Las geometrías no-euclidianas

José Rubén Morones Ibarra

Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, México

jose.moronesib@uanl.edu.mx

RESUMEN

La geometría euclidiana está fundada en cinco postulados que se presentan como verdades evidentes, es decir, verdades de las que no se puede dudar. Por mucho tiempo se pensó que no podía existir una geometría diferente a la de Euclides, sin embargo, las dudas sobre la independencia del quinto postulado respecto a los otros cuatro, abrió el camino para el desarrollo de nuevas geometrías. El impacto filosófico de las geometrías no-euclidianas provocó una revolución en el pensamiento matemático transformando a la matemática en una ciencia aún más abstracta y abriendo la posibilidad de concebir espacios más complejos. El desarrollo de la teoría de la relatividad, es un ejemplo de esto, ya que la formulación matemática de la relatividad no hubiera sido posible sin el antecedente de las geometrías no-euclidianas. En la actualidad las aplicaciones de las geometrías no-euclidianas abarcan muchos campos del quehacer humano, como la ciencia, la ingeniería mecánica, la construcción, la arquitectura, el arte y por supuesto en la matemática misma.

PALABRAS CLAVE

Geometrías no-euclidianas, quinto postulado de Euclides, geometría hiperbólica, geometría de Riemann.

ABSTRACT

Euclidean geometry is founded on five postulates that are presented as self-evident truths, which cannot be doubted. For a long time it was thought that there could be no geometry other than Euclid's. However, doubts about the independence of the fifth postulate with respect to the other four, opened the way for the development of new geometries. The philosophical impact of non-Euclidean geometries caused a revolution in mathematical thought, transforming mathematics into an even more abstract science and opening the possibility of conceiving more complex spaces. The development of the theory of relativity, for example, would not have been possible without the antecedent of non-Euclidean geometries. At the present time the applications of non-Euclidean geometries cover many fields of human endeavor, such as science, mechanical engineering, construction, architecture, art and in the mathematic itself.

KEYWORDS

Non-euclidian geometries, Euclide's fifth postulate, hyperbolic geometry, Riemannian geometry.

INTRODUCCIÓN

La geometría Euclidiana es aquella que aprendimos en la escuela elemental, también es conocida como geometría plana. Las ideas fundamentales de esta geometría fueron desarrolladas por los griegos y puestas en un compendio por Euclides en el año 300 a. C. en su famoso libro de geometría titulado "Los Elementos", en él resumió las ideas geométricas de la época en cinco postulados, que se presentan como verdades evidentes, "de cuya veracidad no se puede dudar", según lo estableció Euclides. Sobre la base de solo estos cinco postulados construyó toda la geometría elemental.

El quinto postulado de la obra de Euclides, conocido como el postulado de las paralelas, establece que "por un punto exterior a una recta se puede pasar una y solo una recta paralela a la recta dada". Este postulado provocó una gran inquietud debido a que tenía la apariencia de que podía deducirse de los otros cuatro, por lo que podía eliminarse de la lista de postulados. Desde la época de Ptolmeo (siglo II) hasta el siglo XIX, los matemáticos intentaron en vano obtener una deducción lógica de este postulado a partir de los otros cuatro.

En el año de 1733 se realizó uno de los más famosos trabajos para intentar "probar" el quinto postulado de Euclides; Fue llevado a cabo por el matemático italiano Gerolamo Saccheri, quien era un sacerdote jesuita. Saccheri utilizó el método de demostración de reducción al absurdo, el cual consiste en suponer que algún enunciado es verdadero y mediante una serie de razonamientos lógicos, llegar a un absurdo. Con esto se concluye que el enunciado supuesto es falso.

Saccheri escribió un libro completo sobre este tema, en donde consideró el quinto postulado de Euclides como un teorema e intentó demostrarlo mediante el procedimiento de reducción al absurdo suponiendo lo contrario que establece el postulado. Supuso que por un punto exterior a una recta pasa más de una recta paralela a la recta dada. Partiendo de esto y siguiendo razonamientos lógicos buscaba llegar a una contradicción. El resultado fue que no encontró ningún absurdo, por lo que se concluye que el postulado de las paralelas es independiente de los otros cuatro postulados.

Su libro consiste de todos los intentos que hizo para encontrar una contradicción. Demostró una gran cantidad de teoremas, contenidos en su libro, y llegó a la conclusión, el quinto postulado de Euclides, no se puede demostrar a partir de los otros cuatro. Sin percatarse de ello, Saccheri desarrolló una nueva geometría, una geometría no-euclidiana. Esa nueva geometría admitía los primeros cuatro postulados de Euclides e incluía un quinto que establecía que por un punto exterior a una recta dada puede trazarse más de una paralela a tal recta. Saccheri no se dio cuenta de que había abierto el camino para el desarrollo de nuevas geometrías, consistentes todas desde el punto de vista de la lógica. Se concluyó que el quinto postulado es independiente de los otros cuatro.

Quien primero se dio cuenta de la importancia del trabajo de Saccheri fue Nikolai Lobachevsky, un matemático ruso que, en el año de 1829, casi cien años después del libro de Saccheri, formuló y publicó una geometría no-euclidiana. Lobachevsky publicó un artículo sobre una nueva geometría con el título "Sobre los principios de geometría". Fue publicado en una revista de la Universidad de Kazán, en Rusia, donde presentaba una geometría diferente a la de Euclides.[1], fue de tal interés para algunos matemáticos que Gauss, el gran matemático alemán, se puso a estudiar ruso, el idioma en el que estaba escrito el artículo, para poder leerlo en su versión original.

Con los trabajos de Lobachevsky se inició formalmente el estudio de las Geometrías no-Euclidianas (GnE). La geometría de Lobachevsky, aun cuando era lógicamente consistente, no fue aceptada en su momento por muchos miembros de la comunidad de matemáticos, quienes la consideraban algo absurdo, que iba en contra de la intuición. Sin embargo, el descubrimiento de las GnE fue el punto de partida para iniciar una revisión de posiciones filosóficas respecto al significado de la matemática en general.

En la actualidad, el éxito que han tenido las aplicaciones de las GnE en la física, en la teoría de la relatividad especial y general, llevó a los matemáticos a confiar más en los métodos analíticos y procedimientos algebraicos abstractos que en la intuición geométrica.

La contribución de Lobachevsky al pensamiento moderno es en realidad muy profunda. Inició una nueva forma de pensar basada en la abstracción y no en la intuición, por eso es que hay quienes dicen que Lobachevsky es el Copérnico de la geometría o de la matemática. Otros, quienes consideran que sus ideas son de un alcance mucho mayor, le llaman el Copérnico del Pensamiento.

El impacto de sus ideas fue crucial para el desarrollo de la física del siglo XX ya que introdujo una nueva concepción filosófica de la matemática la cual también produjo una revolución en el pensamiento matemático. Las ideas kantianas relacionadas con el hecho de que toda geometría se basaba en lo empírico quedaron destruidas[2]. A partir de entonces, se aceptó que es posible construir otras geometrías lógicamente consistentes, con la misma validez que la de la geometría euclidiana[3].

LA NATURALEZA DE LA MATEMÁTICA

En sus inicios la matemática surgió de la realidad física, la geometría, por ejemplo, se basó en el concepto de que el espacio físico es plano. Nadie pensaba en hacer una geometría esférica, aun sabiendo que la Tierra es esférica. Esto se debió a que, a pequeña escala, se considera la superficie terrestre como si fuera plana. Estas ideas son el origen del empirismo del que hablaba Manuel Kant al asegurar que no es posible llegar al conocimiento físico completo apoyándose solamente en la razón[2]. Planteaba esto como si la geometría fuera una estructura teórica empírica o una ciencia experimental.

Indiscutiblemente que la geometría tiene su origen en lo que el ser humano observa en la naturaleza. Las figuras geométricas que ve a su alrededor son las que introduce en la geometría, sin embargo, para estudiar las propiedades de las figuras geométricas el matemático se abstrae de los objetos materiales y los trata como entes abstractos. Fue Tales de Mileto quien introdujo en la geometría esta forma abstracta de pensar.

Tales de Mileto, quien vivió en Grecia en el siglo VI a. C, al estudiar las figuras geométricas descubrió una forma nueva de analizar las cosas, una manera diferente de pensar y razonar. Introdujo el pensamiento abstracto y el concepto de figura geométrica como un ente idealizado, abstracto, separado de los objetos materiales. Encontró que era posible conocer las propiedades de los objetos en sí, sin necesidad de tenerlos físicamente, había concluido, al estudiar las figuras geométricas como el triángulo isósceles y el círculo, trazando figuras en la arena, podía identificar muchas propiedades de estas sin necesidad de relacionarlas con objetos materiales. Fue así como descubrió que mediante solo el razonamiento podía llegar al conocimiento de las propiedades de figuras geométricas.

Posteriormente, Aristóteles quien vivió también en Grecia en el siglo III a. C., desarrolló la lógica y las leyes del razonamiento lógico. Uniendo las ideas de Tales de Mileto con las reglas del razonamiento lógico de Aristóteles, Euclides (siglo III a. C.) resumió maravillosamente los conocimientos de geometría y matemáticas de su época en su famoso libro "Los Elementos".

La geometría se convirtió en un sistema lógico formal, un sistema axiomático en donde se introducen un conjunto de objetos abstractos (puntos, rectas, planos) y un conjunto de postulados donde se determinan relaciones entre estos objetos. Todas las conclusiones se obtienen a partir del razonamiento lógico, respetando los postulados. En general esta es la característica de toda la matemática, su abstracción y el rigor lógico que utiliza para obtener conclusiones.

Viendo la geometría como un sistema lógico formal, no debemos pensar que se construye o se formula en un espacio físico hecho de objetos. La geometría resulta ser un producto de la mente, sin relación con los objetos materiales. Si lo vemos así, podremos entender más fácilmente el origen de las geometrías no-euclidianas.

LA ABSTRACCIÓN EN LA MATEMÁTICA

El notable filósofo y matemático británico Bertrand Russell decía que la matemática es la única ciencia donde nosotros nunca sabemos de lo que estamos hablando y si lo que decimos de ella es verdadero o no. Estrictamente hablando, no sabemos, por ejemplo, lo que es un círculo, ni una recta, ni lo que es un número. La representación usual de un círculo o una recta corresponde a lo que intuimos de la geometría euclidiana (GE), pero existen círculos y rectas en otras geometrías que no son los objetos familiares de la GE. Ver figura 1. En la formulación abstracta de una geometría, no se requiere ninguna representación o realización pictórica de sus conceptos, como la línea recta o el círculo.

LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA

Todo sistema matemático es lógico deductivo, es decir, está basado en la lógica y en la validez del razonamiento deductivo. Todo cuerpo de doctrina de una teoría matemática se conforma de una serie de resultados (teoremas) obtenidos a partir de un conjunto de objetos indefinidos y de axiomas o postulados. Los postulados son enunciados que se establecen como verdades que se aceptan sin demostración. Sin embargo, usualmente existe una componente empírica para establecer los axiomas o postulados.[4]

Con el desarrollo de las GnE todos los sistemas lógico-formales sufrieron un fuerte impacto en su estructura. Se encontró que es posible desarrollar estructuras teóricas sin apego al empirismo Kantiano, es decir, sin necesidad de observar el mundo físico donde vivimos.

LA LÓGICA ARISTOTÉLICA

Aristóteles desarrolló lo que se consideró el instrumento de la razón más poderoso que se había creado: La Lógica o las leyes del razonamiento correcto. En 14 reglas fundamentales derivadas del sentido común y de las cuales, según parecía, nadie podía dudar, se estableció el procedimiento para conducir el razonamiento exacto y deductivo. El desarrollo posterior de la matemática utilizó esta potente herramienta para probar sus enunciados o teoremas, depositándose una gran confianza y seguridad en el procedimiento.

La lógica, que es la estructura formal del razonamiento deductivo, establece los principios que gobiernan la validez de la inferencia. En la matemática, la lógica dicta las reglas para la demostración, la cual es una sucesión de razonamientos conectados mediante los principios que rigen la validez de la inferencia. El programa para construir un sistema lógico consiste en introducir cierto número de axiomas o postulados, los cuales, por principio, son aceptados como verdaderos. Se introducen también conceptos no-definidos y se definen relaciones entre estos conceptos indefinidos. Ejemplos de conceptos indefinidos en la geometría son, el punto, la recta y el plano. A partir de aquí, utilizando las reglas de la lógica, se deducen relaciones entre los conceptos indefinidos. Las relaciones obtenidas mediante este procedimiento reciben el nombre de teoremas. Esta es esencialmente la línea de pensamiento que se sigue para construir una estructura matemática.

Este fue el camino que siguió Euclides, algunos años después de que Aristóteles formuló las reglas de la lógica para formalizar el estudio de la geometría. Euclides aplicó maravillosamente estas reglas para establecer la geometría como una ciencia deductiva, basada en la lógica. En su obra magna, "Los Elementos", Euclides estableció diez suposiciones a partir de las cuales pudo demostrar cientos de teoremas.[5]

Suposiciones que Euclides aceptó como verdaderas

1. Dos cosas iguales a una tercera lo son entre sí.
2. Si cantidades iguales se suman a cantidades iguales, los resultados son iguales.
3. Si cantidades iguales se restan de cantidades iguales, los resultados son iguales.
4. Dos figuras geométricas que al superponerlas coinciden en todas sus partes, son iguales.
5. El todo es mayor que cualquiera de sus partes.

Postulados de la geometría Euclidiana

Euclides hizo también algunas suposiciones acerca de ideas geométricas como puntos y rectas. Los postulados o suposiciones que Euclides tomó como verdades y que no requerían demostración, fueron los siguientes:

1. Por dos puntos cualesquiera siempre es posible trazar una línea recta y solo una.
2. Toda recta puede prolongarse en ambos sentidos indefinidamente.
3. Dados un punto cualquiera como centro, y un radio, es siempre posible construir una circunferencia.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Por un punto cualquiera que no pertenezca a una recta dada, puede trazarse una recta y solo una, paralela a la recta dada.

Al quinto postulado se le conoce también como postulado de las paralelas o de la unicidad de la paralela. Aquí es importante aclarar que la definición de líneas paralelas se refiere a dos rectas que por más que se les prolongue nunca se cortan. No es lo mismo decir que las rectas paralelas son aquellas que al prolongarse permanecen siempre a la misma distancia. Esto es importante porque en las geometrías no euclidianas las rectas paralelas no se cortan ni permanecen a la misma distancia, pueden irse acercando cada vez más al tender al infinito, pero nunca llegan a juntarse.

Todos los teoremas que probó Euclides tenían la siguiente estructura lógico-deductiva: Si (algo se cumple) entonces (necesariamente ocurre tal cosa). Esta forma de razonamiento se puede representar simbólicamente de la siguiente forma: Si $p \Rightarrow q$. Es decir, si p es verdadero, entonces se concluye por necesidad que q es verdadero. Aquí p y q son, en general, enunciados. Esta es la esencia del método de razonamiento deductivo.

El impresionante éxito que tuvo Euclides al aplicar la lógica, partiendo solamente de axiomas, conceptos indefinidos como punto y línea recta, y relaciones entre ellos para formalizar el estudio de la geometría, se quedó solo en esta rama de las matemáticas y no se aplicó a ninguna otra.

Más de dos mil doscientos años después de Euclides, David Hilbert causaría una nueva revolución en la estructura lógico formal de la geometría al formalizarla desde el punto de vista de la teoría de conjuntos. Antes de eso, al finalizar el siglo XIX, los matemáticos quisieron hacer lo mismo que Euclides hizo, pero con los números naturales. El matemático italiano Giussepe Peano (1858-1932) logró formalizar la teoría de los números naturales partiendo de 9 axiomas, que posteriormente se reducirían a cinco. Estos conjuntos de postulados se conocen en la actualidad como Axiomas de Peano, los cuales son tomados como el fundamento para construir toda la Teoría de Números.

LA LÍNEA RECTA

El concepto de línea recta en la geometría de Euclides se introduce estableciendo que está determinada por dos puntos. Nótese que esta no es una definición, es solo un postulado de existencia. Existe otra manera de introducir el concepto de línea recta en cualquier superficie, estableciendo que es la distancia más corta entre dos puntos del espacio que estamos considerando. En general, a las líneas de longitud mínima se les llama geodésicas del espacio considerado. Sin embargo, existen modelos de geometrías no-euclidianas, como los modelos de disco de Beltrami-Klein y el de Poincarè, donde no se satisface el requisito de distancia mínima para un segmento de la recta que une dos puntos del espacio como se verá más adelante.

Un caso particular de GnE es el de la geometría esférica, en la cual no existen líneas paralelas. La geometría esférica es aquella que se construye sobre la superficie de una esfera. En esta geometría la línea recta, determinada por dos puntos del espacio y definida como la distancia más corta entre estos dos puntos, resulta ser un arco de círculo máximo. Esto se prueba matemáticamente usando el cálculo de variaciones.

Observando la figura 1 notamos que "la recta" determinada por los puntos P y Q corresponde al segmento de círculo máximo y que al prolongarla se cierra en un círculo. Siguiendo la definición de paralelismo dada en la geometría euclidiana, donde se establece que dos líneas rectas son paralelas si nunca se cortan, aun prolongándolas indefinidamente, encontramos que en la geometría esférica no existen rectas paralelas ya que todos los círculos máximos se cortan en dos puntos.

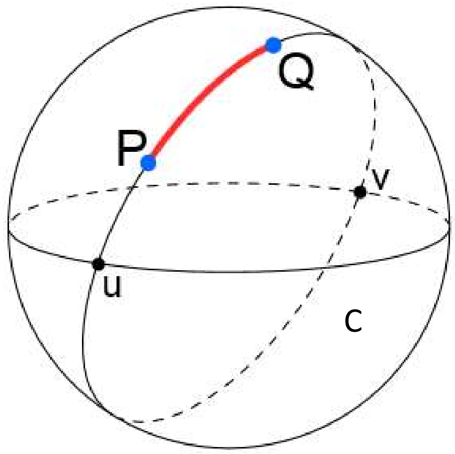

Fig. 1. Círculo máximo trazado sobre los puntos P y Q de una superficie esférica. En la geometría esférica no existen rectas paralelas. Todas las rectas, las cuales corresponden a segmentos de círculos máximos, al prolongarlas se cierran formando círculos máximos. Por otra parte, todos los círculos máximos de una esfera, que no son idénticos, se cortan en dos puntos. Esto indica que no existen líneas paralelas.

Por cualquier punto C que no pertenezca al círculo máximo determinado por PQ, no se puede construir una paralela a la recta PQ (círculo máximo). Toda línea recta que pase por C cortara a la "recta PQ".

Tomando en cuenta un espacio general continuo y diferenciable y usando como definición de línea recta determinada por dos puntos, como la distancia más corta entre dos puntos, Felix Klein probó en el año de 1871 que, solo existen tres tipos diferentes de geometrías, la de Lobachevsky, Riemann y Euclides.

Existen grandes diferencias entre la geometría de Euclides y la geometría sobre la esfera. En la geometría esférica no existen rectas paralelas. Además la suma de los ángulos internos de un triángulo esférico no suman 180^0, de hecho es mayor que esta cantidad, como lo podemos ver en la figura 2 .

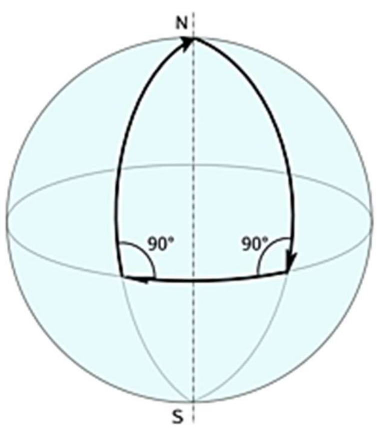

Fig.2. Triangulo esférico. La suma de sus ángulos internos es mayor de que 180^0.

En la geometría hiperbólica, definida sobre una superficie hiperbólica, como lo muestra la figura 3, las rectas son geodésicas sobre esta superficie curva. Por definición, las rectas paralelas no se cortan, y como se puede observar en la figura, por un punto exterior a una recta se pueden trazar un infinito número de rectas paralelas a la recta dada.

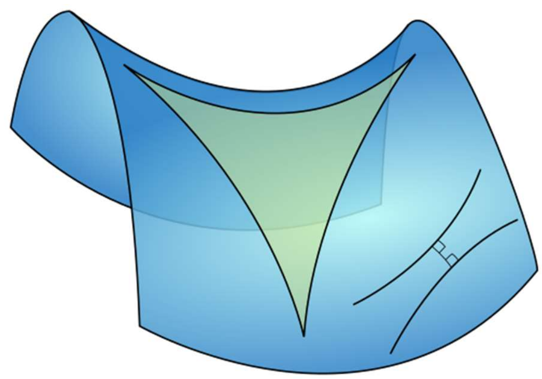

Fig. 3. Modelo de la silla de montar para la geometría hiperbólica. Este tipo de superficie se dice que es hiperbólica debido a que tiene una curvatura negativa. En la geometría hiperbólica un triángulo como el que se muestra en esta figura tiene la característica de que la suma de sus ángulos internos es menor que 180 grados. El par de líneas que se muestran en la figura son líneas rectas en este espacio hiperbólico. Por más que se les prolongue nunca llegan a intersecarse, sin embargo, no conservan la misma distancia entre ellas.

GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS

Por mucho tiempo se pensó que no podía existir una geometría diferente a la euclidiana, pues parecía evidente que el espacio era euclidiano. Sin embargo, el matemático ruso Alexander Lobachevsky probó que existen otras geometrías diferentes a la euclidiana.

El gran mérito de Lobachevsky fue lograr una nueva geometría auto-consistente, sin contradicciones lógicas. En el año de 1872 el matemático alemán Felix Klein probó que se puede establecer una correspondencia uno a uno entre la geometría Euclidiana y la geometría de Lobachevsky. A través de conceptos de geometría proyectiva, Klein fue el primero en reconocer e identificar que la geometría de Lobachevsky podía representarse en ciertas superficies, en este caso en un plano hiperbólico. Con esto se demostraba que ambas geometrías, la hiperbólica y la euclidiana, eran igualmente aceptables. Ninguna geometría es más fundamental que la otra, aun cuando la Euclidiana nos parezca más intuitiva. Esto último se debe a que pensamos usualmente en superficies planas, pero para la geometría de Lobachevsky hay que imaginar superficies diferentes. De aquí surgieron más generalizaciones a la geometría. La geometría esférica, la parabólica, etc. las cuales representan sistemas matemáticos distintos e independientes uno del otro. Este resultado nos sorprende, pero no debería ser así, ya que la superficie de la Tierra no es plana, sino curva. Los navegantes marinos no usan la geometría plana sino la esférica y sus rutas de navegación se determinan, en general, por la distancia más corta entre dos puntos. En este caso la distancia más corta no es la línea recta sino un arco de círculo máximo que une a los dos puntos. Lo mismo ocurre en la navegación aérea. Ver la figura 1.

Después de la formulación de su nueva geometría, Lobachevsky se preguntó ¿cuál será la geometría del espacio físico?, es decir la geometría del universo. Interesado en responder esta pregunta, Lobachevsky estudió astronomía buscando encontrar un procedimiento para saber si el universo es un espacio donde se satisface la geometría hiperbólica. Buscó construir un triángulo astronómico, considerando dos puntos extremos de la órbita de la Tierra alrededor del Sol y la estrella Sirio. Trazó un triángulo con esos tres puntos y midió por paralaje los ángulos del triángulo para saber si eran menores de 180 grados como lo establece su geometría. No obtuvo ningún resultado que contradiga que el universo es euclidiano. (La estrella Sirio se encuentra a una distancia de 8.6 años luz de la Tierra).

LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD Y LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

Durante mucho tiempo se pensó que la geometría de Lobachevsky no tenía conexión alguna con el mundo físico. Sin embargo, con el surgimiento de la teoría de la relatividad, se encontró que la geometría hiperbólica de Lobachevsky es la herramienta adecuada para describir el espacio de velocidades relativista. Este hecho se muestra en la forma matemática de las transformaciones de Lorentz[6]. Es por esto que, sin el desarrollo de las GnE, Einstein no hubiera podido formular su teoría de la relatividad, ya que esta requiere un espacio no-euclidiano.

GEOMETRÍAS DE ESPACIOS CURVOS

El matemático alemán F. B. Riemann (1826-1866), desarrolló la teoría general de la geometría para cualquier tipo de superficie. La geometría Riemanniana es en general el estudio de los espacios con curvatura, lo que se expresa técnicamente como la geometría de superficies curvas. La geometría Riemanniana resulta ser una generalización de la geometría Euclidiana, donde ésta corresponde a espacios de curvatura cero, es decir, para el espacio plano.

EL ESPACIO EUCLIDIANO

Las geometrías de espacios curvos, se determinan por la forma de medir distancias en cada espacio. Por definición, una geometría describe las propiedades del espacio considerado.

Cualquier espacio geométrico queda determinado por la forma de medir distancias en ese espacio. La regla de medir distancias se da mediante la métrica, que es la fórmula que tenemos para medir la distancia entre cualquier par de puntos de ese espacio.

En la geometría Euclidiana tridimensional, el cuadrado de la distancia ds^2 entre dos puntos $P_1(x_{1,}, y_1, z_1)$ y $P_2(x_{2,}, y_2, z_2)$ muy próximos entre sí está dada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Esto no es otra cosa que el teorema de Pitágoras en tres dimensiones.

Podríamos generalizar la definición de geometría Euclidiana a cualquier número de dimensiones. Para un espacio Euclidiano de N dimensiones, escribimos

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{N} dx_i^2$$

donde las coordenadas las hemos designado como $x_{1,} x_2, \ldots, x_N$

En forma compacta la expresión anterior la escribimos como

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \delta_{ij}\, dx_i dx_j$$

Definiendo la cantidad δ_{ij} como uno si $i = j$ y como cero si $i \neq j$.

Enfatizamos que en general, la geometría de un espacio queda determinada por la métrica ds^2.

EL ESPACIO DE MINKOWSKI

Las teorías compatibles con la Teoría Especial de la Relatividad (TER), se formulan de tal manera que sean invariantes ante las transformaciones de Lorentz. La mecánica y el electromagnetismo son construidas de tal manera que sus ecuaciones satisfagan el principio de relatividad especial de Einstein. En esta teoría todos los sistemas inerciales son equivalentes y las transformaciones de Lorentz conectan las observaciones realizadas en cualquier par de sistemas inerciales. El espacio donde se formula la TER es el espacio-tiempo de cuatro dimensiones llamado espacio de Minkowski.

El espacio de Minkowski es un ejemplo de geometría no euclidiana. Es un espacio de cuatro dimensiones, con el tiempo como cuarta dimensión. En la teoría de la relatividad la velocidad de la luz en el vacío, usualmente denominada con la letra c , es constante y puede utilizarse como factor para que las cuatro coordenadas (x, y, z, t) tengan las dimensiones de longitud si la cuarta coordenada la tomamos como ct . Un punto en el espacio de Minkowski queda determinado por la tétrada (x, y, z, ct)].

La regla para medir distancias en el espacio de la TER está dada por la métrica de Minkowski definida como

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Como es evidente de la forma de esta métrica, ésta no corresponde a un espacio Euclidiano. Define un espacio plano (curvatura cero) pero no es Euclidiano ya que la diferencia en signos en la métrica lo hace diferente.

Las geometrías se clasifican por la curvatura del espacio que estemos considerando. Ejemplos de geometrías de espacios con curvatura nula son la geometría euclidiana, pero también la de Minkowski. Ejemplos de geometrías de espacios de curvatura positiva son la geometría esférica y la elíptica. Un ejemplo de geometrías de espacios con curvatura negativa es la geometría hiperbólica.

REALIZACIÓN FÍSICA DE LA GEOMETRÍA DE ESPACIOS CURVOS

En la teoría de la gravitación de Einstein, que es la Teoría General de la Relatividad (TGR), el espacio el tiempo y la materia están estrechamente conectados, uno no existe sin los otros. El tiempo, por ejemplo, depende de las coordenadas espaciales. El espacio donde se formula la TGR es un espacio curvo de cuatro dimensiones. Para simplificar la notación tomaremos la velocidad de la luz $c = 1$. La geometría que describe el espacio-tiempo de la TGR es la geometría Riemanniana, cuya métrica está dada por $ds^2 = \sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4} g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ siendo ds^2 el cuadrado de la distancia entre dos puntos con coordenadas en el espacio-tiempo dadas por: (x, y, z, t) y $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$. Aquí se ha usado x^μ con $\mu = 1,2,3$ y 4 para x, y, z y t respectivamente. Las cantidades $g_{\mu\nu}$ se conocen como las componentes del tensor métrico y sus valores dependen de la posición y del tiempo de acuerdo de cómo está distribuida la materia y la energía en el espacio y su variación con el tiempo. De la forma de esta métrica se aprecia inmediatamente la interrelación espacio-tiempo-materia. Este espacio-tiempo corresponde a un espacio curvo descrito por una geometría no-euclidiana[7].

MODELOS DE LAS GEOMETRÍAS NO-EUCLIDIANAS

Un modelo de una geometría es una representación pictórica donde se exhiben las propiedades de la geometría. La idea es la misma que en los modelos de la geometría euclidiana. La representación de un círculo, una recta o un triángulo, como los conocemos, son ejemplos de modelos de figuras geométricas euclidianas.

Las primeras geometrías no-euclidianas se construyeron dejando sin cambio los cuatro primeros postulados originales de Euclides e incluyendo un quinto postulado modificado. El aspecto esencial de las GnE es que el concepto de línea recta, consistente con los postulados 1 y 2, no corresponde solamente a lo que pictóricamente entendemos por línea recta en la geometría euclidiana. En los espacios no-euclidianos, la negación del quinto postulado exige representar a las líneas rectas de manera diferente a lo usual.

Por lo tanto, en las GnE existen otras representaciones de las líneas rectas y esto permite la negación del quinto postulado de Euclides. Partiremos del hecho de que las GnE que nos interesan son aquellas en las cuales se preservan los primeros cuatro postulados de Euclides, y donde el quinto se cambia por una de las siguientes dos opciones: a) por un punto exterior a una recta no se puede trazar ninguna recta paralela a la recta dada; b) por un punto exterior a una recta se pueden trazar más de una recta paralela a la recta dada.

Existen esencialmente dos GnE que satisfacen los cuatro primeros postulados de Euclides y el quinto postulado modificado en la forma dada en a) o en b). La geometría hiperbólica o de Lobachevsky que se basa en el postulado b), y la geometría elíptica o de Riemann que se construye bajo el postulado a).

Una de las ideas de los desarrolladores de las GnE fue la de proponer modelos o representaciones gráficas o pictóricas de estas geometrías. Estos modelos consisten en superficies donde se pueda definir y trazar el concepto de línea recta y en la cual tengamos una manera de medir distancias o longitudes de segmentos de curvas. Todo esto, por supuesto, respetando los postulados de la geometría de la que se está tratando. Se mantiene el postulado de Euclides que establece que dos puntos determinan una recta, y por definición, dos rectas son paralelas si nunca se cortan.

TRES MODELOS DE LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

Existen varios modelos muy realistas de las geometrías no-euclidianas que son manifiestamente compatibles con las ideas opuestas al postulado de las paralelas de Euclides. Hay modelos euclidianos de geometrías no-euclidianas. De este tipo de modelos mencionaremos, como ejemplos, tres de ellos para la geometría hiperbólica. Estos modelos son: el Modelo de Beltrami-Klein, el de Disco de Poincaré y el de la Silla de Montar[8].

GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

Recordemos que en un modelo de la geometría hiperbólica podemos definir puntos, distancias, lo que es una línea recta, ángulos, etc. como queramos, siempre y cuando se respeten los postulados de nuestra geometría. Puesto que el único postulado diferente en la geometría hiperbólica es el quinto de Euclides, lo único que exigimos al modelo es que por un punto exterior a una recta dada pasen más de una paralela a la recta dada.

MODELO DE BELTRAMI-KLEIN

El modelo de Beltrami-Klein fue desarrollado por el matemático italiano Eugenio Beltrami (1835-1900) y el matemático alemán Felix Klein (1849-1925). En este modelo, el espacio K consiste de todos los puntos del interior del círculo limitado por la circunferencia C. Este espacio se conoce como plano hiperbólico. Los puntos de C no pertenecen al plano hiperbólico y son llamados puntos al infinito. Las rectas son definidas como las cuerdas abiertas del círculo determinadas por dos puntos del disco. Note que esta definición de recta corresponde al concepto euclidiano que establece que dos puntos determinan una recta y solo una. Ver figura 4.

Notemos que los puntos del espacio hiperbólico de Beltrami-Klein pertenecen al interior del disco. Al considerar un segmento de recta, determinada por dos puntos en el plano hiperbólico, podemos prolongarla indefinidamente en ambas direcciones sin salirnos del disco, ya que el disco no tiene puntos límites, pues los puntos de la circunferencia que limita al disco no pertenecen al plano hiperbólico. Los puntos de la circunferencia son los puntos que pertenecen al infinito. Las rectas del plano hiperbólico son por lo tanto infinitas ya que se pueden prolongar indefinidamente dentro del disco, sin salirse de él pues los puntos de la circunferencia que limita al disco no pertenecen al plano hiperbólico. El concepto de recta infinita se refiere a una recta sin puntos finales o bordes, pero de longitud finita. La longitud de una recta en el modelo de Beltrami-Klein está acotada, pero no está limitada. La máxima longitud de las rectas corresponde al diámetro del disco. Esta idea de longitud finita pero ilimitada se ejemplifica con el de la superficie de una esfera de radio r , cuya área es $4\pi r^2$, pero la superficie es ilimitada, no tiene bordes.

En el modelo de Beltrami-Klein por cualquier par de puntos P_1 y P_2 podemos trazar una recta y solo una. Ver figura 4.

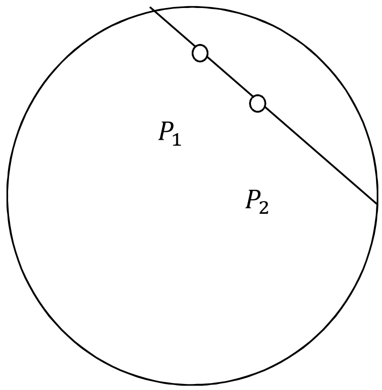

Fig. 4. Representación gráfica de una recta en el Modelo de Beltrami-Klein para el plano hiperbólico de la geometría de Lobachevsky. Por dos puntos se puede trazar una recta y solo una.

De acuerdo con la figura 5, por un punto P que no pertenece a la recta a, se pueden pasar muchas paralelas a a.

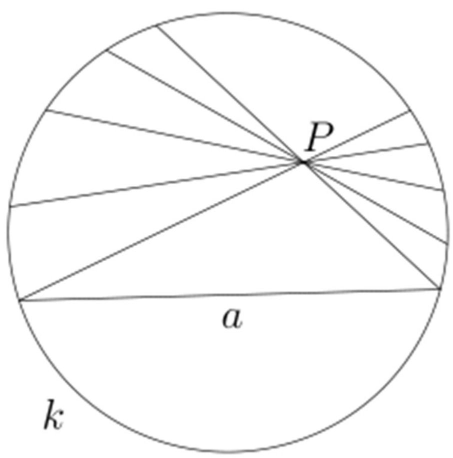

Fig. 5. Modelo de Beltrami-Klein para el plano hiperbólico de la geometría de Lobachevsky.

MODELO DE DISCO DE POINCARÉ

El Disco de Poincaré es un modelo o representación de la geometría hiperbólica en un plano euclidiano (modelo bidimensional). El espacio hiperbólico está formado por todos los puntos del disco, sin incluir los puntos de la circunferencia que lo limita. Por otra parte, la definición de recta determinada por dos puntos en el plano del disco es la de una curva circular que cae perpendicularmente sobre los bordes del disco. Todo es euclidiano, a excepción de la definición de línea recta. Lo diferente es la definición de línea recta, que es un arco de círculo perpendicular a la circunferencia del disco. El plano del disco es, por supuesto, euclidiano. En la figura 6, al considerar la recta a y un punto P que no pertenece a la recta a , encontramos que las rectas b y c son paralelas a la recta a , en el sentido que ambas son rectas que pasan por el punto P y no se intersecan con a. Observamos que existe un infinito número de rectas paralelas a a que pasan por el punto P.

Un postulado de esta geometría es que las líneas rectas se pueden prolongar indefinidamente. Puesto que el borde del disco, que es círculo, no pertenece al espacio hiperbólico, este borde es inalcanzable y corresponde a infinito.

Los modelos de Disco de Poicaré y el de Beltrami-Klein de la geometría hiperbólica son ambos planos euclidianos y no corresponden a superficies hiperbólicas. Son llamados planos hiperbólicos. En ambos casos el plano hiperbólico K se define como el conjunto de puntos del interior de la circunferencia. También es llamado disco abierto, que incluye todos los puntos del interior excepto los de la circunferencia.

Circunferencias ortogonales son aquellas que se cortan en ángulo recto. En el modelo de disco de Poincaré, una recta hiperbólica es un segmento de una circunferencia ortogonal a la circunferencia del disco o plano hiperbólico K. Todos los puntos de la recta están dentro el disco. Ver figura 9.

En el modelo de Disco de Poincaré, las rectas se clasifican en dos tipos; 1) Las cuerdas que pasan por el centro del disco y 2) Los segmentos de circunferencia dentro del disco que son perpendiculares a la circunferencia que limita al disco. Esto significa que una recta en este modelo es un arco que pertenece a una circunferencia ortogonal a la circunferencia del Disco de Poincaré. Nos podemos mover indefinidamente sobre los puntos de una recta sin salir del disco, sin llegar al borde.

Dos rectas en el plano hiperbólico son paralelas si no se cortan. En este caso encontramos que por un punto exterior a una recta hiperbólica pasan un infinito número de rectas hiperbólicas paralelas a la recta dada, como puede observarse en la figura 6.

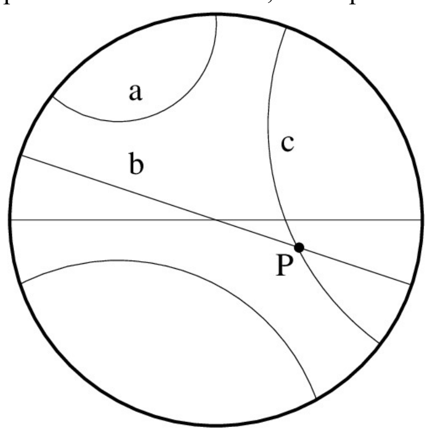

Fig. 6. El Disco de Poincaré como modelo de la geometría hiperbólica.

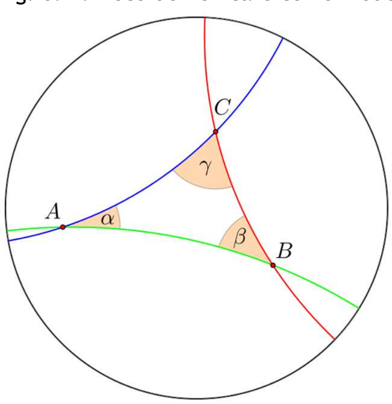

Fig. 7. Construcción de un triángulo (con líneas rectas) en el disco de Poincaré. Los vértices del triángulo son los puntos A, B y C. Como podemos observar, la suma de los ángulos internos del triángulo es menor de 180^0. $\alpha + \beta + \gamma < 180^0$

MODELO DE LA SILLA DE MONTAR

En el Modelo de la silla de montar para la geometría hiperbólica la superficie corresponde a la superficie de una silla de montar. En este caso la superficie en consideración es una superficie curva,hiperbólica. La definición de recta sobre esta superficie queda determinada por dos puntos, correspondiendo a la línea geodésica que una los puntos, es decir, el segmento de menor longitud que los une. Las rectas pueden prolongarse indefinidamente sobre la superficie en ambas direcciones.

La geometría hiperbólica en este caso tiene como representación una superficie de Riemann de curvatura constante igual a -1. Esto se muestra en la figura 3.

APLICACIONES PRÁCTICAS DE LAS GEOMETRÍAS NO-EUCLIDIANAS

La teoría de le relatividad introdujo una manera nueva de entender el universo y los recursos de las geometrías no-euclidianas fueron fundamentales para lograrlo. Además de su uso en la física, en la relatividad especial y general, las geometrías no-Euclidianas tienen importantes aplicaciones prácticas. Entre ellas encontramos la localización de posiciones sobre la superficie terrestre, así como en el diseño y el funcionamiento de los dispositivos GPS. Puesto que la Tierra no es plana, estos dispositivos deben diseñarse en base a una geometría esférica donde se incluyan efectos de la relatividad general.

En la navegación aérea y marítima, se buscan las rutas más cortas. Por supuesto que estas no se determinan con la geometría euclidiana sino usando la geometría esférica, la cual es no euclidiana.

Otras aplicaciones se presentan en los dispositivos de reconocimiento de señales digitales de voz y de visión, así como en el diseño y fabricación de piezas mecánicas para la industria con superficies curvas.

La geometría de cualquier superficie curva es no-euclidiana. Por tal motivo las aplicaciones de las GnE son innumerables ya que cualquier trabajo que se quiera realizar sobre una superficie curva requiere el conocimiento de su geometría. Las aplicaciones de las geometrías no-euclidianas abarcan todos los campos del quehacer humano. La ciencia, la ingeniería mecánica, la construcción, la arquitectura y el arte. Si observamos la figura 8 de una iglesia notaremos que el techo de la cúpula central está cubierta con gajos que son triángulos esféricos. Si se utilizan gajos de una sola pieza, debe utilizarse la geometría esférica para determinar su forma. Si se utilizan pequeñas piezas, se puede usar con buena aproximación, geometría plana.

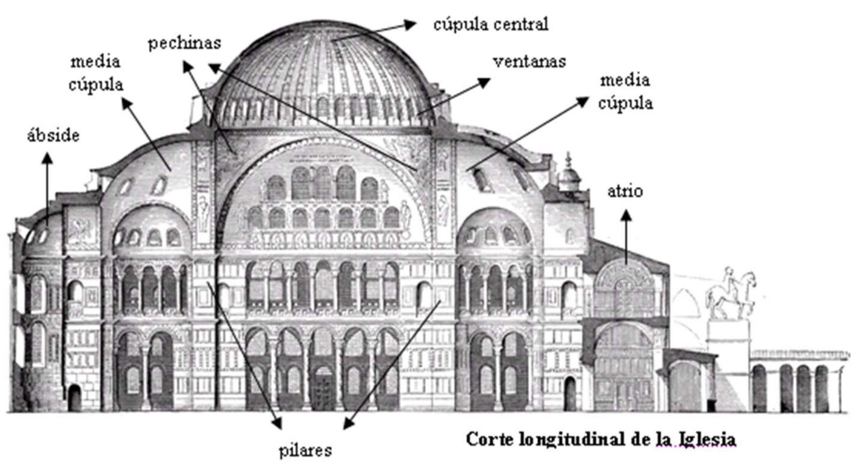

Fig. 8. Iglesia de Santa Sofía en Estambul, inaugurada en el año 537.

SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERNOS DE UN TRIÁNGULO

Como es bien sabido, la suma de los ángulos internos de un triángulo en la geometría euclidiana es 180^0. Sin embargo en las geometrías no euclidianas esta suma es mayor a 180^0 para la geometría esférica como se observa en las figura 2. En la geometría hiperbólica esta suma es menor que 180^0, ver figuras 3 y 7.

LA FÍSICA DEL SIGLO XX

El desarrollo de la física del siglo XX, hubiera sido imposible sin las geometrías no-Euclidianas y otras estructuras algebraicas abstractas. Cuando los matemáticos introdujeron las algebras no-conmutativas y las geometrías no-Euclidianas se pensó que estas eran simples estructuras matemáticas abstractas que nada tenían que ver con la realidad, es decir, con aplicaciones al mundo real. Sin embargo, las dos teorías fundamentales de la física moderna, la Mecánica Cuántica y la Teoría de la Relatividad, están totalmente apoyadas en estas dos ramas de la matemática. Estructuras matemáticas asociadas con álgebras no conmutativas como la de las matrices, y los operadores lineales, fueron utilizadas en la formulación de la mecánica cuántica, mientras que las geometrías no-Euclidianas fueron aplicadas en la teoría de la relatividad. En la física moderna, donde se han encontrado una gran variedad de espacios topológicos, las algebras no conmutativas han encontrado importantes aplicaciones, entre ellas la geometría no conmutativa.[9]

IMPACTO FILOSÓFICO DE LAS GEOMETRÍAS NO-EUCLIDIANAS

El desarrollo de las geometrías no-euclidianas provocó una de las más importantes revoluciones en la historia del pensamiento matemático y de la forma moderna de pensar[10]. Entre las preguntas que surgieron como resultado del desarrollo de las geometrías no-euclidianas encontramos las siguientes: ¿Cuál es la geometría "verdadera"?, ¿se debe responder a esta pregunta en base a observaciones experimentales, o filosóficas?, ¿Existe la línea recta como objeto o ente físico? Si pensamos en el concepto euclidiano de línea recta y nos apoyamos en los resultados de la TGR, la respuesta es que la línea recta no existe. Esto se debe a que el universo, de acuerdo con la teoría general de la relatividad, es un espacio curvo de cuatro dimensiones, por lo que, por más rígida y recta que parezca una varilla tiene una curvatura. Lo más parecido a una línea recta sería la trayectoria de un rayo de luz propagándose en una región muy alejada de objetos astronómicos, como estrellas u otros cuerpos de gran masa, pero aun así, la trayectoria de la luz debe seguir la curvatura del espacio-tiempo.

¿Es la geometría una ciencia experimental? En una ciencia experimental los resultados se someten a prueba utilizando objetos materiales. Por lo tanto, el concepto de una geometría vista como ciencia experimental, no puede aceptarse debido a que los objetos geométricos se reducirían a cuerpos materiales, ya que un experimento se hace con objetos materiales.[11] La geometría es una ciencia del razonamiento, una ciencia teórica, exclusivamente. Lo que sí es objeto de experimento es el de determinar la geometría del espacio físico donde nos encontramos, el cual, de acuerdo con la teoría de la relatividad, es un espacio de cuatro dimensiones, llamado espacio-tiempo.

La influencia de esta nueva concepción de la geometría impactó toda la matemática. Aun cuando al principio las ideas detrás de las geometrías no-euclidianas eran demasiado atrevidas y no fueron entendidas por muchos de los matemáticos, el impacto de estas sobre el desarrollo posterior de los diferentes campos de la matemática fue enorme. Surgió el álgebra abstracta hoy llamada algebra moderna. Se desarrollaron nuevos sistemas matemáticos y estructuras algebraicas desconectadas por completo de la realidad, las cuales, muchas de ellas, encontraron aplicaciones posteriormente.[12]

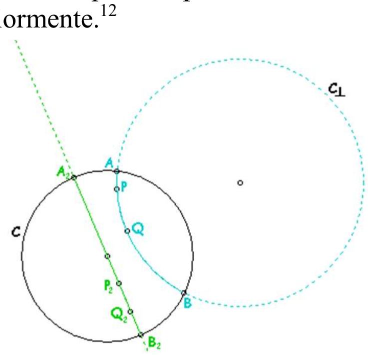

Fig. 9. Cuando dos circunferencias se cortan en ángulos de 90^0 decimos que las circunferencias son ortogonales. La línea recta determinada por dos puntos, se define como el segmento de una circunferencia ortogonal cuyos puntos pertenecen al disco, formando así un arco de círculo en el disco de Poincaré.

DESARROLLO FUTURO DE LAS GEOMETRÍAS

Una de las hipótesis fundamentales del espacio es que este es continuo, es decir, que podemos dividirlo indefinidamente, esto es, podemos reducir al espacio a cantidades cada vez más pequeñas sin tener ningún límite. Partiendo de lo que conocemos actualmente sobre las teorías fundamentales de la física como son la electrodinámica cuántica, la teoría electrodébil y la cromodinámica cuántica, sabemos que sus campos están cuantizados. Entendiendo por cuantización el hecho de que los campos físicos que entran en estas teorías, como el campo electromagnético, el campo nuclear débil y el campo nuclear fuerte, tienen todos ellos un comportamiento corpuscular lo cual ha sido confirmado experimentalmente (el fotón, los bosones de norma $W^+, W^- \; y \; Z^0$, y los gluones, son las partículas asociadas a estos campos). Siguiendo esta línea de razonamiento se tiene ahora como meta cuantizar el campo gravitacional.

Dado que la relatividad general es una teoría donde el campo gravitacional corresponde a la geometría del espacio-tiempo, la cuantización del campo gravitacional corresponde a la "granulación" del espacio-tiempo. Con esto tendríamos que el espacio y el tiempo no son continuos, sino que existen en paquetes de dimensiones que tienen un valor mínimo.

Experimentalmente se observa que muchas cantidades físicas como la energía, el momento lineal, el momento angular, el campo electromagnético y muchas otras, están cuantizadas, y su comportamiento físico queda muy bien descritas por teorías cuánticas. Esto no ocurre con el campo gravitacional.

En la teoría general de la relatividad, el campo gravitacional y el espacio-tiempo son cantidades físicas completamente equivalentes. No hay evidencias experimentales hasta el momento de que el espacio-tiempo esté cuantizado. Sin embargo hay fuertes motivaciones teóricas para suponer que a distancias muy pequeñas el espacio-tiempo que se manifiesta a través del campo gravitacional, mostrará efectos cuánticos, es decir, valores discretos, lo que equivale a que este espacio-tiempo no es continuo.[13] Una nueva estructura matemática ha surgido para describir la geometría del espacio-tiempo discreto, esta es conocida como geometría cuántica. Buscando describir la geometría del espacio-tiempo granulado se han desarrollado otras formulaciones matemáticas como la geometría no-conmutativa.

En estas formulaciones de la geometría cuántica se puede introducir un parámetro de longitud, como la longitud de Planck L_P que indicará la desviación de la geometría cuántica respecto a la geometría de Riemann. Esta se recuperará en el límite de $L_P \to 0$. Las ecuaciones que describen las partículas y los campos llevarán a predicciones involucradas en el factor L_P que podrán ser sometidas a la prueba experimental para confirmarse o descartarse las hipótesis de cuantización del espacio-tiempo.

La cuantización del campo gravitacional corresponde a la "granulación" del espacio-tiempo. Con esto tendríamos que el espacio y el tiempo no son continuos sino que existen en paquetes de dimensiones que tienen un valor mínimo.

En este caso tendríamos elemento de volumen y de tiempo que ya no podremos dividir más. El espacio y el tiempo se vuelven discretos. Podríamos decir que existen partículas de espacio. Lo mismo podemos decir del tiempo, que serían partículas de tiempo. En la TGR cuantizada lo que tendríamos serían partículas de espacio-tiempo. A la mínima longitud espacial que se puede tener se le llama longitud de Planck y tiene un valor de 10^{-33}centímetros. Para el caso del tiempo el valor mínimo es de 10^{-43} segundos, que es llamado el Tiempo de Planck.

La cuantización del espacio-tiempo es una idea que está presente en las teorías de gran unificación. Uno de los procedimientos para cuantizar una teoría es el de asociar operadores a las variables dinámicas de la teoría. La cuantización se obtiene cuando los operadores no conmutan. En el caso de la teoría general de la relatividad las coordenadas espaciales y temporales conmutan, es por esto que el espacio-tiempo aparece como continuo y que ambas variables, espaciales y temporales se pueden medir simultáneamente. Si queremos cuantizar el espacio tiempo, necesitamos asociar operadores tanto a las coordenadas espaciales como a las temporales. Con esto se consigue que los valores de las coordenadas espaciales y temporales, sean en general discretas y sus valores correspondan a los eigenvalores o valores propios de los operadores asociados a ellas. Los valores del tiempo y del espacio serían entonces discretos. Por ser operadores, el tiempo y las coordenadas espaciales no conmutan entre ellas dando lugar a una geometría no conmutativa del espacio-tiempo.[14]

El espacio-tiempo se manifiesta ahora como una malla o enrejado con longitud mínima y tiempo mínimo, teniendo valores discretos tanto el tiempo como el espacio. La geometría que describe este espacio sería una geometría cuántica y por supuesto, no-euclidiana. Dicho sea de paso, este es el camino seguido por la teoría de cuerdas de la física moderna, donde las partículas tienen asociadas cuerdas de longitud mínima.

EL PROGRAMA DE HILBERT PARA LA MATEMÁTICA

El matemático alemán David Hilbert (1862-1943) se propuso determinar el significado de la verdad. ¿Qué es la verdad? se preguntaba. Para dar respuesta a esta pregunta se planteó como meta la formalización de toda la matemática en forma axiomática. Debido a que las geometrías no- Euclidianas derrumbaron las ideas sobre las verdades evidentes de las que hablaba Euclides en su libro de geometría, Hilbert estableció que toda la matemática se debe establecer en forma rigurosa partiendo de un conjunto de axiomas, independientes, compatibles entre sí y completo. Siguiendo este formalismo lógico se garantizaría que todos los resultados obtenidos, serían estrictamente verdaderos (consistentes) como lo serían los axiomas de los cuales partió la estructura matemática.

El matemático Kurt Goedel, conocido en el mundo matemático como The Spoiler, porque encontró defectos en la formulación lógica de la matemática y, separadamente, les encontró problemas a algunas soluciones de las ecuaciones de Einstein en la teoría general de la relatividad. En el año de 1931, Goedel echaría abajo este proyecto de Hilbert al probar los teoremas que llevan su nombre: de inconsistencia y de incompletez de Goedel. Estos teoremas establecen que encontrar un conjunto de axiomas consistentes y completos para toda la matemática es imposible. Con estos resultados, el Programa de Hilbert fue descartado.

¿Cuál es la verdadera geometría? se preguntaba Hilbert. ¿Cómo puede responderse esta pregunta? A priori o a posteriori. A posteriori significaría que la geometría es una ciencia experimental. Una respuesta a priori significaría apoyarse en conceptos filosóficos.

Intentos por determinar la estructura geométrica del espacio físico han sido realizados usando mediciones astronómicas, apoyándose en la medición de los ángulos de triángulos muy grandes. Partiendo del hecho de que para construir un triángulo necesitamos tres puntos, encontramos que el triángulo más grande que se puede construir desde la Tierra es aquel que toma dos puntos opuestos en un diámetro de la órbita terrestre alrededor del sol y un tercer punto en una estrella muy alejada. Al medir los ángulos y sumarlos, podremos determinar la curvatura del espacio. Si la suma es igual, menor o mayor a 180 grados, tendremos un espacio euclidiano, hiperbólico o elíptico. Hasta el momento no se han encontrado desviaciones de la geometría euclidiana. Es importante distinguir la geometría local del espacio-tiempo, cercana a una estrella de gran masa, la cual no es euclidiana, de la geometría a gran escala del universo.

La respuesta a la pregunta ¿cuál es la geometría verdadera? la dio Hilbert con base a que la geometría está construida como una estructura lógico-formal. Hilbert logró re-formular los axiomas de la geometría dando una mayor formalidad a las ideas y dejando en claro que no hay una sola geometría, sino que, por el contrario, la norma es que haya tantas geometrías como conjuntos de axiomas compatibles e independientes puedan establecerse[15]. Todas las geometrías posibles serán tan verdaderas como los axiomas o postulados sobre los cuales descansan.

REFERENCIAS

1. Jurgensen, Ray, Donnelly, Alfred y Dolciani, Mary, Geometría Moderna, Publicaciones Culturales S. A., 1977
2. Kant, Immanuel, Critica de la Razón Pura. Ediciones Colihue, Buenos Aires, argentina, 2007.
3. Stefan Kulczycki, Non-Euclidean Geometry, Dover, 2008.

4. Greenberg, Marvin Jay, Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and History, 3rd Ed. 1994.
5. Thomas L. Heath, Euclid the thirteen books of the elements, Dover, 1956.
6. Barrett ,John F., The Hyperbolic Theory of Special Relativity, arXiv.org 2019.
7. Schutz, Bernard, A. first course in general relativity, Cambridge University Press 2022.
8. Noronha, Maria H. "Euclidean and Non-Euclidean Geometries", Prentice Hall, New Jersey, 2002.
9. Varilly, Joseph C., An introduction to noncommutative geometry, Amer Mathematical Society, 2006.
10. Kline, Morris, Mathematics. The loss of certainty Matemáticas. Oxford University press, New York.,1985.
11. Poincaré, Henri, La ciencia y la hipótesis, Colección Austral, 1963.
12. Chamseddine, Ali, et al Advances in Noncommutative Geometry, Springer (2019).
13. Lucas C.Céleri and Vasileios I. Kiosses Physics Letters B, Volume 781, 10 June 2018, Pages 611-615.
14. Connes, Alain, Noncommutative Geometry, Academic Press, 1994.
15. Hilbert, David The Foundation of Geometry, MJP Publisher, 2021.