

Aplicación del método simplex por medio de un programa en C++, para calcular SWU en el proceso de enriquecimiento del combustible nuclear

Eduardo Martínez Caballero, José Ramón Ramírez Sánchez,
Liliana Beatriz Sánchez Miranda, Adrián Alcántar Torres

Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares, Ocoyoacac, Edo. de México
Instituto Politécnico Nacional – Escuela Superior de Física y Matemáticas, CDMX
eduardo.martinez@inin.gov.mx, ramon.ramirez@inin.gov.mx,
lilie.miranda@gmail.com, aalcantar@ipn.mx

RESUMEN

En el proceso de enriquecimiento de los ensambles de combustible nuclear que se emplearon en los reactores nucleares de potencia, se requiere una serie de pasos, que incluye el proceso de conversión del uranio en su forma mineral U_3O_8 a UF_6 gasificado, para posteriormente iniciar el proceso de enriquecimiento y aumentar el contenido del isótopo ^{235}U . La difusión gaseosa es una tecnología utilizada para el proceso de enriquecimiento que consiste en forzar al gas de UF_6 a través de una membrana semi-permeable, esto produce una ligera separación entre las moléculas que contienen ^{235}U y las que contienen ^{238}U , la repetición sucesiva de este proceso lleva a enriquecer el uranio hasta el valor deseado, y la medida del esfuerzo (y costo asociado) usado en el proceso de enriquecimiento es la Unidad de Trabajo Separativo (SWU). Optimizar el costo de enriquecer uranio es un proceso complejo en el que entran en juego la cantidad y costo del SWU y de la materia prima de U_3O_8 . En este trabajo, se llevará a cabo un análisis de optimización de enriquecimiento de uranio mediante el uso del Método Simplex, este es el nombre con que se suele describir el enfoque general a la solución de programas lineales utilizando el pivoteo.

PALABRAS CLAVE

Programación Lineal, Método Simplex, Unidades de Trabajo Separativo (SWU), enriquecimiento.

ABSTRACT

The enrichment process of nuclear fuel assemblies, which were used in nuclear power reactors, requires a series of steps, the first of which takes U_3O_8 as the base material for conversion to UF_6 and later enrichment in ^{235}U . Gaseous diffusion is a technology used to produce enriched uranium that involves forcing UF_6 gaseous through semi-permeable membranes, causing a slight separation between the ^{235}U containing and ^{238}U containing molecules, the successive repetition of this process leads to enriching the uranium to the desired value, the measure of effort (and associated cost) used in the enrichment process is the Separative Work Unit (SWU). Optimizing the cost of enriching uranium is a complex process in which the amount and cost of SWU and U_3O_8 feedstock come into play. In this work, an optimization analysis of uranium enrichment will be carried out using the Simplex Method, which is the name used to describe the general approach to the solution of linear programs using pivoting.

KEYWORDS

Linear Programming, Simplex Method, Separative Work Units (SWU), enrichment.

INTRODUCCIÓN

Programación y modelos matemáticos

Muy a menudo es posible desarrollar una formulación matemática precisa, captar las interacciones en juego y reducir el problema particular a un problema matemático. Este proceso de transformar un conjunto de ecuaciones cuya solución implica un problema práctico dado se denomina programación matemática.

El término programación se refiere al proceso de búsqueda de variables y de establecer el sistema de ecuaciones, cuya solución corresponda a la del problema. En este trabajo se considerará un tipo fundamental de programación matemática, la Programación Lineal, y consideraremos un algoritmo eficaz para resolverlos, que es el Método Simplex.

La Programación Lineal y el Método Simplex son de una importancia fundamental, ya que una gran variedad de problemas importantes se pueden formular como programas lineales y su solución se alcanza eficazmente a través del Método Simplex.¹

Se conocen mejores algoritmos para algunos problemas específicos, pero muy pocas técnicas de resolución de problemas tienen un espectro de aplicación tan grande, como el proceso de formular primero el problema como un programa lineal y calcular la solución aplicando el Método Simplex.

Esto sumado a que algunas de las ideas básicas son fáciles de comprender y el actual algoritmo simplex no es difícil de implementar, convierte a este método, en una herramienta viable y popular para resolver problemas de Programación Lineal.²

También proporciona conocimientos más profundos sobre la estructura de los conjuntos poliédricos, que definen la región factible subyacente de los programas lineales.

Los programas matemáticos usan un conjunto de variables relacionadas por un conjunto de ecuaciones matemáticas llamadas restricciones, y una función objetivo que contiene las variables que debemos optimizar (maximizando o minimizando) respetando las restricciones dadas. Si todas las ecuaciones son simples combinaciones lineales de las variables, se tiene el caso particular que se está considerando y que se denomina Programación Lineal.¹

Entonces la Programación Lineal estudia el problema de minimizar o maximizar una función lineal en presencia de restricciones lineales de igualdad y/o desigualdad.²

Enriquecimiento del uranio

En un reactor nuclear enfriado y moderado con agua ligera, el isótopo ^{235}U fisiona con neutrones moderados por el agua, promoviendo la reacción en cadena en el uranio de los combustibles. Esta reacción en cadena debe sostenerse todo el tiempo que el reactor esté funcionando, lo que hace necesario incrementar la cantidad del ^{235}U en el combustible.

A este incremento de la concentración del isótopo ^{235}U se le llama enriquecimiento, y se logra por medio del proceso de enriquecimiento de uranio. Existen al menos tres métodos de enriquecimiento para este propósito: difusión gaseosa, centrifugación gaseosa y separación láser.

Hasta ahora los más utilizados han sido los métodos de difusión a través de membrana permeable y el método de centrifugación el primero basado en que el isótopo más ligero pasa por la membrana más rápido y así a través de cientos de etapas se logran concentraciones más altas. El segundo proceso consiste en introducir el gas que contiene el uranio a una centrifuga y así usar la fuerza centrífuga para separar el isótopo más ligero y el más pesado a través de varias etapas. El método láser se basa en las diferencias en niveles energéticos de la configuración electrónica de los isótopos, irradiando el material con rayos láser a una frecuencia específica para ionizarlo de manera selectiva y colectarlo en placas electrostáticas.

MÉTODO SIMPLEX

El Método Simplex de Dantzig fue creado en el verano de 1947 para resolver problemas de Programación Lineal y es un procedimiento muy eficaz para resolver grandes programas lineales en una computadora. Sin embargo las clases de ejemplos han sido cambiados cuando el número de

pivoteos requeridos por el método, puede crecer tanto como una función exponencial de las dimensiones del problema. Sin embargo, estos ejemplos poco realistas han estimulado el desarrollo de una teoría de métodos alternativos para los cuales se garantiza que el número de pasos de pivoteo no crecerá de forma exponencial, independientemente de la estructura de la matriz de coeficientes.^{2,3}

Algoritmo del método simplex

El estudio del método simplex empieza demostrando que, si existe una solución óptima, entonces también existe un punto extremo óptimo. Luego, los puntos extremos son caracterizados en términos de soluciones básicas factibles. A continuación se describe el método simplex para mejorar tales soluciones hasta lograr optimalidad, o bien, hasta concluir que el valor óptimo es no acotado.¹

Considere un programa en forma estándar y que se desea minimizar, el programa lineal es:

$$\begin{aligned}
 c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n &= z \text{ (Min)} \\
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \\
 x_1, x_2, x_3, \dots, x_n &\geq 0
 \end{aligned}$$

En notación matricial se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar } C^T x \\
 &\text{Sujeto a:} \\
 &Ax = b; A: m \times n \\
 &x \geq 0
 \end{aligned}$$

Donde A es una matriz rectangular de dimensión $m \times n$, b es un vector columna de dimensión m, c es un vector columna de dimensión n, x es un vector columna de dimensión n y el superíndice T significa la transpuesta.⁴

De acuerdo con la demostración del Método Simplex podemos describir el método aplicando los siguientes pasos:

Paso inicial: Encontrar un punto extremo inicial x con base B.¹

Paso principal:

1) Calcular las componentes del valor $C^T_B B^{-1}N - C^T_N$.

Si este vector tiene todas sus componentes menores o igual que cero entonces el algoritmo se termina y x es un punto extremo óptimo.

En caso contrario, tomar la componente más positiva del vector $C^T_B B^{-1}N - C^T_N$ digamos $C^T_B B^{-1}a_j - c_j$.

$$\text{Sea } y_j = B^{-1}a_j$$

Si $y_j \leq 0$ entonces el algoritmo termina, pues el valor de la función no está acotado sobre el rayo:

$$\left\{ x + \lambda \begin{pmatrix} -y_j \\ e_j \end{pmatrix} \mid \lambda \geq 0 \right\}$$

Si y_j no es menor o igual que cero pasar al siguiente inciso.

- 2) Calcular el valor del índice r que permite definir al escalar λ y formar un nuevo punto extremo \bar{x} además formar la nueva base asociada a \bar{x} , eliminando la columna a_r de la matriz B e introduciendo la columna a_j en su lugar.

Repetir el inciso 1 del paso principal.

METODOLOGÍA

Se aplicará el Método Simplex para optimizar la obtención del valor de las SWU para el proceso de enriquecimiento del combustible nuclear, por lo que se desarrolló un programa en lenguaje C++,^{5, 6, 7, 8} que implementa y resuelve un problema lineal aplicando el Método Simplex. Se modelaron las ecuaciones del proceso de enriquecimiento del combustible nuclear a un programa lineal en forma estándar, identificando la función objetivo y las variables a considerar. Después, tomando toda la información se ejecutó el programa en C++ y se compararon los resultados obtenidos del programa, con los calculados por medio de las ecuaciones.

Para poder usar el Método Simplex es necesario modelar el problema a un programa lineal, para lo cual se debe hacer una programación matemática, ayudándonos de las siguientes etapas:^{1, 2}

La etapa fase del *planteamiento del problema* implica un estudio detallado del sistema, la recolección de datos y la identificación del problema específico que es necesario analizar, junto con las restricciones o limitaciones del sistema y la(s) función(es) objetivo(s). A menudo el problema analizado puede formar parte de un problema de un sistema global. La siguiente etapa implica la elaboración de una abstracción o una idealización del problema mediante un *modelo matemático*. Es necesario tener cuidado en asegurarse de que el modelo represente de manera satisfactoria al sistema bajo análisis y que además sea matemáticamente tratable. La tercera etapa es *deducir una solución*. Es necesario elegir o diseñar una técnica apropiada que aproveche cualquier estructura.^{8, 9}

El enriquecimiento del uranio al isótopo ^{235}U requiere la repetición del proceso de la difusión gaseosa¹⁰ miles de veces y hay seis variables involucradas: X_f , X_p , X_w , F , P y W . Donde^{11, 12}

X_f = Fracción de peso del ^{235}U en el uranio natural (UF_6).

X_p = Fracción de peso del ^{235}U en el producto (es decir, enriquecimiento deseado).

X_w = Fracción de peso del ^{235}U en el uranio empobrecido; X_w también es conocido como colas.

F = Número de kilogramos del uranio natural (por unidad de tiempo).

P = Número de kilogramos del producto enriquecido (por unidad de tiempo).

W = Número de kilogramos de colas (por unidad de tiempo).

El número de SWU producido por una planta de enriquecimiento durante un periodo de tiempo T está dado por:

$$SWU = [P * V(X_p) + W * V(X_w) - F * V(X_f)] * T \quad (1)$$

Donde las cantidades $V(X_i)$, se conocen como la "función valor" (Eq. 2) y el subíndice 'i' indica f, p ó w.

$$V(X_i) = (2X_i - 100) * \text{Ln}[X_i / (100 - X_i)] \quad (2)$$

Convirtiendo el problema a un programa lineal en forma estándar: Se minimizan las SWU, tomando las variables X_f , X_p , X_w , F , P y W , sujetas a:

$$\begin{aligned}0.711 < X_p &\leq 5 \\ 0.2 &\leq X_w \leq 0.4 \\ X_f &= 0.711\end{aligned}$$

RESULTADOS

Se usó la hoja de cálculo¹³ basada en las ecuaciones descritas para calcular las SWU (Tabla I).

Tabla I. Obtención de las SWU por medio de la hoja de cálculo.

X_p	X_w	SWU
4.5	0.25	6.8711
4.6	0.26	6.9368
4.7	0.27	7.0025
4.8	0.28	7.0680
4.9	0.30	7.0038
4.9	0.31	6.8796
5.0	0.35	6.6091

Y se aplico el Método Simplex por medio del programa, obteniendo los valores de:

$$\begin{aligned}X_p &= 4.9 \\ X_w &= 0.31 \\ \text{SWU} &= 6.87959681\end{aligned}$$

CONCLUSIONES

El Método Simplex realiza los cálculos tomando en cuenta todo el intervalo en donde las variables están limitadas, sin necesidad de calcular SWU para cada valor en el intervalo de las X_i . Además el Método Simplex nos da como resultado valores óptimos de cada una de las X_i , para finalmente usarlos y calcular el valor de las SWU que se desee o requiera, sin la necesidad de realizar todo un estudio de sensibilidad.

Se desarrollo un programa en C++, implementando el Método Simplex para calcular las Unidades de Trabajo Separativo (SWU).

REFERENCIAS

1. George B. Dantzig, "Linear Programming and Extensions". Ed. Princeton University Press (1998).
2. Bazaraa, Mokhtar S., "Programación lineal y flujo de redes". Ed. Limusa Wiley, Segunda edición corregida (1998).
3. Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman, "Introducción a la Investigación de Operaciones". Ed. Mc Graw Hill, Cuarta edición (1989).

4. Taha, Hamdy A, Acosta Flores, José de Jesús, “Investigación de Operaciones”. Ed. Pearson Educación, Séptima edición (2004).
5. Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, “Introduction to Algorithms”. Ed. MIT Press, Tercera edición (2009).
6. Brian W. Kernighan, Dennis M. Ritchie, “El lenguaje de Programación C”. Ed. Pearson Educación, Segunda edición (1991).
7. Robert Sedgewick, “Algoritmos en C++”. Ed. Pearson Educación, Primera edición (1995).
8. David E. Luenberger, “Programación lineal y no lineal”. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, (1989).
9. University Vasek Chvatal, “Linear Programming”. Ed. Bedford Books (2016).
10. Robert G. Cochran and Nicholas Tsoulfanidis, “The Nuclear Fuel Cycle: Analysis and Management”. McGrawhill Book Company Ed. La grange Park Illinois USA: American Nuclear Society (1999).
11. Eduardo Martínez Caballero, “Impacto del Quemado del Combustible Nuclear en su Costo”, Tesis de Licenciatura de la ESFM-IPN (2010).
12. Liliana Beatriz Sánchez Miranda, “Una Aplicación del Método Simplex a la Ingeniería Nuclear”, Tesis de Licenciatura de la ESFM-IPN (2020).
13. <https://www.uxc.com/p/tools/FuelCalculator.aspx>