{aligned} i_1 &= i_4 - i_o \\ C_1 \frac{dV_1}{dt} &= \frac{V_2 - V_1}{R_1} - i_o \\ \frac{dV_1}{dt} &= \frac{1}{R_1 C_1} (V_2 - V_1) - \frac{1}{C_1} i_o \end{aligned} \quad (13)$$

La corriente en el capacitor C_2 es

$$\begin{aligned} i_2 &= i_3 - i_4 \\ C_2 \frac{dV_2}{dt} &= i_3 - \frac{V_2 - V_1}{R_1} \\ \frac{dV_2}{dt} &= \frac{1}{R_1 C_2} (V_1 - V_2) + \frac{1}{C_2} i_3 \end{aligned} \quad (14)$$

Puesto que el voltaje V_2 en la rama del capacitor C_2 es el mismo de la rama del inductor, la suma de caídas de tensión en la rama del inductor es

$$\begin{aligned} V_2 &= R_0(-i_3) + L_1 \left(-\frac{di_3}{dt} \right) \\ \frac{di_3}{dt} &= -\frac{V_2}{L_1} - \frac{R_0}{L_1} i_3 \end{aligned} \quad (15)$$

De la figura 3, la corriente a través de R_2 es

$$i_{1A} = \frac{V_1 - V_{1A}}{R_2} = -\frac{V_{1A}}{R_2} + \frac{V_1}{R_2} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} V_{1-} &= \frac{R_4}{R_3 + R_4} V_{1A} \\ V_{1A} &= \frac{R_3 + R_4}{R_4} V_{1-} \end{aligned} \quad (17)$$

donde V_{1A} es el voltaje de salida y V_{1-} el voltaje en la entrada inversora del op-amp U1A. Definiendo

$$\begin{aligned} V_{B1} &\triangleq \max\{|V_{1-}|\} = \max\left\{ \left| \frac{R_4}{R_3 + R_4} V_{1A} \right| \right\} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} V_{sat1} \\ V_{B2} &\triangleq \max\{|V_{2-}|\} = \max\left\{ \left| \frac{R_7}{R_6 + R_7} V_{2A} \right| \right\} = \frac{R_7}{R_6 + R_7} V_{sat2} \end{aligned}$$

donde $V_{sat1} = \max\{|V_{1A}|\} \leq V_{CC}$ y $V_{sat2} = \max\{|V_{2A}|\} \leq V_{CC}$. Entonces, en el caso de $|V_1| \leq V_{B1}$:

$$V_1 = V_1^+ = V_1^-$$

Por lo que, sustituyendo la ecuación (17) en (16), resulta

$$\begin{aligned} i_{1A} &= -\frac{1}{R_2} \left(\frac{R_3 + R_4}{R_4} \right) V_1^- + \frac{V_1}{R_2} \\ &= -\frac{R_3}{R_2 R_4} V_1 - \frac{V_1}{R_2} + \frac{V_1}{R_2} \\ i_{1A} &= -\frac{R_3}{R_2 R_4} V_1 \end{aligned}$$

Similarmente, para $|V_1| \leq V_{B2}$

$$V_1 = V_2^+ = V_2^- = \frac{R_7}{R_6 + R_7} V_{2A}$$

donde V_{2A} es el voltaje de salida y V_2^- el voltaje en la entrada inversora del op-amp U2A. De la figura 3, la corriente a través de R_5 es

$$\begin{aligned} i_{2A} &= \frac{V_1 - V_{2A}}{R_5} = -\frac{V_{2A}}{R_5} + \frac{V_1}{R_5} \\ i_{2A} &= -\frac{1}{R_5} \left(\frac{R_6 + R_7}{R_7} \right) V_1 + \frac{V_1}{R_5} \\ i_{2A} &= \frac{-R_6}{R_5 R_7} V_1 \end{aligned} \quad (18)$$

En el caso, $V_1 \geq V_{B1}$, entonces

$$V_1 = V_1^+ \geq V_1^- = V_{B1} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} V_{sat1}$$

y por lo tanto

$$V_{1A} = V_{sat1} = \frac{R_3 + R_4}{R_4} V_{B1}$$

Sustituyendo en la ecuación (16), resulta que

$$\begin{aligned} i_{1A} &= -\frac{1}{R_2} \left(\frac{R_3 + R_4}{R_4} \right) V_{B1} + \frac{1}{R_2} V_1 \\ i_{1A} &= -\frac{R_3}{R_2 R_4} V_{B1} - \frac{1}{R_2} V_{B1} + \frac{1}{R_2} V_1 \end{aligned}$$

Similarmente, si $V_1 \geq V_{B2}$, entonces

$$V_1 = V_2^+ \geq V_2^- = V_{B2} = \frac{R_7}{R_6 + R_7} V_{sa}$$

y por lo tanto

$$V_{2A} = V_{sat2} = \frac{R_6 + R_7}{R_7} V_{B2},$$

que sustituyendo en la ecuación (18), resulta en

$$\begin{aligned} i_{2A} &= -\frac{1}{R_5} \left(\frac{R_6 + R_7}{R_7} \right) V_{B2} + \frac{1}{R_5} V_1 \\ i_{2A} &= -\frac{R_6}{R_5 R_7} V_{B2} - \frac{1}{R_5} V_{B2} + \frac{1}{R_5} V_1. \end{aligned}$$

Para el caso $V_1 \leq -V_{B1}$,

$$V_1 = V_1^+ \leq V_1^- = -V_{B1} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} (-V_{sat1})$$

y por tanto

$$V_{1A} = -V_{sa} = \frac{R_3 + R_4}{R_4} (-V_{B1}).$$

Sustituyendo en la ecuación (16), resulta que

$$i_{1A} = -\frac{1}{R_2} \left(\frac{R_3 + R_4}{R_4} \right) (-V_{B1}) + \frac{1}{R_2} V_1$$

$$i_{1A} = \frac{R_3}{R_2 R_4} V_{B1} + \frac{1}{R_2} V_{B1} + \frac{1}{R_2} V_1$$

Similarmente, si $V_1 \leq -V_{B2}$, entonces

$$V_1 = V_2^+ \leq V_2^- = -V_{B2} = \frac{R_7}{R_6 + R_7} (-V_{sat2})$$

Por tanto

$$V_{2A} = -V_{sat2} = \frac{R_6 + R_7}{R_7} (-V_{B2})$$

que resulta en

$$i_{2A} = -\frac{1}{R_5} \left(\frac{R_6 + R_7}{R_7} \right) (-V_{B2}) + \frac{1}{R_5} V_1$$

$$i_{2A} = \frac{R_6}{R_5 R_7} V_{B2} + \frac{1}{R_5} V_{B2} + \frac{1}{R_5} V_1$$

Sea $V_{B1} > V_{B2}$. Si $|V_1| \leq V_{B2} < V_{B1}$, entonces

$$i_o = i_{1A} + i_{2A}$$

$$i_o(V_1) = -\frac{R_3}{R_2 R_4} V_1 - \frac{R_6}{R_5 R_7} V_1 = \left(-\frac{R_3}{R_2 R_4} - \frac{R_6}{R_5 R_7} \right) V_1 \quad (19)$$

Si $V_{B2} \leq V_1 \leq V_{B1}$, entonces

$$i_o = i_{1A} + i_{2A} = -\frac{R_3}{R_2 R_4} V_1 + \frac{1}{R_5} V_1 - \frac{R_6}{R_5 R_7} V_{B2} - \frac{1}{R_5} V_{B2}$$

$$= \left(-\frac{R_3}{R_2 R_4} + \frac{1}{R_5} \right) V_1 - \frac{R_6}{R_5 R_7} V_{B2} - \frac{R_3}{R_2 R_4} V_{B2} - \frac{1}{R_5} V_{B2} + \frac{R_3}{R_2 R_4} V_{B2}$$

$$i_o(V_1) = \left(-\frac{R_3}{R_2 R_4} + \frac{1}{R_5} \right) V_1 + \left(-\frac{R_3}{R_2 R_4} - \frac{R_6}{R_5 R_7} \right) V_{B2} - \left(-\frac{R_3}{R_2 R_4} + \frac{1}{R_5} \right) V_{B2} \quad (20)$$

Si $-V_{B1} \leq V_1 \leq -V_{B2}$, entonces

$$i_o = i_{1A} + i_{2A} = -\frac{R_3}{R_2 R_4} V_1 + \frac{1}{R_5} V_1 + \frac{R_6}{R_5 R_7} V_{B2} + \frac{1}{R_5} V_{B2}$$

$$= -\frac{R_3}{R_2 R_4} V_1 + \frac{1}{R_5} V_1 + \frac{R_6}{R_5 R_7} V_{B2} + \frac{R_3}{R_2 R_4} V_{B2} - \frac{R_3}{R_2 R_4} V_{B2} + \frac{1}{R_5} V_{B2}$$

$$i_o(V_1) = \left(-\frac{R_3}{R_2 R_4} + \frac{1}{R_5} \right) V_1 - \left(-\frac{R_3}{R_2 R_4} - \frac{R_6}{R_5 R_7} \right) V_{B2} + \left(-\frac{R_3}{R_2 R_4} + \frac{1}{R_5} \right) V_{B2} \quad (21)$$

Si $V_1 \geq V_{B1} > V_{B2}$, entonces

$$i_o = i_{1A} + i_{2A} = -\frac{R_3}{R_2 R_4} V_{B1} - \frac{1}{R_2} V_{B1} + \frac{1}{R_2} V_1 - \frac{R_6}{R_5 R_7} V_{B2} - \frac{1}{R_5} V_{B2} + \frac{1}{R_5} V_1$$

$$i_o(V_1) = \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} \right) V_1 + \left(-\frac{R_3}{R_2 R_4} - \frac{1}{R_2} \right) V_{B1} + \left(-\frac{R_6}{R_5 R_7} - \frac{1}{R_5} \right) V_{B2}$$

Si $V_1 \leq -V_{B1} < -V_{B2}$, entonces

$$i_o = i_{1A} + i_{2A} = \frac{1}{R_2} V_1 + \frac{R_3}{R_2 R_4} V_{B1} + \frac{1}{R_2} V_{B1} + \frac{1}{R_5} V_1 + \frac{R_6}{R_5 R_7} V_{B2} + \frac{1}{R_5} V_{B2}$$

$$i_o(V_1) = \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} \right) V_1 + \left(\frac{R_3}{R_2 R_4} + \frac{1}{R_2} \right) V_{B1} + \left(\frac{R_6}{R_5 R_7} + \frac{1}{R_5} \right) V_{B2}$$

A partir de (19), (20) y (21), la corriente $i_o(V_1)$ es dada en forma resumida por

$$i_o(V_1) = \begin{cases} m_b V_1 - m_a V_{B2} + m_b V_{B2}, & -V_{B1} \leq V_1 \leq -V_{B2} \\ m_a V_1, & -V_{B2} \leq V_1 \leq V_{B2} \\ m_b V_1 + m_a V_{B2} - m_b V_{B2}, & V_{B2} \leq V_1 \leq V_{B1} \end{cases} \quad (22)$$

donde $m_a = \left(-\frac{R_3}{R_2R_4} - \frac{R_6}{R_5R_7}\right)$ y $m_b = \left(-\frac{R_3}{R_2R_4} + \frac{1}{R_5}\right)$.

Sin embargo, la ecuación (22) puede reescribirse para toda $V_1 \in [-V_{B1}, V_{B1}]$ como la función

$$i_o(V_1) = m_b V_1 + \frac{1}{2}(m_a - m_b)[|V_1 + V_{B2}| - |V_1 - V_{B2}|] \quad (23)$$

Para demostrarlo, considérese que $|x| = \text{signo}(x)x$, donde

$$\text{signo}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Entonces, para $V_{B2} \leq V_1 \leq V_{B1}$, la ecuación (23) es

$$\begin{aligned} i_o(V_1) &= m_b V_1 + \frac{1}{2}(m_a - m_b)[\text{signo}(V_1 + V_{B2})(V_1 + V_{B2}) - \text{signo}(V_1 - V_{B2})(V_1 - V_{B2})] \\ i_o(V_1) &= m_b V_1 + \frac{1}{2}(m_a - m_b)[(+1)(V_1 + V_{B2}) - (+1)(V_1 - V_{B2})] \\ &= m_b V_1 + \frac{1}{2}(m_a - m_b)[V_1 + V_{B2} - V_1 + V_{B2}] \\ i_o(V_1) &= m_b V_1 + m_a V_{B2} - m_b V_{B2} \end{aligned}$$

que es consistente con la ecuación (22).

Para $-V_{B2} \leq V_1 \leq V_{B2}$, la ecuación (23) es

$$\begin{aligned} i_o(V_1) &= -m_b V_1 + \frac{1}{2}(m_a - m_b)[\text{signo}(V_1 + V_{B2})(V_1 + V_{B2}) - \text{signo}(V_1 - V_{B2})(V_1 - V_{B2})] \\ i_o(V_1) &= m_b V_1 + \frac{1}{2}(m_a - m_b)[(1)(V_1 + V_{B2}) - (-1)(V_1 - V_{B2})] \\ &= m_b V_1 + \frac{1}{2}(m_a - m_b)[V_1 + V_{B2} + V_1 - V_{B2}] \\ &= m_b V_1 + m_a V_1 - m_b V_1 \\ i_o(V_1) &= -m_a V_1 \end{aligned}$$

que es consistente con la ecuación (22).

Para $-V_{B1} \leq V_1 \leq -V_{B2}$, la ecuación (23) es

$$\begin{aligned} i_o(V_1) &= m_b V_1 + \frac{1}{2}(m_a - m_b)[\text{signo}(V_1 + V_{B2})(V_1 + V_{B2}) - \text{signo}(V_1 - V_{B2})(V_1 - V_{B2})] \\ i_o(V_1) &= m_b V_1 + \frac{1}{2}(m_a - m_b)[(-1)(V_1 + V_{B2}) - (-1)(V_1 - V_{B2})] \\ &= m_b V_1 + \frac{1}{2}(m_a - m_b)[-V_1 - V_{B2} + V_1 - V_{B2}] \\ i_o(V_1) &= m_b V_1 - m_a V_{B2} + m_b V_{B2} \end{aligned}$$

que es consistente con la ecuación (22).

Por lo tanto, partiendo de las ecuaciones (13), (14), (15), (22) y (23), el circuito electrónico de las figuras 2 y 3 es modelado por

$$\begin{cases} \frac{dV_1}{dt} = \frac{1}{R_1 C_2 C_1} (V_2 - V_1 - R_1 i_o(V_1)) \\ \frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{R_1 C_2} (V_1 - V_2 + R_1 i_3) \\ \frac{di_3}{dt} = \frac{1}{R_1 C_2} \left(-\frac{R_1 C_2 V_2}{L_1} - \frac{R_0 R_1 C_2}{L_1} i_3 \right) \end{cases} \quad (24)$$

con (23) y (22)

$$i_o(V_1) = m_b V_1 + \frac{1}{2}(m_a - m_b)[|V_1 + V_{B2}| - |V_1 - V_{B2}|] = \begin{cases} m_b V_1 - m_a V_{B2} + m_b V_{B2}, & -V_{B1} \leq V_1 \leq -V_{B2} \\ m_a V_1, & -V_{B2} \leq V_1 \leq V_{B2} \\ m_b V_1 + m_a V_{B2} - m_b V_{B2}, & V_{B2} \leq V_1 \leq V_{B1} \end{cases}$$

El modelo (24)-(23) es equivalente al sistema caótico de Chua adimensional (11)-(12), bajo las condiciones y mapeos del tiempo, estados y parámetros dados por $\tau = \frac{1}{R_1 C_2} t$, $\frac{V_1}{x_1} = \frac{V_2}{x_2} = \frac{R_1 i_3}{x_3} = M$, $M = V_{B2} = \frac{R_7}{R_6 + R_7} V_{CC}$, $V_{B1} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} V_{CC}$, $\alpha = \frac{C_2}{C_1}$, $\beta = \frac{R_1^2 C_2}{L_1}$, $\gamma = \frac{R_0 R_1 C_2}{L_1}$, $\eta(x_1) = \frac{R_1 i_o(V_1)}{V_{B2}}$, $a = R_1 m_a$, $b = R_1 m_b$, $m_a = \left(-\frac{R_3}{R_2 R_4} - \frac{R_6}{R_5 R_7}\right)$ y $m_b = \left(-\frac{R_3}{R_2 R_4} + \frac{1}{R_5}\right)$.

Circuitos Sprott

J.C. Sprott reportó⁶ una familia de sistemas caóticos, descrita por

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = x_2 \\ \frac{dx_2}{d\tau} = x_3 \\ \frac{dx_3}{d\tau} = -ax_3 - x_2 + \eta(x_1) \end{cases} \quad (25)$$

donde a es un parámetro constante del sistema caótico y $\eta(x_1)$ es una función lineal a trozos. La ecuación (25) tiene una realización electrónica por el circuito de la figura 4, donde R_1 , R_2 , R_3 son resistencias, C_1 , C_2 y C_3 son capacitancias, V_{CC} y V_{SS} son los voltajes de alimentación de los amplificadores operacionales U1A, U1B, y es el voltaje del capacitor C_2 , x y z son los voltajes de salida de los op-amp U1B y U1A, respectivamente.

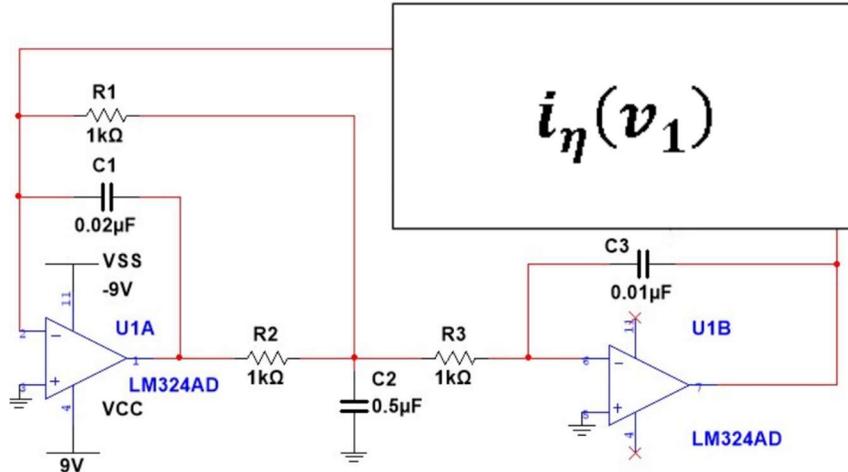


Fig. 4. Diagrama esquemático de la realización de los sistemas de Sprott.

Para demostrar la equivalencia del circuito de la figura 4 con el sistema (25) se realiza el siguiente análisis:

Se inicia con el op-amp U1A, analizando las corrientes en el nodo de entrada inversora:

$$i_\eta(v_1) + \frac{v_2}{R_1} + C_1 \frac{dv_3}{dt} = 0$$

donde v_1 , v_3 y v_2 son los voltajes de salida de los op-amp U1B, U1A y del capacitor C_2 , respectivamente. Despejando, resulta

$$\frac{dv_3}{dt} = -\frac{v_2}{R_1 C_1} - \frac{i_\eta(v_1)}{C_1} \quad (26)$$

Analizando las corrientes en el nodo del capacitor C_2 , se tiene:

$$\frac{v_3 - v_2}{R_2} - \frac{v_2}{R_1} - \frac{v_2}{R_3} - C_2 \frac{dv_2}{dt} = 0$$

Despejando y si $R_1 = R_2 = R_3$, resulta

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{v_3}{R_2 C_2} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \frac{v_2}{C_2} = \frac{v_3}{R_2 C_2} - \frac{3v_2}{R_2 C_2} \quad (27)$$

El voltaje de salida del op-amp U1B obedece a la relación

$$v_1 = \frac{1}{C_3} \int \left(-\frac{v_2}{R_3} \right) dt \quad (28)$$

Por lo tanto, partiendo de las ecuaciones (28), (27) y (26), si $C_1 = \frac{10a}{3} C_3$ y $C_2 = \frac{30}{a} C_3$, el circuito electrónico de la figura 4 es modelado por

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{R_3 C_3} (-v_2) \\ \frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{R_2 C_3} \left(\frac{av_3}{30} - \frac{a}{10} v_2 \right) \\ \frac{dv_3}{dt} = \frac{1}{R_1 C_3} \frac{3}{10a} \left(-v_2 - R_1 i_\eta(v_1) \right) \end{cases} \quad (29)$$

El modelo (29) es equivalente al sistema caótico de Sprott adimensional (25), bajo las condiciones y mapeos del tiempo, estados y parámetros dados por $\tau = \frac{1}{10R_3 C_3} t$, $\frac{v_1}{10x_1} = \frac{-v_2}{x_2} = \frac{av_2 - av_3/3}{x_3} = M$, $\frac{R_1 i_\eta(v_1)}{M} = \eta(x_1)$, $R_1 = R_2 = R_3$, $C_1 = \frac{10a}{3} C_3$, $C_2 = \frac{30}{a} C_3$. En esta familia de circuitos, $i_\eta(v_1)$ puede construirse por una gran variedad de funciones, entre ellas las generadas por los cuatro circuitos de la figura 5.

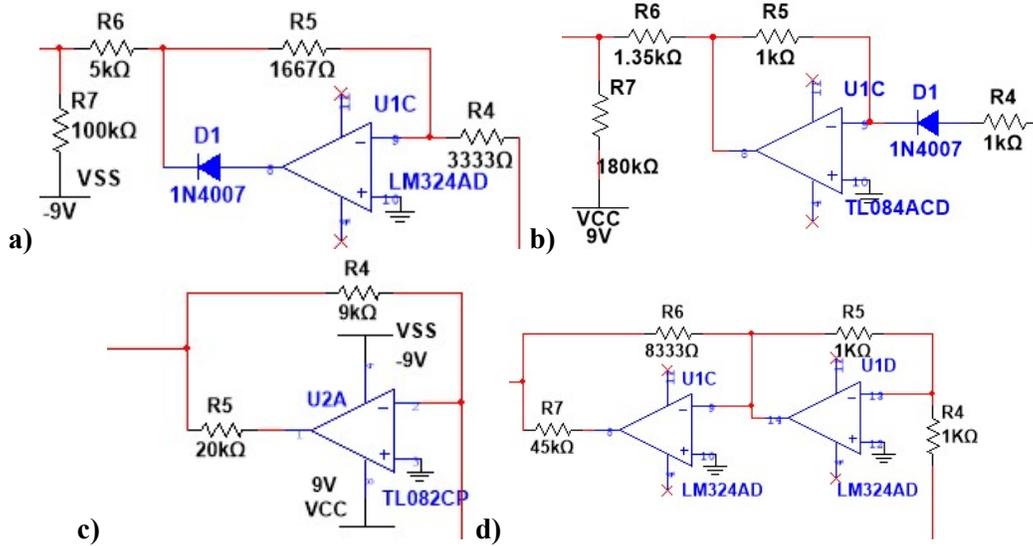


Fig. 5. Circuitos para diferentes funciones de corriente $i_\eta(v_1)$, equivalentes a: **a)** $\eta(x_1) = b|x_1| - c$, **b)** $\eta(x_1) = -b\max(x_1, 0) + c$, **c)** $\eta(x_1) = bx_1 - c\text{signo}(x_1)$, **d)** $\eta(x_1) = -bx_1 + c\text{signo}(x_1)$.

En el circuito de la figura 5.a, se obtiene $i_\eta(v_1)$ de la suma de corrientes de la fuente y del op-amp U1C, en el nodo que está conectado a la terminal de entrada inversora del op-amp U1A, cuyo voltaje es cero:

$$i_\eta(v_1) = \frac{V_{SS}}{R_7} + i_{1C}$$

Para calcular la corriente i_{1C} que pasa por la resistencia R_6 , debe considerarse que si $v_1 > 0$, el voltaje de salida del op-amp U1C es $V_{1C} < 0$, el diodo estará polarizado inversamente y el op-amp U1C estará aislado del circuito. Así, la corriente i_{1C} fluye a través de las 3 resistencias en serie:

$$i_{1C} = \frac{v_1}{R_4 + R_5 + R_6}$$

Por lo que,

$$i_{\eta}(v_1) = \frac{1}{R_4 + R_5 + R_6} v_1 + \frac{V_{SS}}{R_7} = \frac{1}{R_4 + R_5 + R_6} \text{signo}(v_1)|v_1| + \frac{V_{SS}}{R_7} = \frac{1}{R_4 + R_5 + R_6} |v_1| + \frac{V_{SS}}{R_7}$$

Cuando $v_1 < 0$, el voltaje de salida del op-amp U1C es $V_{1C} > 0$, el diodo se polariza directamente, haciendo que

$$V_{1C} = -\frac{R_5}{R_4} v_1$$

La corriente resulta en

$$i_{1C} = \frac{V_{1C}}{R_6} = -\frac{R_5}{R_6 R_4} v_1$$

Por lo que,

$$i_{\eta}(v_1) = -\frac{R_5}{R_6 R_4} v_1 + \frac{V_{SS}}{R_7} = -\frac{R_5}{R_6 R_4} \text{signo}(v_1)|v_1| + \frac{V_{SS}}{R_7} = \frac{R_5}{R_6 R_4} |v_1| + \frac{V_{SS}}{R_7} \quad (30)$$

Si se elige $R_4 = \frac{10R_1}{3b}$, $R_5 = \frac{10R_1}{6b}$, $R_6 = \frac{10R_1}{2b}$ y $V_{SS} = -\frac{Mc}{R_1}$, donde b y c son constantes, entonces $\frac{1}{R_4 + R_5 + R_6} =$

$$\frac{R_5}{R_6 R_4} = \frac{b}{10R_1}$$

$$i_{\eta}(v_1) = \frac{b}{10R_1} |v_1| - \frac{Mc}{R_1}$$

que equivale a

$$\eta(x_1) = \frac{R_1 i_{\eta}(v_1)}{M} = b|x_1| - c \quad (31)$$

Para el circuito de la figura 5.b, utilizando el mismo principio, se obtiene la corriente:

$$i_{\eta}(v_1) = \frac{V_{CC}}{R_7} + i_{1C}$$

Cuando $v_1 \leq 0$, la corriente proveniente del op-amp U1C será $i_{1C} = 0$ puesto que el diodo estará polarizado inversamente, no conduce y el voltaje de salida del op-amp es $V_{1C} = 0$. Si $v_1 > 0$, entonces

$$V_{1C} = -\frac{R_5}{R_4} v_1$$

La corriente resulta en

$$i_{1C} = \frac{V_{1C}}{R_6} = -\frac{R_5}{R_6 R_4} v_1$$

Por lo que,

$$i_{\eta}(v_1) = -\frac{R_5}{R_6 R_4} v_1 + \frac{V_{CC}}{R_7} \quad (32)$$

Si se elige $R_4 = R_5$, $R_6 = \frac{10R_1}{b}$ y $R_7 = \frac{V_{CC}}{Mc} R_1$, donde b y c son constantes, entonces $\forall v_1$:

$$i_{\eta}(v_1) = -\frac{b}{10R_1} \max(v_1, 0) + \frac{Mc}{R_1}$$

que equivale a

$$\eta(x_1) = \frac{R_1 i_{\eta}(v_1)}{M} = -b \max(x_1, 0) + c \quad (33)$$

Para el circuito de la figura 5.c, se obtiene $i_{\eta}(v_1)$ de la suma de corrientes de las dos ramas, esto es:

$$i_{\eta}(v_1) = \frac{v_1}{R_4} + i_{1C}$$

donde la corriente i_{1C} depende del voltaje de salida del op-amp U2A como comparador. En esta configuración, la salida será $V_{1C} = V_{CC}$ si $v_1 < 0$, $V_{1C} = -V_{SS}$ si $v_1 > 0$ y $V_{1C} = 0$ si $v_1 = 0$. Si $|V_{CC}| = |V_{SS}|$, el voltaje de salida del op-amp U2A puede describirse como $V_{1C} = -V_{CC} \text{signo}(v_1)$. Por lo tanto,

$$i_{1C} = -\frac{V_{CC} \text{signo}(v_1)}{R_5}$$

Por lo que,

$$i_{\eta}(v_1) = \frac{v_1}{R_4} - \frac{V_{CC} \text{signo}(v_1)}{R_5} \quad (34)$$

Si se elige $R_4 = \frac{10R_1}{b}$ y $R_5 = \frac{V_{CC}}{Mc} R_1$, donde b y c son constantes, entonces

$$i_{\eta}(v_1) = \frac{b}{10R_1} v_1 - \frac{Mc}{R_1} \text{signo}(v_1)$$

que equivale a

$$\eta(x_1) = \frac{R_1 i_{\eta}(v_1)}{M} = bx_1 - c \text{signo}(x_1) \quad (35)$$

El circuito de la figura 5.d, se analiza igual que el c), pero se añade un op-amp UID inversor con ganancia unitaria si $R_4 = R_5$. Si se elige $R_6 = \frac{10R_1}{b}$ y $R_7 = \frac{V_{CC}}{Mc} R_1$, donde b y c son constantes, se deduce fácilmente que

$$i_{\eta}(v_1) = -\frac{b}{10R_1} v_1 + \frac{Mc}{R_1} \text{signo}(v_1) \quad (36)$$

que equivale a

$$\eta(x_1) = \frac{R_1 i_{\eta}(v_1)}{M} = -bx_1 + c \text{signo}(x_1) \quad (37)$$

DISEÑO DE EXPERIMENTOS

Con el fin de verificar que el comportamiento de las realizaciones electrónicas sea congruente con el comportamiento típico de los sistemas caóticos con términos lineales por tramos Rössler afín, Chua y Sprott, los circuitos analógicos de las figuras 1 a 5 son implementados en el software de circuitos Multisim y su respuesta se compara con la de los modelos adimensionales en simulaciones numéricas en el software Scilab.

Para la instrumentación electrónica del circuito analógico afín a Rössler de la figura 1 se utilizaron op-amp LM324 y LM741, se consideraron parámetros $R_1 = R_5 = R_9 = R_{11} = 100 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 2 \text{ M}\Omega$, $R_3 = 200 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 5 \text{ M}\Omega$, $R_6 = R_7 = R_{12} = 10 \text{ k}\Omega$, $R_8 = 40 \text{ k}\Omega$, $R_{10} = 150 \text{ k}\Omega$, $R_{13} = 220 \text{ k}\Omega$, $C_1 = C_2 = C_3 = 1 \text{ nF}$, $V_D = 0.7 \text{ V}$, $V_{CC} = 9 \text{ V}$, $V_{DD} = -9 \text{ V}$, $V_{DC} = -15 \text{ V}$; que corresponden a los valores $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.5$, $\lambda = 1$, $\gamma = 0.23$, $\mu = 15$ del modelo adimensional (1)-(2), con $M=0.4712$ y $\tau = 10,000t$.

Para la instrumentación electrónica del circuito analógico de Chua de las figuras 2 y 3 se usaron op-amps TL082 y se consideraron los parámetros $L_1 = 18 \text{ mH}$, $C_1 = 10 \text{ nF}$, $C_2 = 100 \text{ nF}$, $R_o = 8.2 \Omega$, $R_1 = 1.8 \text{ k}\Omega$, $R_2 = R_3 = 220 \Omega$, $R_4 = 2.2 \text{ k}\Omega$, $R_5 = R_6 = 22 \text{ k}\Omega$, $R_7 = 3.3 \text{ k}\Omega$, $V_{CC} = 12 \text{ V} \approx V_{sat1} \approx V_{sat2}$, $V_{B1} = 10.9091 \text{ V}$, $V_{B2} = a = -1.3636$, $b = -0.7364$, $\alpha = 10$, $\beta = 18$ y $\gamma = 0.082$ del modelo adimensional (11)-(12), con $M = 1.5652$ y $\tau = 5,555.55t$.

Para la instrumentación electrónica de los circuitos de Sprott de las figuras 4 y 5 se utilizaron op-amps LM324, con excepción de los circuitos de las figuras 5.b y 5.c, donde se usaron op-amps TL084 y TL082, respectivamente. Se consideraron los parámetros $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 0.02 \mu\text{F}$, $C_2 = 0.5 \mu\text{F}$, $C_3 = 0.01 \mu\text{F}$; que corresponden al valor $a = 0.6$ del modelo adimensional (25) con $M=0.1$ y $\tau = 10,000t$.

Para el circuito de la figura 5.a: $V_{SS} = -9\text{V}$, $R_4 = 3.333 \text{ k}\Omega$, $R_5 = 1.667 \text{ k}\Omega$, $R_6 = 5 \text{ k}\Omega$ y $R_7 = 100 \text{ k}\Omega$, que corresponden a los valores $b = 1$ y $c = 0.9$ de la función adimensional $\eta(x_1) = b|x_1| - c$. Para el circuito de la figura 5.b: $V_{CC} = 9\text{V}$, $R_4 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_5 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_6 = 1.35 \text{ k}\Omega$ y $R_7 = 180 \text{ k}\Omega$, que corresponden a los valores $b = 7.4$ y $c = 0.5$ de la función adimensional $\eta(x_1) = -b \max(x_1, 0) + c$. Para el circuito de la figura 5.c: $V_{CC} = 9\text{V}$,

$V_{SS} = -9V$, $R_4 = 9 k\Omega$ y $R_5 = 20 k\Omega$, que corresponden a los valores $b = 1.11$ y $c = 4.5$ de la función adimensional $\eta(x_1) = bx_1 - c\text{signo}(x_1)$. Para el circuito de la figura 5.d: $V_{CC} = 9V$, $V_{SS} = -9V$, $R_4 = R_5 = 1 k\Omega$, $R_6 = 8.333 k\Omega$ y $R_7 = 45 k\Omega$, que corresponden a los valores $b = 1.2$ y $c = 2$ de la función adimensional $\eta(x_1) = -bx_1 + c\text{signo}(x_1)$.

RESULTADOS DE SIMULACIONES Y DE IMPLEMENTACIÓN

A continuación, se muestran y comparan los resultados obtenidos de las implementaciones de los circuitos y simulaciones de los modelos adimensionales. Los datos numéricos obtenidos se muestran gráficamente en forma de proyecciones de los atractores caóticos en los planos de fase.

Sistema afín a Rössler

En la figura 6, se muestran los voltajes del circuito analógico de la figura 1 en proyecciones planares de su atractor caótico con Multisim. En la figura 7, se muestra el atractor del modelo (9)-(10), obtenido para ese circuito. En la figura 8, se muestra el atractor del modelo (9)-(10) mapeado a la escala equivalente del sistema adimensional (1)-(2). En la figura 9, se muestra el atractor del sistema adimensional (1)-(2) mediante Scilab.

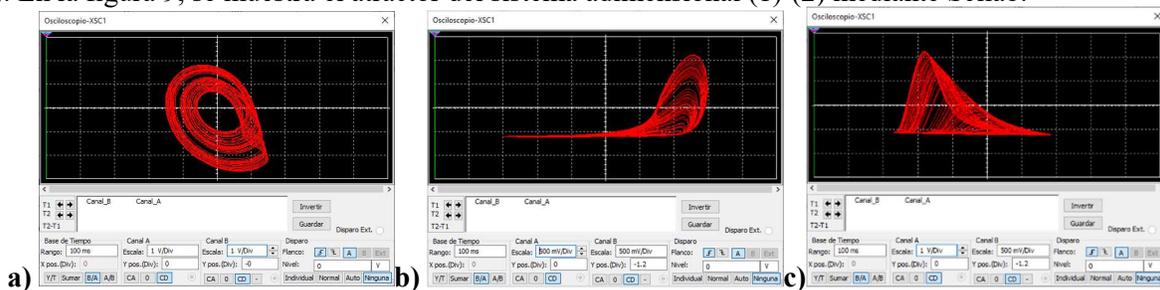


Fig. 6. Atractor afín a Rössler del circuito de la figura 1, en planos v_1-v_2 (a), v_1-v_3 (b) y v_2-v_3 (c).

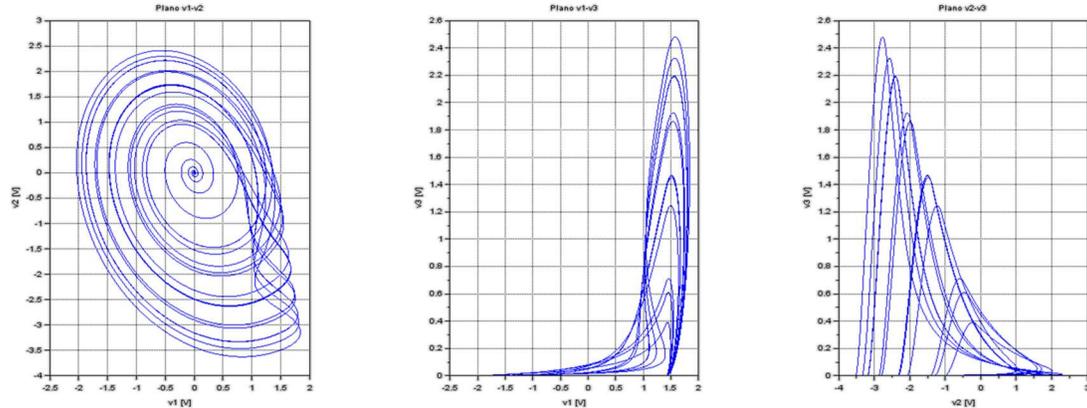


Fig. 7. Atractor afín a Rössler del modelo (9)-(10) del circuito, en planos v_1-v_2 , v_1-v_3 y v_2-v_3 .

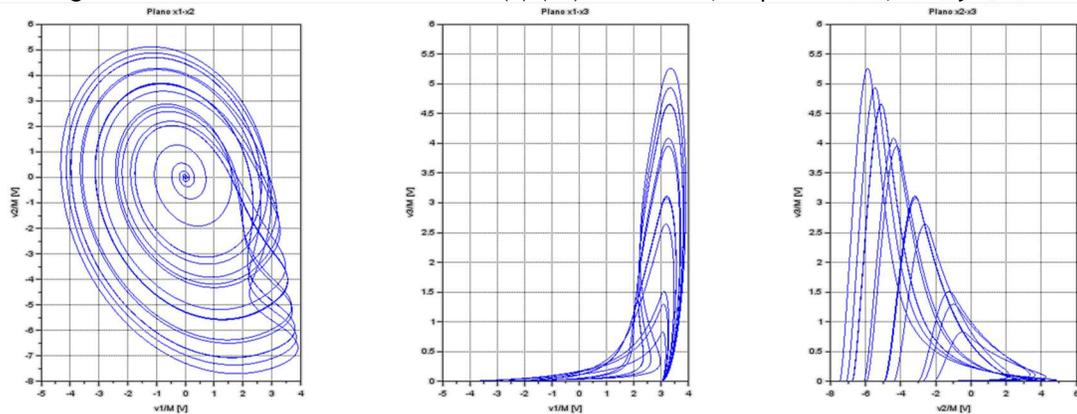


Fig. 8. Atractor afín a Rössler del modelo (9)-(10) mapeado a escala x_1, x_2, x_3 , en planos x_1-x_2 , x_1-x_3 y x_2-x_3 .

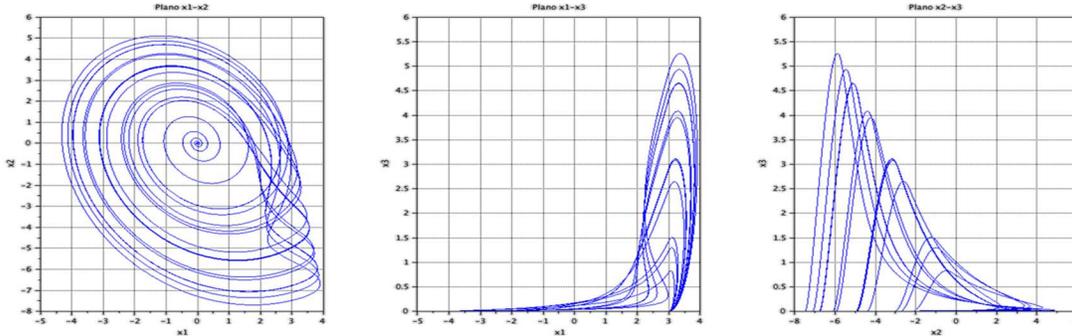


Fig. 9. Atractor afín a Rössler del modelo adimensional (1)-(2), en planos x_1 - x_2 , x_1 - x_3 y x_2 - x_3 .

Sistema de Chua

En la figura 10, se muestran los voltajes del circuito de las figuras 2 y 3 en proyecciones planares de su atractor con Multisim. En la figura 11, se muestra el atractor del modelo (24)-(23), obtenido para ese circuito. En la figura 12, se muestra el atractor del modelo (24)-(23) mapeado a la escala equivalente del sistema adimensional (11)-(12). En la figura 13, se muestra el atractor del sistema adimensional (11)-(12) mediante Scilab.

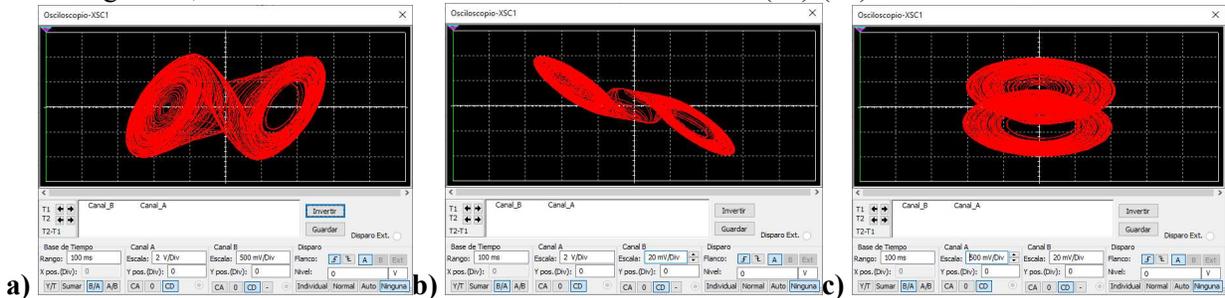


Fig. 10. Atractor de Chua del circuito de las figuras 2 y 3, en planos v_1 - v_2 (a), v_1 - $R0i_3$ (b) y v_2 - $R0i_3$ (c).

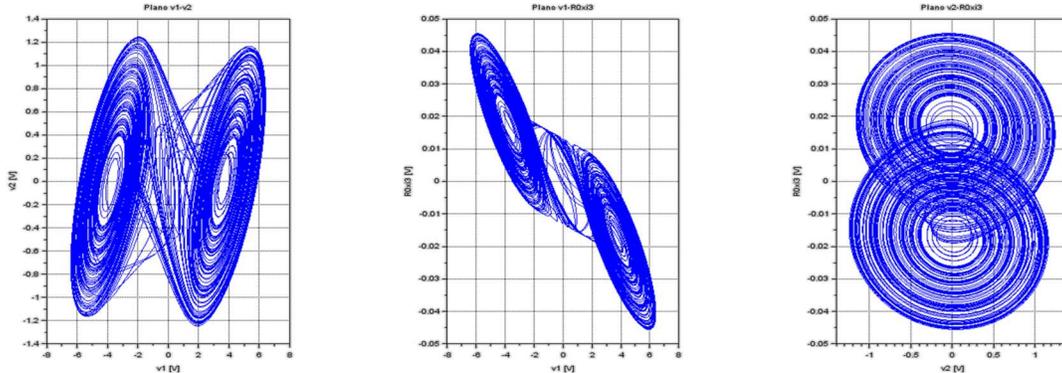


Fig. 11. Atractor de Chua del modelo (24)-(23) del circuito, en planos v_1 - v_2 , v_1 - $R0i_3$ y v_2 - $R0i_3$.

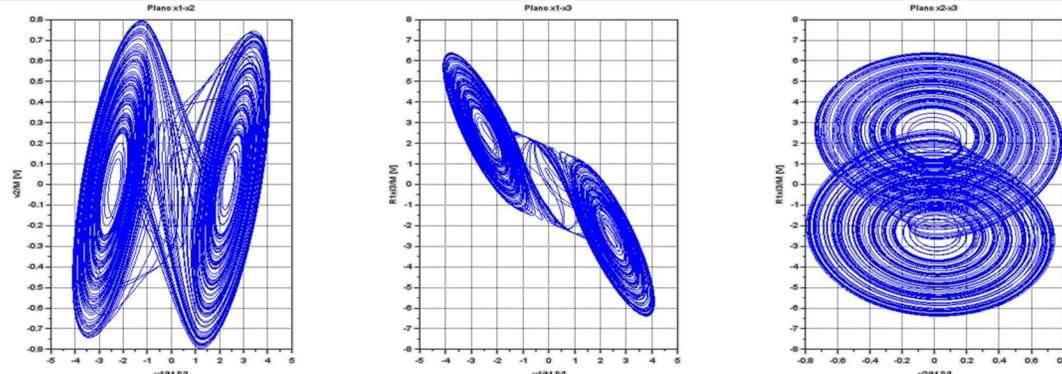


Fig. 12. Atractor de Chua del modelo (24)-(23) mapeado a escala x_1, x_2, x_3 , en planos x_1 - x_2 , x_1 - x_3 y x_2 - x_3 .

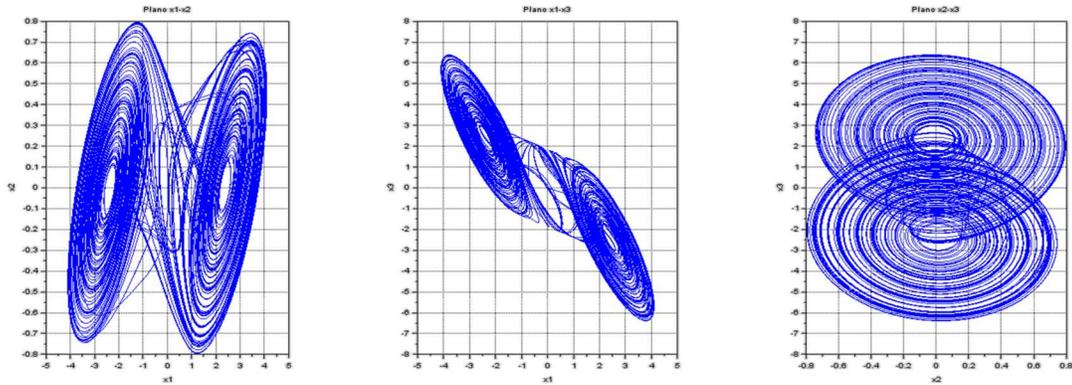


Fig. 13. Atractor de Chua del modelo adimensional (11)-(12), en planos x_1 - x_2 , x_1 - x_3 y x_2 - x_3 .

Sistemas Sprott

En la figura 14, se muestran los voltajes del circuito analógico de las figuras 4 y 5.a en proyecciones planares de su atractor con Multisim. En la figura 15, se muestra el atractor del modelo (29) y (30), obtenido para ese circuito. En la figura 16, se muestra el atractor del modelo (29) y (30) mapeado a la escala equivalente del sistema (25) y (31). En la figura 17, se muestra el atractor del sistema adimensional (25) y (31) mediante Scilab.

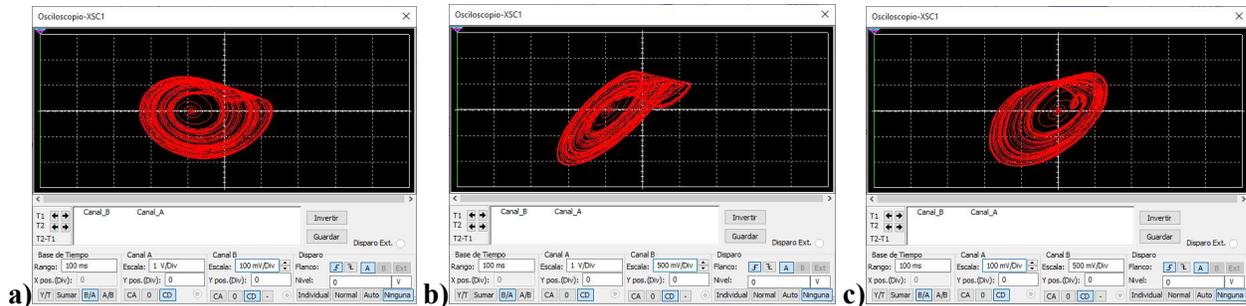


Fig. 14. Atractor de Sprott del circuito de las figuras 4 y 5.a, en planos v_1 - v_2 (a), v_1 - v_3 (b) y v_2 - v_3 (c).

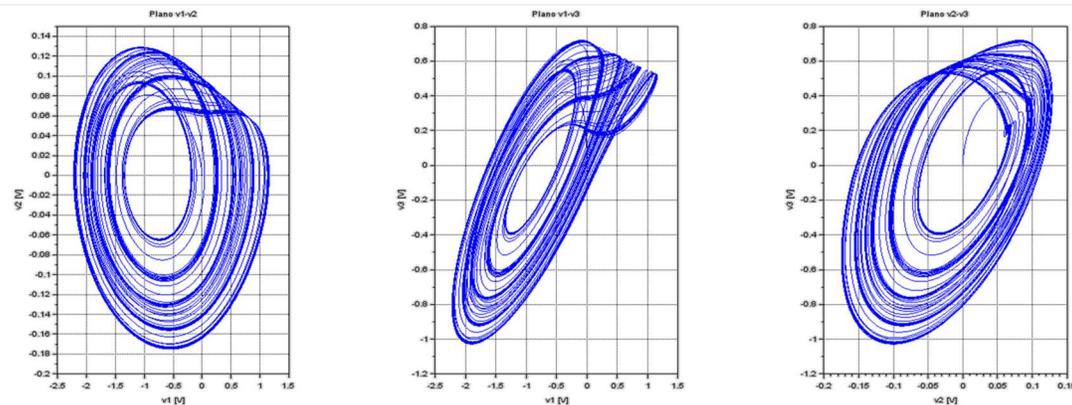


Fig. 15. Atractor de Sprott del modelo (29) con (30) del circuito, en planos v_1 - v_2 , v_1 - v_3 y v_2 - v_3 .

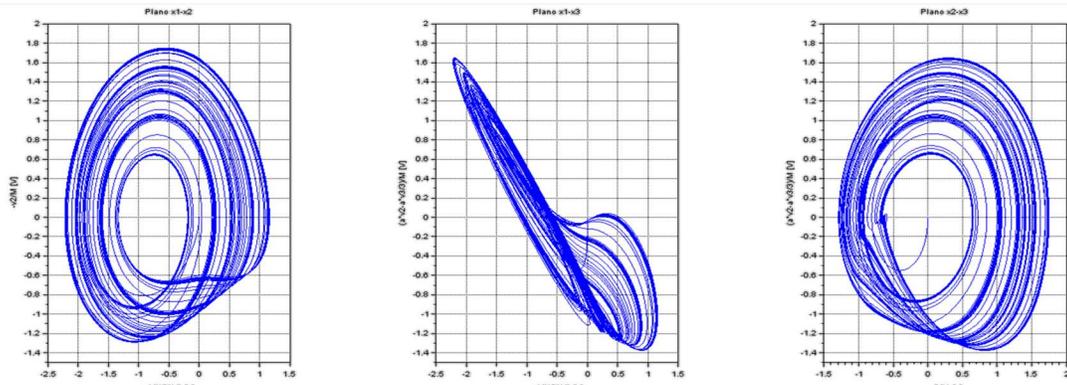


Fig. 16. Atractor de Sprott del modelo (29) con (30) mapeado a escala x_1, x_2, x_3 , en planos x_1 - x_2 , x_1 - x_3 y x_2 - x_3 .

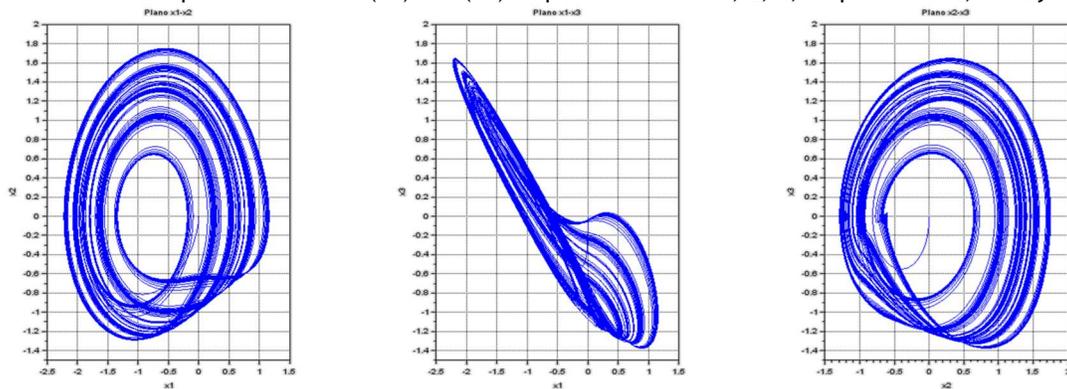


Fig. 17. Atractor de Sprott del modelo adimensional (25) con (31), en planos x_1 - x_2 , x_1 - x_3 y x_2 - x_3 .

En la figura 18, se muestran los voltajes del circuito analógico de las figuras 4 y 5.b en proyecciones planares de su atractor con Multisim. En la figura 19, se muestra el atractor del modelo (29) y (32), obtenido para ese circuito. En la figura 20, se muestra el atractor del modelo (29) y (32) mapeado a la escala equivalente del sistema (25) y (33). En la figura 21, se muestra el atractor del sistema adimensional (25) y (33) mediante Scilab.

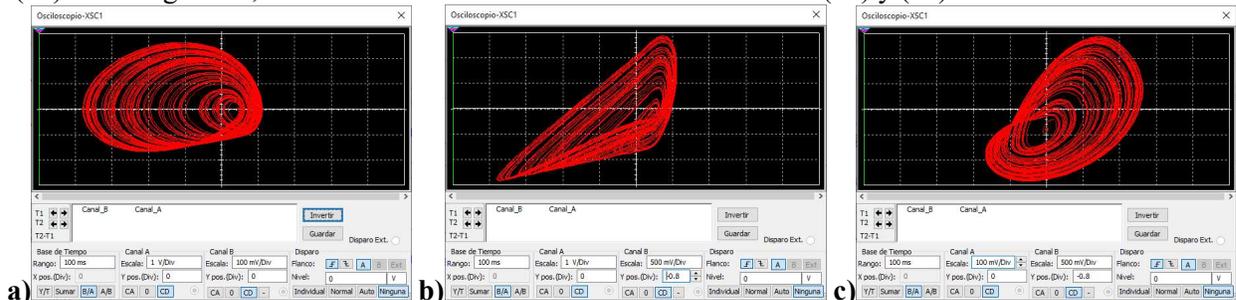


Fig. 18. Atractor de Sprott del circuito de las figuras 4 y 5.b, en planos v_1 - v_2 (a), v_1 - v_3 (b) y v_2 - v_3 (c).

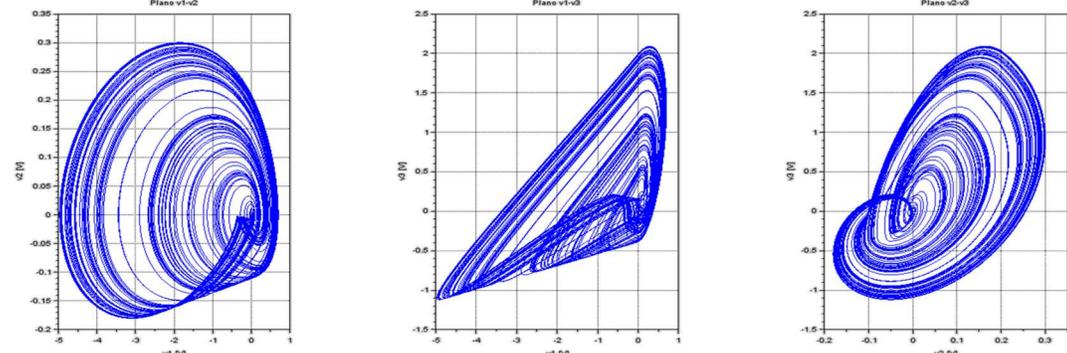


Fig. 19. Atractor de Sprott del modelo (29) con (32) del circuito, en planos v_1 - v_2 , v_1 - v_3 y v_2 - v_3 .

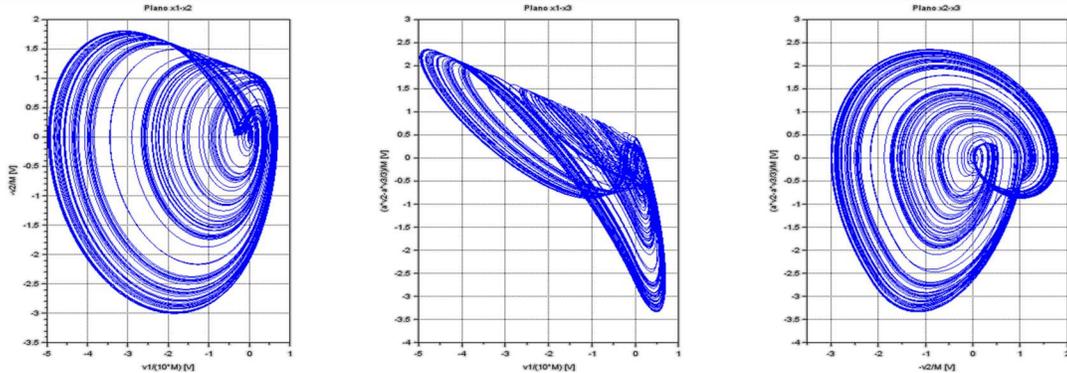


Fig. 20. Atractor de Sprott del modelo (29) con (32) mapeado a escala x_1, x_2, x_3 , en planos x_1-x_2 , x_1-x_3 y x_2-x_3 .

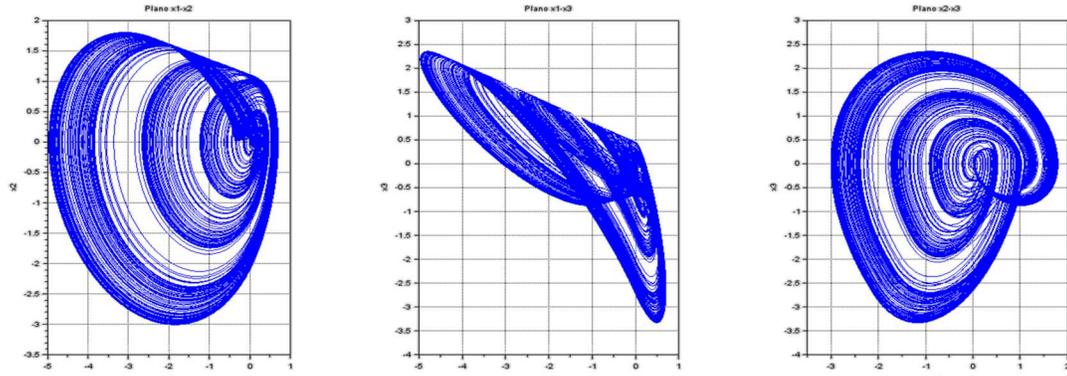


Fig. 21. Atractor de Sprott del modelo adimensional (25) con (33), en planos x_1-x_2 , x_1-x_3 y x_2-x_3 .

En la figura 22, se muestran los voltajes del circuito analógico de las figuras 4 y 5.c en proyecciones planares de su atractor con Multisim. En la figura 23, se muestra el atractor del modelo (29) y (34), obtenido para ese circuito. En la figura 24, se muestra el atractor del modelo (29) y (34) mapeado a la escala equivalente del sistema (25) y (35). En la figura 25, se muestra el atractor del sistema adimensional (25) y (35) mediante Scilab.

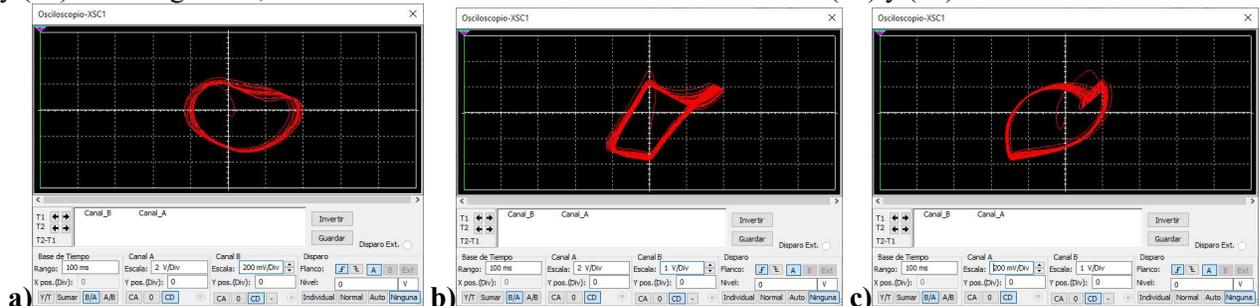


Fig. 22. Atractor de Sprott del circuito de las figuras 4 y 5.c, en planos v_1-v_2 (a), v_1-v_3 (b) y v_2-v_3 (c).

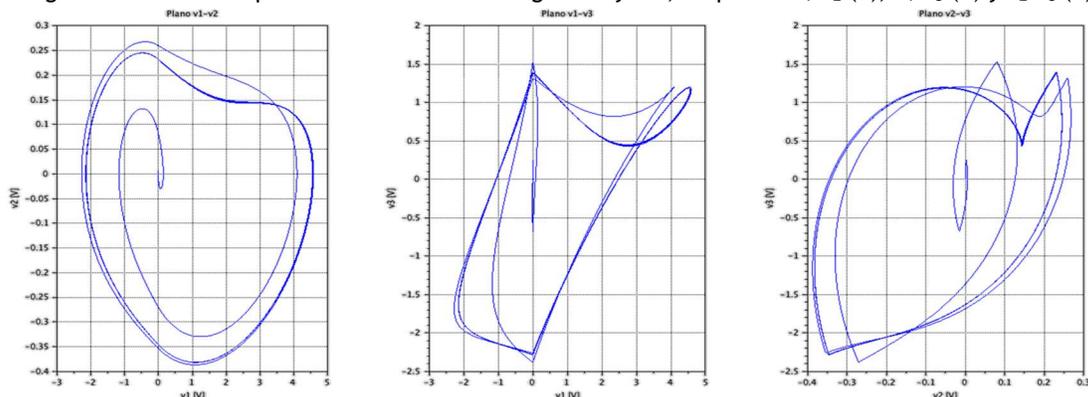


Fig. 23. Atractor de Sprott del modelo (29) con (34) del circuito, en planos v_1-v_2 , v_1-v_3 y v_2-v_3 .

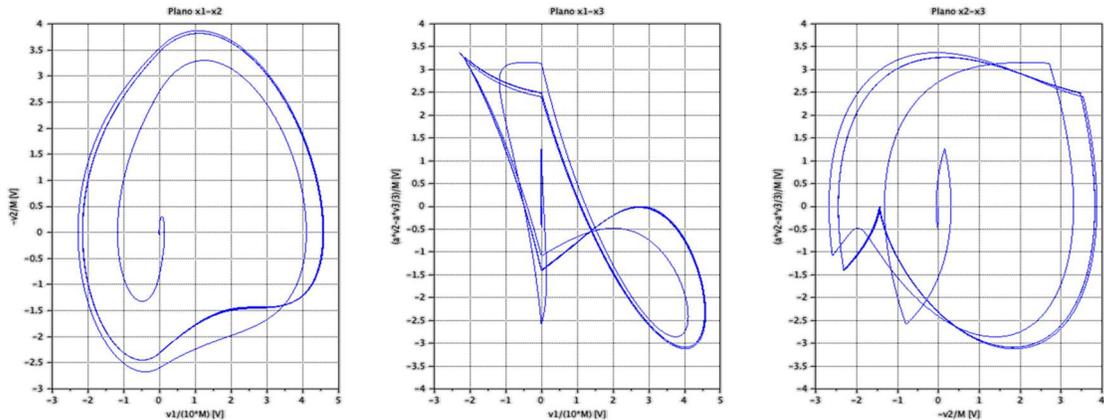


Fig. 24. Atractor de Sprott del modelo (29) con (34) mapeado a escala x_1, x_2, x_3 , en planos x_1-x_2 , x_1-x_3 y x_2-x_3 .

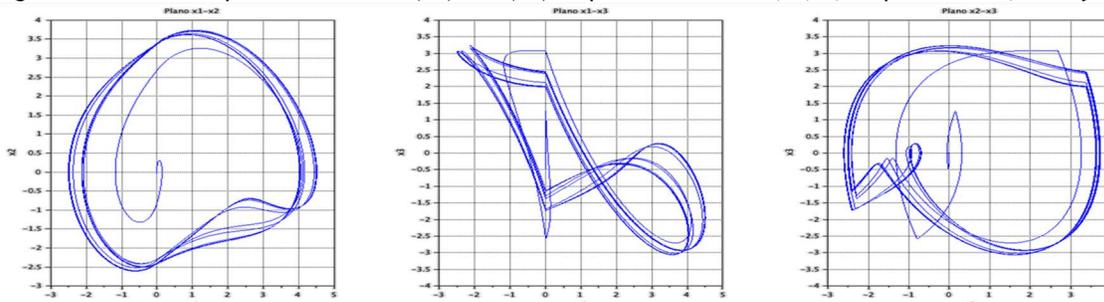


Fig. 25. Atractor de Sprott del modelo adimensional (25) con (35), en planos x_1-x_2 , x_1-x_3 y x_2-x_3 .

En la figura 26, se muestran los voltajes del circuito analógico de las figuras 4 y 5.d en proyecciones planares de su atractor con Multisim. En la figura 27, se muestra el atractor del modelo (29) y (36), obtenido para ese circuito. En la figura 28, se muestra el atractor del modelo (29) y (36) mapeado a la escala equivalente del sistema (25) y (37). En la figura 29, se muestra el atractor del sistema adimensional (25) y (37) mediante Scilab.

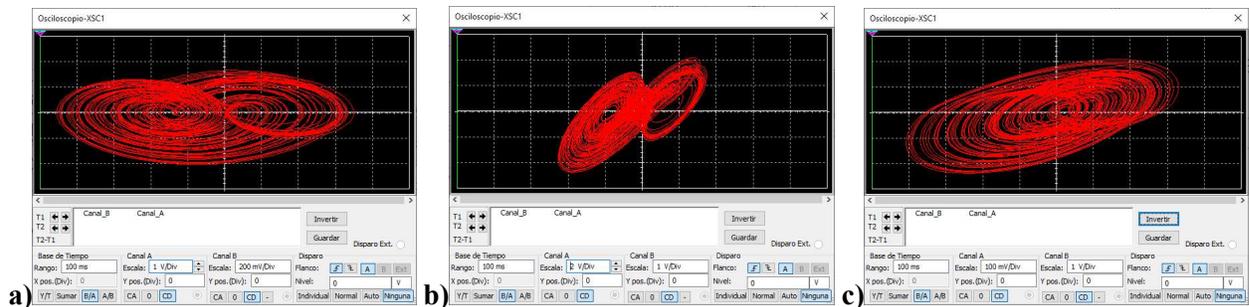


Fig. 26. Atractor de Sprott del circuito de las figuras 4 y 5.d, en planos v_1-v_2 (a), v_1-v_3 (b) y v_2-v_3 (c).

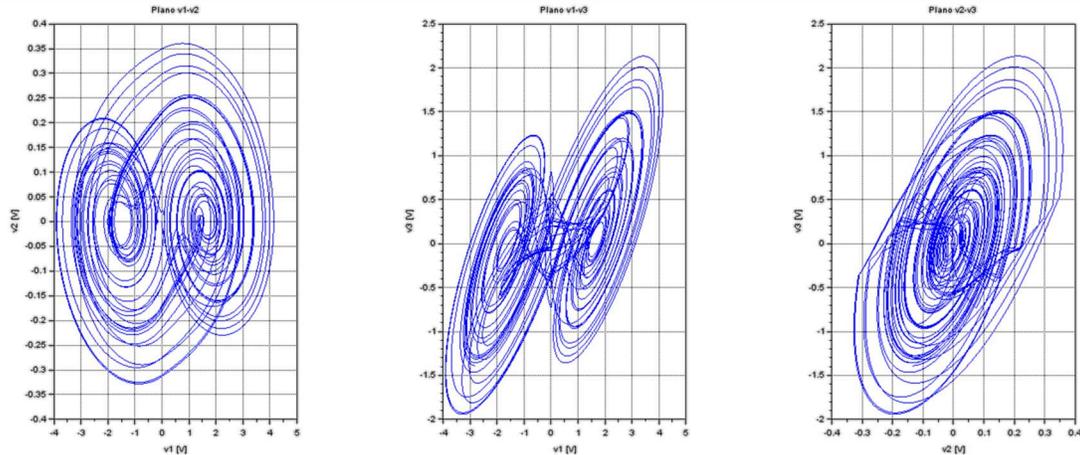


Fig. 27. Atractor de Sprott del modelo (29) con (36) del circuito, en planos v_1-v_2 , v_1-v_3 y v_2-v_3 .

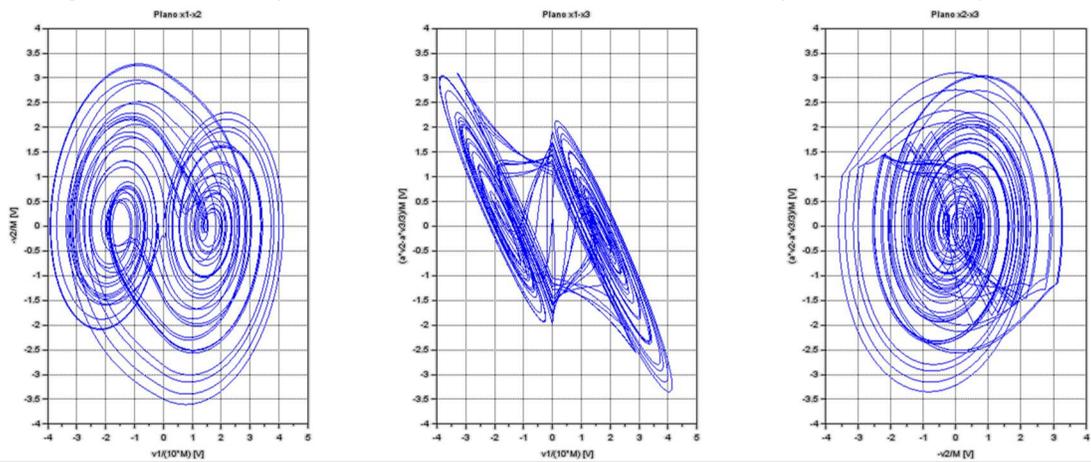


Fig. 28. Atractor de Sprott del modelo (29) con (36) mapeado a escala x_1, x_2, x_3 , en planos x_1-x_2 , x_1-x_3 y x_2-x_3 .

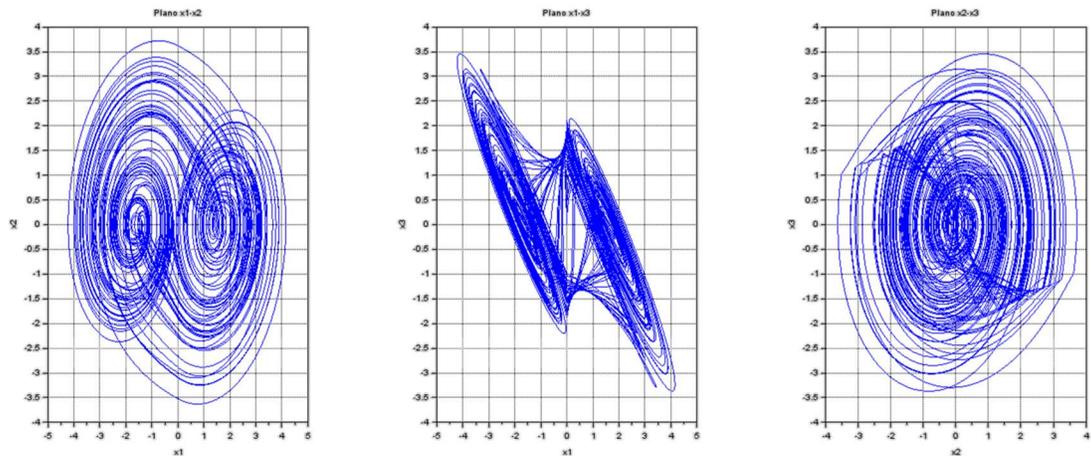


Fig. 29. Atractor de Sprott del modelo adimensional (25) con (37), en planos x_1-x_2 , x_1-x_3 y x_2-x_3 .

Discusión de resultados

Como puede verse en las figuras 6, 10, 14, 18, 22 y 26, los voltajes mostrados en osciloscopio del software Multisim reproducen los atractores caóticos respectivos, en rangos de operación admisibles. Con las figuras 7, 11, 15, 19, 23 y 27, se valida la respuesta de los modelos obtenidos para los circuitos electrónicos respectivos (véase la forma y amplitud de cada atractor). En las figuras 8, 12, 16, 20, 24 y 28, se puede apreciar que los atractores escalados de los modelos matemáticos obtenidos para cada circuito electrónico, mediante los mapeos calculados,

presentan características de forma y amplitud congruentes con los atractores caóticos típicos de los modelos matemáticos adimensionales de las figuras 9, 13, 17, 21, 25 y 29, respectivamente. Por lo que puede concluirse que son válidas tanto las realizaciones electrónicas presentadas, los modelos matemáticos obtenidos (9)-(10), (24)-(23) y (29) con (30), (32), (34) y (36), así como los mapeos y equivalencias de parámetros y variables calculados para cada sistema caótico.

CONCLUSIONES

En esta segunda parte, se mostró la realización y modelado de algunos sistemas caóticos lineales por tramos, utilizando diodos y op-amp. Particularmente, se explica con detalle la equivalencia y modelado de uno de los circuitos más conocidos, el sistema de Chua. El modelado y análisis realizados permite seleccionar con mayor libertad los componentes electrónicos de los circuitos para que su comportamiento sea consistente con el de los modelos matemáticos caóticos adimensionales establecidos, lo cual no se encuentra en muchos de los trabajos en la literatura. Esto se observa en las señales de osciloscopio del software de simulación electrónica Multisim, que muestran una reproducción de los atractores caóticos con características congruentes con los de simulaciones de los modelos matemáticos en el software Scilab. Particularmente, con los modelos y equivalencias obtenidos fue posible ajustar los valores de componentes para acotar las señales de voltaje y corrientes en rangos de operación posibles, debido a las limitaciones propias en circuitos electrónicos. En la siguiente parte de este trabajo, se mostrará la implementación de sistemas caóticos en dispositivos digitales.

REFERENCIAS

1. Matsumoto, T. A Chaotic Attractor from Chua's Circuit. *IEEE Trans. Circuits Syst.* (1984) 31(12): 1055-1058.
2. Kennedy, M.P. Robust Op Amp Realization of Chua's Circuit. *Frequenz.* (1992) 46(3): 66-80.
3. Conde S., G. and Ramírez A, G.M. Estudio de dos circuitos caóticos. *Revista Boliviana de Física.* (2007) 13: 58-74.
4. Pisarchik, A. N. and Jaimes-Reátegui, R. Homoclinic Orbits in a piecewise linear Rössler-like circuit. *Journal of Physics: Conference Series.* (2005) 23: 014.
5. Canals, V., Morro, A., and Rossello, J. L. Random number generation based on the Rossler attractor. *IEICE Proceeding Series.* (2014) 1: 272-275.
6. Sprott, J.C. A new class of chaotic circuit. *Physics Letters A*, 2000; 266: 19-23.
7. Hambley, A.R., *Electronics*, (2000) Upper Saddle River, N.J., Prentice Hall.
8. Zanin M, Sevilla-Escoboza JR, Jaimes-Reátegui R, García-López JH, Huerta-Cuellar G, Pisarchik AN. Synchronization attack to chaotic communication systems. *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity.* (2013) 1: 333-343.