

# Respuesta en frecuencia para sistemas en espacio de estados

Efraín Alcorta García, David Alejandro Díaz Romero, Rodolfo Castillo Martínez, Luis Humberto Rodríguez Alfaro

Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, México.  
efrain.alcortagr@uanl.edu.mx, david.diazrr@uanl.edu.mx, rodolfo.castillomr@uanl.edu.mx,  
luis.rodriguezlf@uanl.edu.mx

## RESUMEN

*La respuesta en frecuencia de sistemas lineales es una popular herramienta utilizada en el análisis y diseño de sistemas de control automático. La forma común de obtener la respuesta en frecuencia es a partir de la representación entrada-salida (función de transferencia) de un sistema. En este trabajo se presenta una manera novedosa para obtener la respuesta en frecuencia partiendo de la representación en el espacio de estados. El resultado es obtenido mediante la caracterización de la señal de entrada (función senoidal) mediante un sistema externo adicional, así como la evaluación del estado estacionario. La determinación de la fase y magnitud se obtiene de la solución a una ecuación de Sylvester reiteradamente para diferentes valores de la frecuencia en un intervalo específico junto con algunas manipulaciones algebraicas y uso de identidades trigonométricas. El procedimiento es mostrado mediante ejemplos y comparado con las maneras clásicas de obtener la respuesta en frecuencia.*

## PALABRAS CLAVE

Respuesta en frecuencia, espacio de estados, sistema lineal, ecuación de Sylvester.

## ABSTRACT

*The frequency response of linear systems is a popular tool used in the analysis and design of automatic control systems. The common way to obtain the frequency response is from the input-output representation (transfer function) of a system. In this paper we present a novel way to obtain the frequency response from the state space representation. The result is obtained by characterizing the input signal (sine function) by means of an additional external system, as well as the evaluation of the steady state. The determination of phase and magnitude is obtained from the solution to a Sylvester equation repeatedly for different values of the frequency in a specific interval together with some algebraic manipulations and use of trigonometric identities. The procedure is shown by examples and compared with classical ways of obtaining the frequency response.*

## KEYWORDS

Frequency response, state space, linear system, Sylvester equation.

## INTRODUCCIÓN

Una de las herramientas más importantes para el análisis y diseño de sistemas de control en los últimos 80 años es el diagrama de Bode, el cual está basado en la respuesta en frecuencia de sistemas lineales ver<sup>1</sup> y <sup>2</sup>. Siguiendo estos trabajos de Bode la obtención de la respuesta en frecuencia es lograda con base en la representación entrada-salida y este es también la forma más común de calcularla.<sup>3</sup> Otro camino para llegar a la respuesta en frecuencia es de manera práctica a través de experimentos.<sup>4</sup>

Un grupo de investigación alrededor del prof. H. Nijmeijer desarrolló un procedimiento que permite obtener la respuesta en frecuencia de sistemas convergentes (no lineales).<sup>5</sup> Es claro que, debido a la naturaleza no lineal de los sistemas estudiados, se hace necesario partir de la representación de estados no lineal. Alternativamente en <sup>6</sup> se analiza la respuesta armónica en estado estacionario de un sistema lineal e invariante en el tiempo.

En este trabajo, inspirados por las ideas de<sup>5</sup> y el desarrollo de,<sup>6</sup> se propone un procedimiento aplicable a sistemas lineales e invariantes en el tiempo, con el cual se puede determinar la respuesta en frecuencia de un sistema representado en espacio de estados sin necesidad de utilizar la representación entrada-salida (también conocida como matriz de transferencia). La obtención del algoritmo propuesto en este trabajo sigue los principios esenciales utilizados por Bode.<sup>1,2</sup> Es decir, la caracterización de la entrada sinusoidal, así como el hecho de alcanzar el estado

estacionario. La solución propuesta puede obtenerse siguiendo pasos matemáticamente fundamentados y desde el punto de vista de programación con una visión práctica y potencialmente útil para diseño en el espacio de estados. Este trabajo pretende reunir y hacer accesibles una serie de resultados disponibles en la literatura especializada,<sup>5,6</sup> pero aplicados a sistemas lineales.

En lo que sigue se discute brevemente el concepto de respuesta en frecuencia, así como la caracterización de una señal senoidal como salida de un sistema lineal sin entrada (oscilador armónico). Después se discute el procedimiento propuesto deducido paso a paso y concluyendo con un algoritmo para la obtención de la respuesta en frecuencia. Un ejemplo sirve para mostrar la eficacia del procedimiento propuesto. El trabajo es completado con las conclusiones.

## PRELIMINARES

### Respuesta en frecuencia de sistemas lineales

Considerando un sistema con una entrada senoidal. La gráfica de la magnitud y de la fase de la salida en estado estacionario de un sistema es conocida como respuesta en frecuencia. Consecuentemente, dado que se requiere alcanzar el estado estacionario de la salida, es necesario que el sistema en cuestión sea estable.

El punto de partida es un sistema lineal e invariante en el tiempo representado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (1)$$

Y la representación entrada-salida correspondiente es:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2)$$

Donde  $s$  representa la variable de Laplace. Para una entrada  $u(t) = A \text{ sen}(\omega t)$ , la respuesta en frecuencia del sistema (1) se puede obtener al substituir la variable de Laplace  $s$  por  $j\omega$  (solo la parte imaginaria).<sup>3</sup> Después de algunas operaciones, y sabiendo que  $G(j\omega)$  es un número complejo, resulta:

$$y_{ss}(t) = A |G(j\omega)| \text{ sen}(j\omega + \varphi) \quad (3)$$

donde

$$G(j\omega) = a(\omega) + jb(\omega) \quad (4)$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{(a(\omega))^2 + (b(\omega))^2} \quad (5)$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left( \sqrt{(a(\omega))^2 + (b(\omega))^2} \right) \quad (6)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{b(\omega)}{a(\omega)} \right) \quad (7)$$

La respuesta en frecuencia se representa en una gráfica semilogarítmica, escala lineal para la magnitud en decibelios y logarítmica para la frecuencia. De la misma manera para la fase, escala lineal para el ángulo de fase y logarítmica para la frecuencia. Estas graficas son conocidas como diagrama de Bode.<sup>1</sup> La respuesta en frecuencia muestra que para un sistema lineal con una entrada senoidal y frecuencia  $\omega$ , la salida correspondiente será la misma señal senoidal de la entrada con la misma frecuencia  $\omega$ , pero con amplitud y fase que varían de acuerdo con la frecuencia.

### SISTEMA EXTERNO PARA OBTENER ENTRADA SENOIDAL AL SISTEMA

La idea es poder generar la señal senoidal requerida para suministrar al sistema. Considerar un oscilador armónico, que es un sistema lineal homogéneo (sin entradas):

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= Sv(t) \\ u(t) &= \Gamma v(t) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{con } S = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}; \quad \Gamma = [\gamma_1 \quad \gamma_2]; \quad \text{y } v(0) = \begin{bmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{bmatrix}.$$

Note que la salida del sistema externo (8),  $u(t)$ , será utilizada como entrada al sistema (1). La solución al sistema (8) se puede obtener, por ejemplo, aplicando la transformada de Laplace. La solución queda:

$$v(t) = e^{\begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}t} v(0) \quad (9)$$

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}t} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \text{sen}(\omega t) \\ \text{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Y la solución se puede escribir como:

$$v(t) = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \text{sen}(\omega t) \\ \text{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$u(t) = [\gamma_1 \quad \gamma_2] \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \text{sen}(\omega t) \\ \text{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{bmatrix} \quad (12)$$

Como se aprecia, para que la salida  $u(t)$  sea  $\text{sen}(\omega t)$  se pueden obtener las siguientes combinaciones:

$$\begin{aligned} &\{v_1(0) = 0, v_2(0) \neq 0, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0\} \\ &\{v_1(0) \neq 0, v_2(0) = 0, \gamma_1 = 0, \gamma_2 = -1\} \end{aligned}$$

## OBTENCIÓN DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA

La idea es proponer un algoritmo alternativo a la manera clásica para obtener la respuesta en frecuencia, partiendo de la representación en espacio de estados y con la representación de la entrada mediante un exosistema. Para garantizar la existencia del estado estacionario se requiere que la matriz  $A$  del sistema tenga valores propios con parte real negativa.

Seleccionando

$$\{v_1(0) = 0, \quad v_2(0) = 1, \quad \gamma_1 = u_0, \quad \gamma_2 = 0\}$$

La salida del sistema externo,  $u(t)$ , se puede escribir como:

$$u(t) = \Gamma v(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2(0) \text{sen}(\omega t) \\ v_2(0) \cos(\omega t) \end{bmatrix} = v_2(0) \text{sen}(\omega t), \quad (13)$$

donde la amplitud de la función senoidal es  $u_0$  (constante).

La aplicación de la entrada al sistema al que se requiere determinar la respuesta en frecuencia,  $u(t)$ , resulta:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\Gamma v(t) \quad (14)$$

Entonces, partiendo que los valores propios de la matriz del sistema tienen parte real negativa, después de un transitorio se alcanza el estado estacionario. El estado estacionario de un sistema lineal lo representamos como:  $x_{ss}(t) = \Pi v(t)$  y  $\dot{x}_{ss}(t) = \Pi \dot{v}(t) = \Pi S v(t)$ . Después de sustituir queda:

$$\Pi S v(t) = A \Pi v(t) + B \Gamma v(t) \quad (15)$$

De donde resulta que la ecuación que se requiere satisfacer es

$$\Pi S = A \Pi + B \Gamma \quad (16)$$

(16) es conocida como ecuación de Sylvester y ha sido estudiada ampliamente en el contexto de algunos problemas de control, tales como ubicación de estructura propia<sup>7</sup> o bien para resolver problemas de regulación.<sup>8</sup> La solución de (16) existe y es única si las matrices  $-S$  y  $A$  no tengan valores propios comunes.<sup>7</sup> y <sup>8</sup> La solución está garantizada para nuestro sistema, dado que  $-S$  tiene valores propios sobre el eje  $j\omega$  mientras que los valores propios de la matriz  $A$  tienen parte real negativa.

Ahora para la ecuación de salida se tiene:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) = C\Pi v(t) + D\Gamma v(t) = [C\Pi + D\Gamma] \begin{bmatrix} \text{sen}(\omega t) \\ \text{cos}(\omega t) \end{bmatrix} \quad (17)$$

De acuerdo con lo expuesto en la sección 2, la salida del sistema corresponde también a

$$y(t) = u_0 |G(j\omega)| \text{sen}(j\omega + \varphi) \quad (18)$$

Y con ayuda de la identidad trigonométrica  $\text{sen}(j\omega + \varphi) = \cos(\varphi) \text{sen}(j\omega) + \text{sen}(\varphi) \cos(j\omega)$

Se puede reescribir la salida en estado estacionario como:

$$y(t) = [u_0 |G(j\omega)| \cos(\varphi) \quad u_0 |G(j\omega)| \text{sen}(\varphi)] \begin{bmatrix} \text{sen}(\omega t) \\ \text{cos}(\omega t) \end{bmatrix} \quad (19)$$

Y entonces resulta que

$$y(t) = [u_0 |G(j\omega)| \cos(\varphi) \quad u_0 |G(j\omega)| \text{sen}(\varphi)] = [C\Pi + D\Gamma] = [r_1 \quad r_2] \quad (20)$$

Siguiendo las ideas presentadas en<sup>6</sup> (Apendice A, pag. 379-381), ahora partiendo de la ecuación de Sylvester (16) y multiplicando por la derecha ambos lados por  $\begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$ :

$$[\Pi_1 \quad \Pi_2] \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} := A[\Pi_1 \quad \Pi_2] \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} + Bu_0 [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$$

Con  $\Gamma = u_0 [1 \quad 0]$ . Realizando los productos de la derecha en cada término:

$$[\Pi_1 \quad \Pi_2] \begin{bmatrix} j\omega \\ -\omega \end{bmatrix} = A(\Pi_1 + j\Pi_2) + Bu_0$$

$$j\omega\Pi_1 - \omega\Pi_2 = A(\Pi_1 + j\Pi_2) + Bu_0$$

Organizando del mismo lado a todos los términos que tienen componentes de la matriz  $\Pi$ :

$$j\omega\Pi_1 - \omega\Pi_2 - A\Pi_1 - jA\Pi_2 = +Bu_0,$$

y entonces factorizando  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  como se muestra:

$$(j\omega I - A)\Pi_1 + j(j\omega I - A)\Pi_2 = +Bu_0$$

Claramente se puede separar  $(j\omega I - A)$  y mandarlo al lado derecho de la igualdad mediante la inversa de  $(j\omega I - A)$ , la cual siempre existe.<sup>3</sup> Con esto resulta claro que:

$$\Pi_1 + j\Pi_2 = (j\omega I - A)^{-1} Bu_0 = \mathbf{x}(j\omega)$$

y claramente se tiene la respuesta en frecuencia de la salida si la cantidad mostrada en la ecuación anterior se pre-multiplica por  $C$ :

$$y(j\omega) = C\Pi_1 + jC\Pi_2 = C(j\omega I - A)^{-1} Bu_0 = G(j\omega) = r_1 + jr_2$$

Y la magnitud y fase se pueden calcular como:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \sqrt{(r_1)^2 + (r_2)^2} \\ \varphi &= \tan^{-1} \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Y de esta manera es posible determinar el valor de la magnitud y la fase para una frecuencia dada a partir de la matriz  $\Pi$  obtenida como resultado de la ecuación de Sylvester (16). En este trabajo no se muestran los algoritmos para resolver numéricamente la ecuación de Sylvester, sin embargo, es un hecho bien conocido en la comunidad

de control y este algoritmo está disponible en la literatura especializada,<sup>7</sup> o bien en forma de herramienta de algunos paquetes, como por ejemplo.<sup>9-11</sup>

### Algoritmo 1

- Establecer el valor inicial de  $\omega$
- Construir la matriz  $S$
- Resolver la ecuación de Sylvester para  $\Pi$
- Determinar  $C\Pi + D\Gamma$
- Calcular  $|G(j\omega)| = \sqrt{(r_1)^2 + (r_2)^2}$ ;  $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$
- Obtener  $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log(\sqrt{(r_1)^2 + (r_2)^2}) = 10 \log((r_1)^2 + (r_2)^2)$
- Calcular  $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$  y después convertir de radianes a grados:  $\varphi_{\text{grados}} = \varphi_{\text{rad}} * 180/\pi$
- Graficar los puntos obtenidos magnitud-frecuencia y fase-frecuencia (semilogaritmico)

### DISCUSIÓN

El procedimiento descrito en el algoritmo 1 no requiere el cálculo explícito de matriz de transferencia, lo cual es mencionado no como una ventaja en sí, sino como una característica. Es claro que si se requiere de la solución numérica de la ecuación de Sylvester. Afortunadamente existen diversos algoritmos disponibles para obtener la solución numérica, como se puede ver, por ejemplo, en Scilab<sup>9</sup> mediante el comando `sylv(A, B, C, flag)`, en Octave<sup>10</sup> mediante el comando `sylvester(A, B, C)`, en Matlab<sup>®11</sup> utilizando la instrucción `sylvester(A, B, C)` o bien en lenguaje Python<sup>12</sup> a través del comando `scipy.linalg.solve_sylvester(a, b, q)`.

Como es claro del procedimiento, es muy sencillo poder calcular la magnitud y la fase de un sistema para un valor de frecuencia dada.

### EJEMPLO DE APLICACIÓN

Con la finalidad de mostrar primero que el algoritmo propuesto determina la respuesta en frecuencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo, considerar el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [2 \quad 1]x(t) + 0 u(t) \end{aligned} \quad (22)$$

Determinar la respuesta en frecuencia del sistema anterior.

Solución:

Partiendo que se utiliza el sistema externo (8) se obtiene la ecuación de Sylvester dada por (16) con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [2 \quad 1]; \quad \Gamma = [1 \quad 0]; \quad v_1(0) = 0.$$

Siguiendo el algoritmo se selecciona un primer valor para  $\omega$  y se resuelve la ecuación de Sylvester para buscar  $\Pi$ . Mediante el uso de Python se programó el algoritmo 1 para encontrar la gráfica de Bode. Con la finalidad de contar con un punto de comparación se obtuvo la gráfica de Bode a partir de la manera clásica mediante el uso de la librería de control en Python.

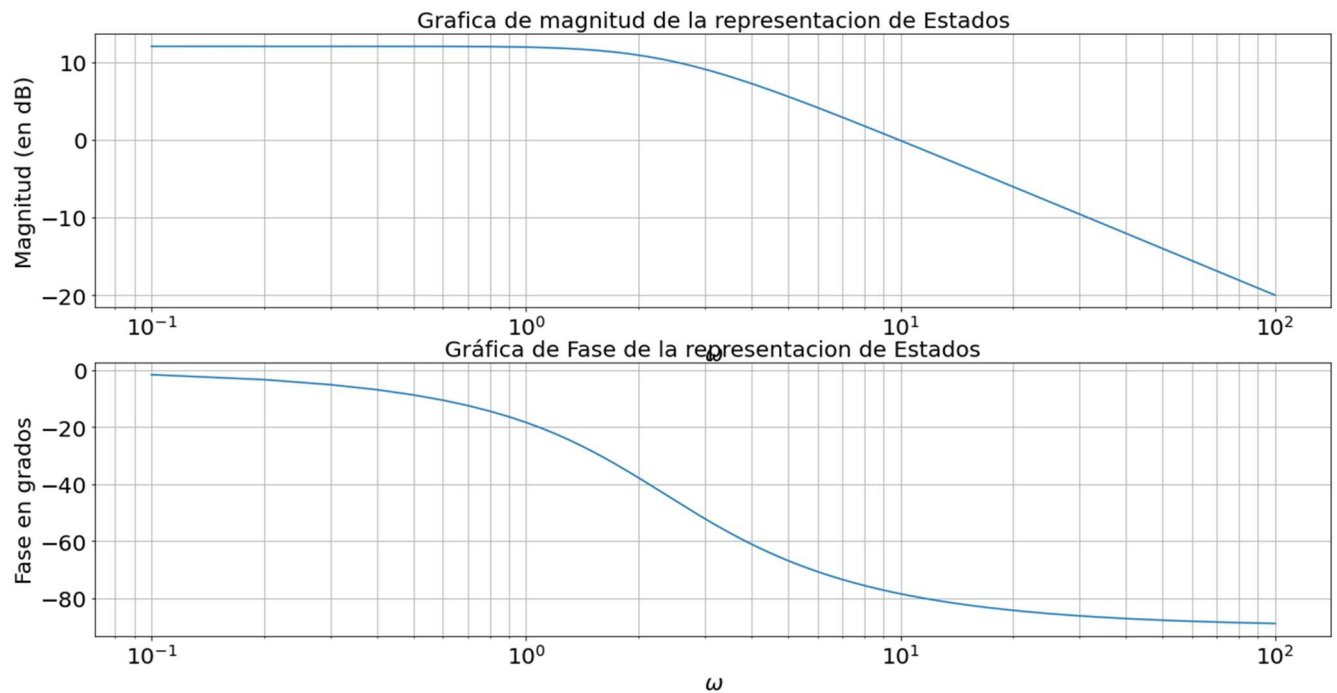


Fig. 1. Grafica de Bode obtenida mediante la aplicación del algoritmo 1.

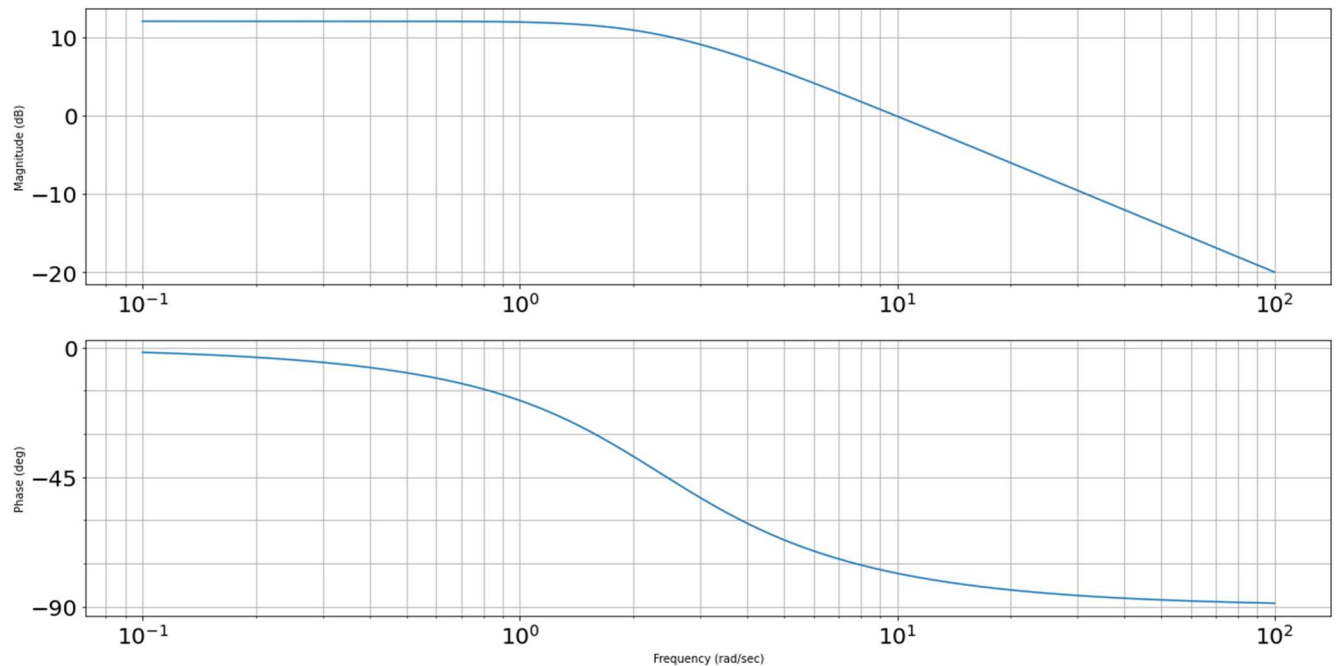


Fig. 2. Diagrama de Bode obtenido mediante el comando Bode (control en Python).

## CONCLUSIÓN

La respuesta en frecuencia de sistemas es una herramienta importante tanto para el análisis y diseño de sistemas de control. En este trabajo se muestra el camino para obtener la respuesta en frecuencia a partir de una representación en espacio de estados. Una parte central requerida para obtener el resultado es la ecuación de Sylvester, la cual también cumple funciones importantes en la asignación de polos, así como en la solución a problemas de regulación y seguimiento. Mediante un ejemplo se muestra que el algoritmo propuesto coincide exactamente con los procedimientos tradicionales disponibles en la librería de control de Python.

Como trabajo futuro se considera el uso de los procedimientos mostrados en este trabajo para analizar y/o diseñar sistemas de control.

## BIBLIOGRAFÍA

1. H. W. Bode, Relations between attenuation and phase in feedback amplifier design, Bell System Technical Journal, 19(3) p. 421-454, 1940.
2. H. W. Bode, Network analysis and feedback design, Van Nostrand, 1945.
3. K. Ogata, Ingeniería de control moderna, Pearson, 5ta edición, 2010.
4. E. Wernholt, S. Moberg, Experimental comparison of methods for multivariable frequency response function estimation, Proceedings of the 17<sup>th</sup> world congress of IFAC, Seoul, Korea, julio 6-11, p. 15359-15366, 2008.
5. A. Pavlov, N. Van der Wouw, H. Nijmeijer, Frequency functions for nonlinear convergent systems, IEEE Tran. on Automatic Control, Vol. 52, No. 6, p. 1159-1165, 2007.
6. A. Isidori, Lectures in feedback design for multivariable systems, Springer 2017.
7. G. H. Golub, S. Nash and C. VanLoan, A Hessenberg-Schur method for the problem  $AX+BX=C$ , IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 34, No. 6, p. 909-913, 1979.
8. A. Saberi, A. Stoorvogel, P. Sannuti, Control of Linear Systems with Regulation and Input Constraints, Springer, 2000.
9. Página web: [https://help.scilab.org/docs/6.1.1/en\\_US/sylv.html](https://help.scilab.org/docs/6.1.1/en_US/sylv.html). Consultado el 23/04/2022
10. Pág. web: <https://octave.sourceforge.io/octave/function/sylvester.html>. Consultado el 23/04/2022
11. Pág. web: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/sylvester.html>. Consultado el 23/04/2022
12. Pág. web: [https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.linalg.solve\\_sylvester.html](https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.linalg.solve_sylvester.html). Consultado 23/04/2022