

Aplicación del cálculo fraccionario en el modelado de corrientes transitorias en polímeros

Jesús Gabino Puente-Córdova¹, Karla Louise Segura-Méndez¹,
Flor Yanhira Rentería-Baltierra², Isaac Yair Miranda-Valdez³

¹ Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, México

² Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ciencias Químicas, México

³ Aalto University, Department of Applied Physics, Espoo, Finland

jesus.puentecr@uanl.edu.mx, karla.seguramz@uanl.edu.mx, flor.renteriabltz@uanl.edu.mx,

isaac.mirandavaldez@aalto.fi

RESUMEN

En este artículo se revisan las limitaciones de los modelos matemáticos comúnmente utilizados en la literatura para la descripción general del fenómeno de corrientes transitorias en materiales poliméricos mediante una ley de la potencia o una función exponencial negativa, y se propone la aplicación del cálculo fraccionario. De entre las limitaciones de los enfoques tradicionales destacan su fracaso en la asociación de este comportamiento eléctrico característico con parámetros físicos. Las causas de éstas provienen de la complejidad del comportamiento eléctrico en los polímeros. Dicho fenómeno ocurre a través de la relajación de carga eléctrica en función del tiempo, donde la viscoelasticidad del polímero influye ampliamente en el movimiento de dipolos eléctricos y en la conducción de portadores de carga eléctrica. Típicamente, el fenómeno de corrientes transitorias se describe a través de circuitos RC (resistor-capacitor), donde un resistor y un capacitor representan la habilidad de un polímero de disipar y almacenar carga eléctrica. El modelo matemático aquí construido mediante la aplicación del cálculo fraccionario proporciona una interpretación física a sus parámetros que describen comportamientos complejos en polímeros.

PALABRAS CLAVE

Corrientes transitorias, derivada de Caputo, cálculo fraccionario, Mittag-Leffler, polímero.

ABSTRACT

This article reviews the limitations of the mathematical models commonly used across the literature for the general description of the phenomenon of transient currents in polymeric materials through a power law or a negative exponential function, and proposes the application of fractional calculus. Among the limitations of the traditional approaches stand out their failure in the association of this distinctive electrical behavior with physical parameters. The causes of these stem from the complexity of electrical behavior in polymers. This phenomenon occurs through the relaxation of electric charge as a function of time, where the viscoelasticity of the polymer widely influences the movement of electric dipoles and the conduction of electric charge carriers. Typically, the phenomenon of transient currents is described using RC (resistor-capacitor) circuits, where a resistor and a capacitor represent the ability of a polymer to dissipate and store electrical charge. The mathematical model herein constructed through the application of fractional calculus provides with a physical interpretation of its parameters, which describe complex behaviors in polymers.

KEYWORDS

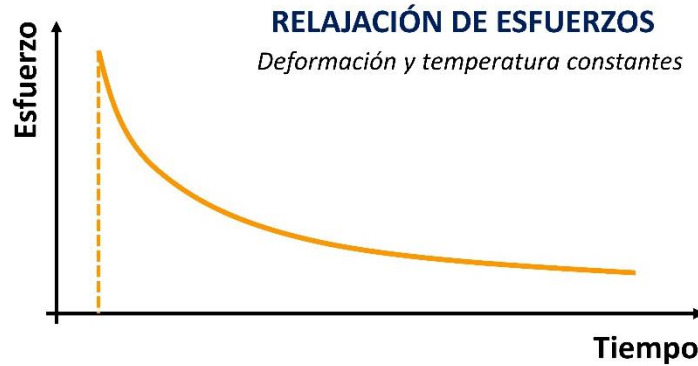
Transient currents, Caputo derivative, fractional calculus, Mittag-Leffler, polymer.

INTRODUCCIÓN

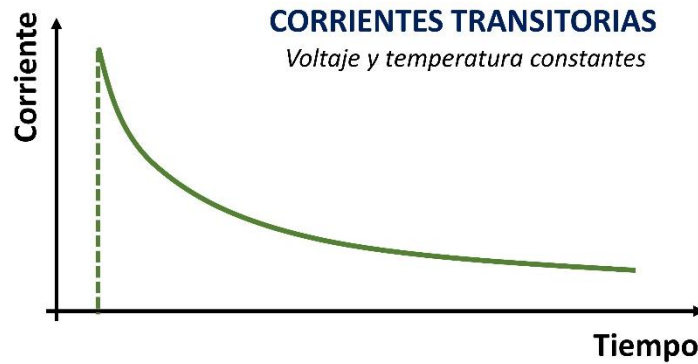
El estudio de las propiedades eléctricas de los polímeros y los mecanismos de transporte y conducción de portadores de carga eléctrica son un tópico de interés para la comunidad científica.¹⁻³ Desde el punto de vista eléctrico, estos materiales cuentan con tres importantes propiedades físicas que los hacen aislantes o dieléctricos: la resistividad ρ , la permitividad relativa ϵ_r y la rigidez dieléctrica. La conductividad eléctrica σ , inversa de la resistividad, se ve restringida por el hecho de que en los polímeros no hay electrones libres, pues ellos están presentes principalmente en los enlaces covalentes que forman las cadenas poliméricas. Respecto a la ϵ_r , algunos materiales poliméricos exhiben una estructura tipo dipolar, donde bajo la acción de un campo eléctrico se orientan y generan un almacenamiento parcial de carga eléctrica. Por su parte, la rigidez dieléctrica se asocia con la capacidad de resistir altos campos eléctricos antes de la ruptura de la estructura interna, lo que generalmente da lugar a la aparición de arborescencias. En virtud de estas propiedades, los materiales poliméricos tienen hoy en día diversas aplicaciones en los sectores de la industria eléctrica y electrónica.⁴⁻⁶

Ahora bien, una manera de abordar los mecanismos de conducción en materiales poliméricos es a través de la medición experimental de corrientes transitorias $I(t)$, es decir, el monitoreo de la evolución de la corriente eléctrica en el tiempo. Esta prueba es análoga al ensayo de relajación de esfuerzos en viscoelasticidad lineal.^{4,7} En la figura 1a se presenta un gráfico correspondiente a un ensayo de relajación de esfuerzos. En este ensayo el polímero se somete a una deformación abrupta y constante (estímulo mecánico) durante un intervalo de tiempo definido y la respuesta que se monitorea es el esfuerzo en función del tiempo. En este gráfico se observa una disminución exponencial del esfuerzo cuando transcurre el tiempo. Dicho comportamiento se debe a las cadenas poliméricas que presentan una tendencia a incrementar su entropía, la cual fue reducida cuando se deformó el material de manera abrupta. Es decir, la disminución del esfuerzo en el tiempo es una manifestación macroscópica del paso de las cadenas poliméricas estiradas o alineadas con una entropía menor, a una conformación en forma de ovillo, donde se tiene un máximo de la entropía.⁸

Un comportamiento análogo se obtiene cuando se aplica un estímulo eléctrico (voltaje) en lugar de un estímulo mecánico (deformación), y ahora la respuesta monitoreada es una corriente eléctrica. La figura 1b presenta una curva típica para un material polimérico, bajo la aplicación de un campo eléctrico constante (equivalente a un voltaje constante). En este caso, la disminución de la corriente eléctrica se debe principalmente a la orientación dipolar del material polimérico; una vez que la corriente ha disminuido considerablemente, se dice que el polímero está polarizado. Debido a la viscoelasticidad del polímero, cuando el voltaje aplicado es suprimido, los dipolos eléctricos orientados previamente regresan de manera parcial a su posición energética inicial, de tal manera que una carga eléctrica se puede almacenar, y la otra se disipa en forma de corriente eléctrica. Por otra parte, si las condiciones se cumplen durante la medición de la corriente eléctrica (tipo de contacto, magnitud del campo eléctrico, temperatura), existe la probabilidad de que se presente la inyección de portadores de carga eléctrica (electrones y huecos) y también su posterior atrapamiento al interior del material. La similitud entre las curvas de las figuras 1a y 1b puede explicarse debido a que corresponden a fenómenos de relajación de propiedades diferentes. Sin embargo, ambos casos son el resultado de una manifestación macroscópica de la viscoelasticidad que presentan los materiales poliméricos.⁹



(a)



(b)

Fig. 1. Curvas típicas para mediciones de (a) relajación de esfuerzos y (b) corrientes transitorias para un material polimérico.

La interpretación de los datos experimentales se lleva a cabo utilizando modelos matemáticos, cuyos parámetros sirven de base para establecer relaciones entre la estructura, las propiedades y la morfología de los materiales poliméricos. Las corrientes transitorias $I(t)$ se componen de dos principales contribuciones: la primera está asociada con la corriente de polarización I_p , la cual depende del número de dipolos eléctricos que se orientan en la dirección del campo eléctrico; la segunda, está asociada a una corriente de conducción I_c , la cual está gobernada por los mecanismos de conducción que se dan a través de la interfaz electrodo-polímero (Schottky o Fowler-Nordheim), o bien, al interior del volumen de material (Poole-Frenkel, Iónico, Dipolar, SCLC).¹⁰ En este sentido, para la corriente de polarización se utiliza la ley de Curie-von Schweidler $I(t) = At^{-p}$, que consiste en una ley de potencia con exponente negativo. El valor del exponente se utiliza como un indicador del mecanismo de dicha corriente. Otra expresión clásica es una función exponencial negativa $\exp(-x)$, la cual resulta al resolver una ecuación diferencial del circuito resistor-capacitor (RC) en serie. Sin embargo, hay reportes en la literatura que ponen en evidencia que el uso de operadores diferenciales de orden entero proporciona desviaciones importantes entre los datos experimentales y las predicciones teóricas. Una alternativa es utilizar operadores de orden fraccionario, es decir, derivadas e integrales de orden no entero.¹¹⁻¹⁴ A esta rama de las matemáticas se le conoce como cálculo fraccionario, o en términos más exactos, método de derivación e integración de orden arbitrario. Diversos trabajos han sido reportados que hacen referencia a la solución de circuitos RC, RL y RLC desde un punto de vista analítico y teórico,¹⁵⁻¹⁸ empleando los conceptos del cálculo

fraccionario. Sin embargo, existen pocos trabajos de investigación donde se ponga en práctica estas herramientas matemáticas.

En este trabajo se propone emplear un modelo matemático en el ámbito del cálculo fraccionario para el análisis de las corrientes transitorias en materiales poliméricos. Se utiliza un operador diferencial de orden no entero bajo la definición de la derivada de Caputo, resolviendo una ecuación diferencial fraccionaria para un circuito RC en serie. La solución se expresa a través de la función Mittag-Leffler, la cual se compara con una ley de potencia, una función exponencial estirada, el modelo empírico de Cross, un modelo exponencial y un modelo generalizado. La validación experimental se lleva a cabo con datos de corriente vs. tiempo bajo condiciones isotérmicas para el polivinil butiral PVB, un termoplástico con aplicación en los sectores automotriz y arquitectónico, y que además funge como matriz orgánica en el desarrollo de materiales híbridos con aplicaciones como sensor y/o actuador.

MODELO FRACCIONARIO DEL CIRCUITO RC

El circuito RC en serie se utiliza como modelo análogo para la interpretación de las propiedades dieléctricas y fenómenos de relajación de diversos sistemas, como células, tejidos, polímeros, aceites, espumas, entre otros.^{16,17,19,20} El resistor se asocia con la disipación de energía en el sistema, mientras que el capacitor se asocia con el almacenamiento de energía. En la figura 2 se muestra un esquema del arreglo en serie para el circuito RC.

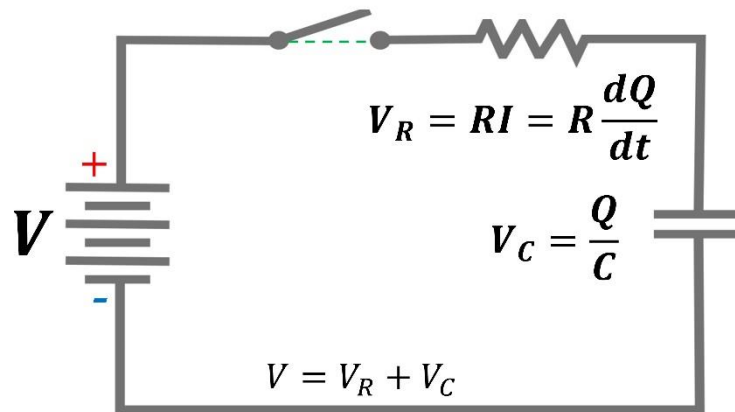


Fig. 2. Circuito RC en serie.

Utilizando las leyes de Kirchhoff y las ecuaciones constitutivas para el resistor y el capacitor, se obtiene una ecuación diferencial lineal, de primer orden y con coeficientes constantes.

$$CD_t^1 V = RC D_t^1 I + D_t^0 I \quad (1)$$

El operador diferencial se representa con $D_t^n f = d^n f / dt^n$, una derivada de orden n de la función f respecto al tiempo t . En la literatura clásica, en las ecuaciones diferenciales lineales se reemplazaban los operadores diferenciales de orden entero por operadores de orden fraccionario. Matemáticamente dicha estrategia es correcta y simple, pero desde el punto de vista dimensional y físico no lo es.^{15,16,18} Un análisis dimensional de los operadores diferenciales de orden entero y fraccionario revela que las unidades son diferentes (ecuación 2).

$$D_t^1 \sim \frac{1}{\tau}, \quad D_t^\alpha \sim \frac{1}{\tau^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (2)$$

Donde α es el orden fraccionario y τ es un parámetro que posee unidades de tiempo, cuya función principal es normalizar las unidades para que el sistema sea congruente. Por lo tanto, se establece la ecuación 3:

$$D_t^1 = \tau^{\alpha-1} D_t^\alpha \quad (3)$$

En este trabajo se utiliza un operador diferencial de orden fraccionario bajo la definición de Caputo^{21,22} (ecuación 4).

$${}_0^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(\xi)}{(t-\xi)^\alpha} d\xi \quad (4)$$

Donde α es el orden fraccionario que toma valores $0 < \alpha \leq 1$, ξ es una variable de integración, $\Gamma(\cdot)$ es la función gamma y f' es la derivada de primer orden. El núcleo de la integral se compone por una función de potencia, la cual es apropiada para el modelado de fenómenos de relajación y procesos con memoria.^{23,24} Esta definición tiene la ventaja de que su transformada de Laplace posee condiciones iniciales que corresponden con lo medido a nivel experimental, razón por la cual se utiliza ampliamente en física e ingeniería. Otro aspecto interesante es que bajo esta definición la derivada de una constante es cero. Esto no ocurre para otros operadores, por ejemplo, el de Riemann-Liouville. Para obtener la ecuación diferencial de orden fraccionario, se sustituyen los operadores de orden entero de la ecuación 1 por lo planteado en la ecuación 3, considerando $0 < \alpha \leq 1$, y un tiempo respuesta $\tau = RC$.

$$C \tau^{\alpha-1} D_t^\alpha V = \tau^\alpha D_t^\alpha I + D_t^0 I \quad (5)$$

Posteriormente, se utiliza la transformada de Laplace $\mathcal{L}\{\cdot\}$ para resolver la ecuación 5:

$$C \tau^{\alpha-1} s^\alpha \mathcal{L}\{V(t)\} = \tau^\alpha s^\alpha \mathcal{L}\{I(t)\} + \mathcal{L}\{I(t)\} \quad (6)$$

Consideramos que el polímero se somete a un escalón de voltaje $V(t) = V_0 u(t)$, donde V_0 es la amplitud del voltaje y $u(t)$ es la función escalón, y además la condición inicial $I(0) = 0$:

$$C \tau^{\alpha-1} s^\alpha \mathcal{L}\{V_0 u(t)\} = \tau^\alpha s^\alpha \mathcal{L}\{I(t)\} + \mathcal{L}\{I(t)\} \quad (7)$$

$$I(s) = \frac{\frac{V_0 C \tau^{\alpha-1}}{\tau^\alpha} \cdot s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{1}{\tau^\alpha}} \quad (8)$$

Luego se utiliza la transformada inversa de Laplace $\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$ para obtener una solución en el dominio del tiempo:

$$\mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \frac{V_0 C}{\tau} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{1}{\tau^\alpha}} \right\} \quad (9)$$

$$I(t) = \frac{V_0}{R} E_\alpha \left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha \right] \quad (10)$$

Donde $E_\alpha(\cdot)$ es la función Mittag-Leffler (M-L) de un parámetro, que se define mediante una expansión en serie (ecuación 11).

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (11)$$

Entonces, la solución analítica para la ecuación 5 resulta en la ecuación 12:

$$I(t) = I_0 \cdot E_\alpha \left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha \right] \quad (12)$$

Cuando $\alpha = 1$, se obtiene la solución clásica para la ecuación diferencial de orden entero (ecuación 1), la cual involucra a la función exponencial (ecuación 13).

$$I(t) = I_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (13)$$

De acuerdo con la naturaleza de las corrientes transitorias, la corriente total se expresa como la suma de la corriente de polarización I_p y la corriente de conducción I_c , $I(t) = I_p + I_c$. En la ecuación 14 se presenta la contribución de I_p denotada por la solución de la ecuación diferencial de orden fraccionario con la función M-L, y la corriente de conducción I_c , que involucra ciertos mecanismos de conducción a través de la interfaz o a través del volumen. I_0 denota una corriente inicial (a tiempos muy cortos), α es el orden fraccionario, y τ corresponde al tiempo respuesta o también conocido como tiempo de relajación.

$$I(t) = I_0 \cdot E_\alpha \left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha \right] + I_c \quad (14)$$

La ecuación anterior se compara con tres funciones empíricas: la función exponencial estirada, la ley de potencia y la función empírica de Cross.²⁵ Se ha reportado que mediante el concepto de la derivada conformable se puede obtener la función exponencial estirada, también conocida como función Kohlrausch-Williams-Watts (KWW).^{16,26} El parámetro β de la ecuación 15 se conoce como exponente estirado, $0 < \beta \leq 1$, con I_0 denotando la corriente inicial.

$$I(t) = I_0 \cdot \exp\left[-\frac{1}{\beta}\left(\frac{t}{\tau}\right)^\beta\right] + I_c \quad (15)$$

Asimismo, en la literatura se establece que las corrientes transitorias también pueden seguir una función de potencia, que se conoce como ley de Curie-von Schweidler CVS, $I(t) = At^{-p}$, donde A es un parámetro dependiente de la temperatura y p denota un exponente de decaimiento, con $0 < p \leq 1$. En la ecuación 16 se presenta el modelo empleado para el análisis de los datos.

$$I(t) = At^{-p} + I_c \quad (16)$$

Por último, una función empírica que puede ser utilizada para el análisis de las corrientes transitorias es el modelo de Cross, ampliamente empleado en el campo de la reología para el análisis de datos de viscosidad, particularmente en soluciones poliméricas y sustancias con un comportamiento pseudoplástico.²⁵ La ecuación 17 es el modelo propuesto, donde B es un parámetro relacionado con la corriente inicial, λ es una constante de tiempo y m denota un exponente de decaimiento.

$$I(t) = \frac{B}{1 + (\lambda t)^m} + I_c \quad (17)$$

MODELADO TEÓRICO DE CORRIENTES TRANSITORIAS

En las figuras 3, 4, 5 y 6 se presentan las respuestas teóricas de las ecuaciones 14, 15, 16 y 17, respectivamente, con el objetivo de observar la respuesta que ofrece cada modelo. De manera heurística se seleccionaron los parámetros $I_0=A=B=100$ nA, $I_C=1$ nA y $\tau=1/\lambda=1$ s. Los parámetros α , β , p y m tomaron valores entre 0 y 1.

En la figura 3 se puede observar una disminución de la corriente eléctrica a medida que transcurre el tiempo; también se observa el efecto el orden fraccionario, generando curvas con diferente forma. A tiempos cortos se observa que la corriente inicia en un valor de 100 nA y a medida que transcurre el tiempo la corriente disminuye según el valor del orden fraccionario. Para tiempos menores al tiempo de relajación se observa que el orden fraccionario gobierna de 1 a 0, pero para tiempos mayores al tiempo de relajación el comportamiento se invierte, es decir, hay una disminución de la corriente más pronunciada, la cual se da para un orden fraccionario de 1 y a medida que disminuye el orden fraccionario la corriente disminuye de forma más lenta. Cuando el orden fraccionario es igual a 1 se recupera la solución clásica de la función exponencial.

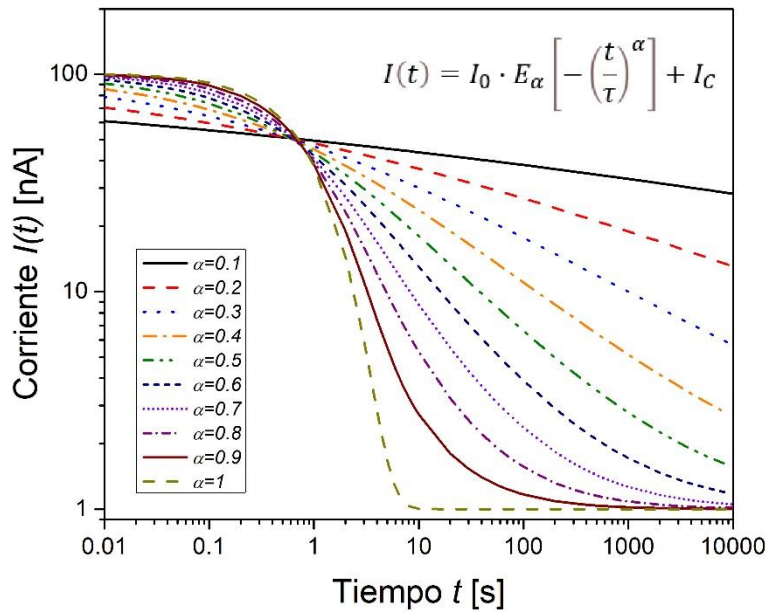


Fig. 3. Respuesta teórica para corriente transitoria con función Mittag-Leffler.

Por su parte, en la figura 4 se presenta la respuesta teórica para el modelo KWW, donde también se observa una disminución de la corriente a medida que transcurre el tiempo. Sin embargo, el efecto del parámetro β es distinto a lo observado en la figura 3. Esto se debe a que la función evaluada es una función exponencial cuyo argumento es una ley de potencia. También cuando el parámetro $\beta = 1$ se recupera la solución clásica de la función exponencial.

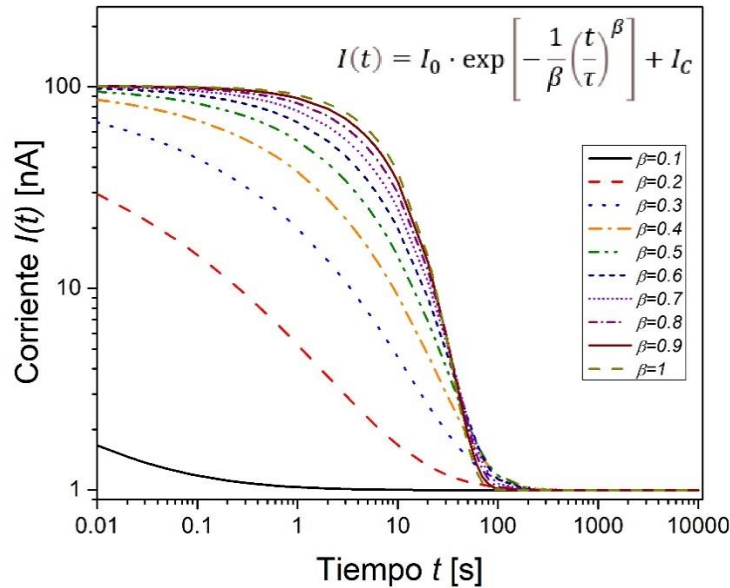


Fig. 4. Respuesta teórica para corriente transitoria con función KWW.

En la figura 5 se muestra la respuesta que ofrece el modelo de ley de potencia CVS, donde se observa que la corriente disminuye a medida que transcurre el tiempo. Sin embargo, la forma de las curvas sí se aleja de lo observado a nivel experimental.^{3,4} Para este caso las curvas se cruzan para un $t = 1$, lo cual se debe a la forma de la función matemática.

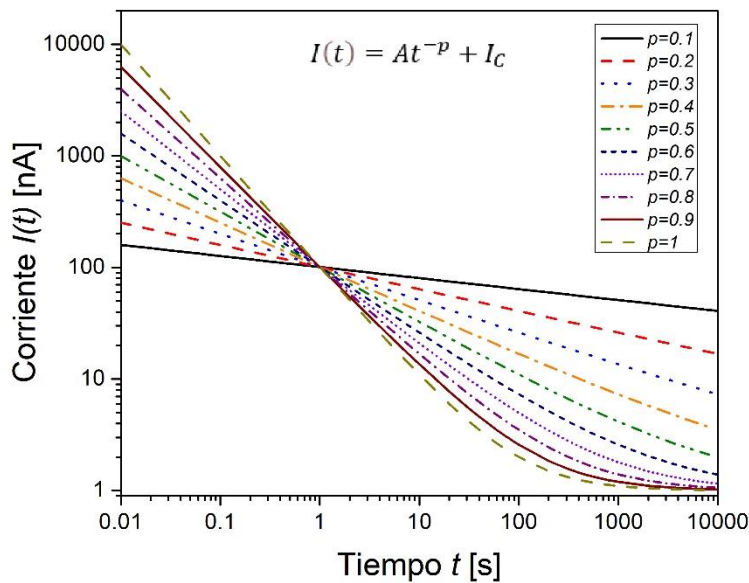


Fig. 5. Respuesta teórica para corriente transitoria con función de potencia.

La respuesta teórica que ofrece el modelo empírico de Cross se presenta en la figura 6. En esta figura se observa una respuesta similar a lo que ofrece el modelo de M-L. Si se toma el resto de los parámetros como fijos, la variación del valor del exponente m da como resultado curvas que podrían ajustarse a los datos experimentales de corrientes transitorias. En la literatura es práctica común tomar modelos o funciones que se utilizan para representar o analizar datos de cierto tipo, por ejemplo, mecánicos, eléctricos u ópticos, y emplearlos de forma análoga para el estudio de ciertos fenómenos cuyas curvas experimentales son similares.^{27,28}

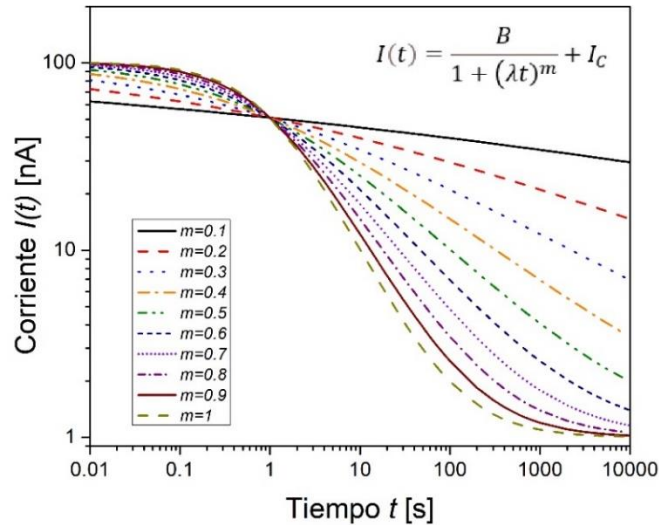


Fig. 6. Respuesta teórica para corriente transitoria con modelo de Cross.

COMPARACIÓN ENTRE DATOS EXPERIMENTALES Y PREDICCIONES TEÓRICAS

En este apartado se presenta la comparativa de datos experimentales de las corrientes transitorias obtenidas para una película de polivinil butiral PVB con un espesor de 100 μm . Ésta fue sometida a un voltaje constante en corriente directa de 150 V (campo eléctrico constante) durante un intervalo de 1000 s y a temperatura constante. Bajo este escenario, se registró la corriente eléctrica con un electrómetro Keithley 6517B utilizando una configuración tipo platos paralelos.^{7,14}

En la figura 7 se presenta la comparación entre los datos experimentales y los modelos presentados en la sección anterior. El ajuste de los modelos a los datos se realiza con paquetes comerciales, por ejemplo, Matlab, Origin o Excel. En las figuras 7a, 7b y 7d se puede observar que los modelos de M-L, KWW y Cross se ajustan a los datos de corriente vs. tiempo. Respecto al modelo de ley de potencia (figura 7c), se observa una desviación importante a tiempos cortos. También se ha colocado como referencia el ajuste a la solución clásica que utiliza la función exponencial (figura 7e), donde se aprecia que no sigue la forma de la curva experimental.

Por otro lado, una estrategia ampliamente utilizada consiste en desarrollar modelos generalizados donde se colocan circuitos RC en serie o paralelo, lo cual da mejores resultados, pero trae en consecuencia un número muy grande de parámetros con una interpretación física muy compleja o nula.^{15,18} En la figura 7f se presenta la comparación empleando un modelo generalizado con 3 elementos RC en paralelo ($N = 3$), dando lugar a un ajuste adecuado a los datos. Al tomar como referencia el valor del coeficiente de correlación R^2 como un indicador del ajuste o representación de los datos experimentales, se puede considerar que aquellos que presentan un R^2 mayor a 0.9 pueden tomarse como aceptables. Entonces, se puede considerar que los modelos M-L, KWW y Cross son apropiados para los datos experimentales presentados en este trabajo.

Un hecho interesante es que la función Mittag-Leffler presenta dos aproximaciones asintóticas, a tiempos cortos ($t \rightarrow 0$), $E_\alpha(-z^\alpha) \sim \exp[-z^\alpha/\Gamma(1 + \alpha)]$, y a tiempos largos ($t \rightarrow \infty$), $E_\alpha(-z^\alpha) \sim z^{-\alpha}/\Gamma(1 - \alpha)$. Esto significa que $E_\alpha(\cdot)$ interpola entre la función exponencial estirada KWW y una ley de potencia CVS.²⁹

Respecto al orden fraccionario $\alpha = 0.686$ (figura 7a), el valor obtenido puede interpretarse como una medida de la tasa de disipación de energía en el material polimérico.^{13,14,16} Para β y m , también se obtuvieron valores entre 0 y 1, aunque es difícil darles una interpretación física. El orden fraccionario en las ecuaciones diferenciales de orden no entero da como resultado un grado adicional de libertad que permite el análisis de sistemas complejos y no lineales, que en comparación con modelos clásicos o generalizados produce un mejor ajuste y descripción de las curvas experimentales con una menor cantidad de parámetros.

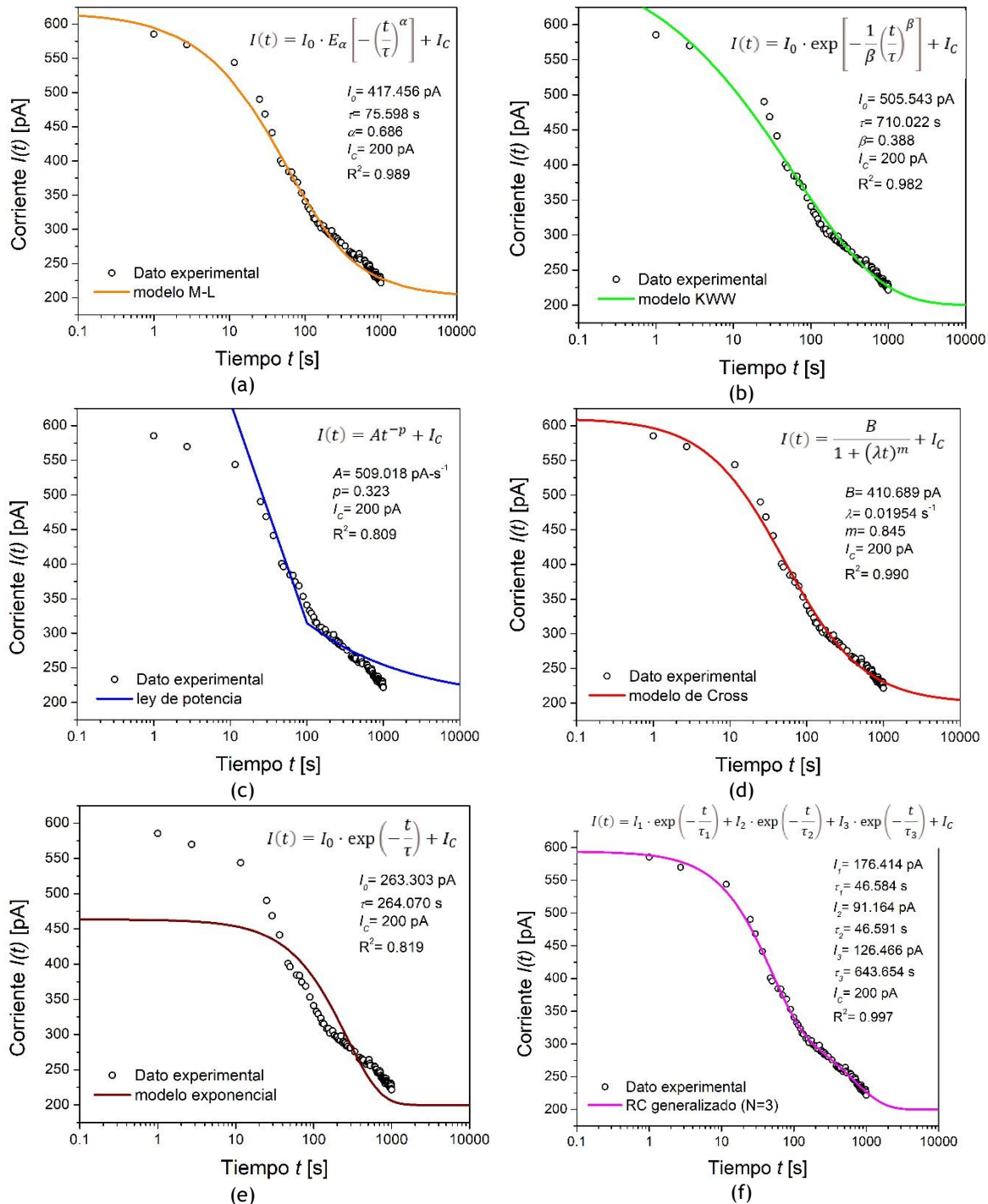


Fig. 7. Comparación entre datos experimentales y modelos: (a) modelo de M-L, (b) modelo KWW, (c) ley de potencia, (d) modelo de Cross, (e) modelo exponencial y (f) modelo generalizado. En las gráficas se presentan los valores obtenidos para los parámetros de cada modelo.

CONCLUSIONES

Las curvas experimentales de las corrientes transitorias, una manifestación eléctrica, son análogas a las curvas de relajación de esfuerzos, una manifestación mecánica. El uso de modelos empíricos es una práctica común para la interpretación de datos experimentales, pero dan como resultado parámetros cuya interpretación está alejada de un sentido físico. En este trabajo se planteó el uso del

cálculo fraccionario como estrategia matemática para el modelado de las corrientes transitorias, donde el orden fraccionario se relacionó con la tasa de disipación de energía en un material polimérico. También se propuso el uso del modelo empírico de Cross, el cual se ajustó a lo observado a nivel experimental. La selección del modelo a utilizar dependerá del nivel de precisión que se busca, y del costo computacional que esto conlleva. La metodología propuesta puede ser empleada para el análisis de corrientes transitorias en materiales poliméricos, nanocompuestos, aislantes, dieléctricos y otros sistemas similares.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la FIME de la UANL por el apoyo brindado durante esta investigación.

REFERENCIAS

1. C. Guillermin, P. Rain, S.W. Rowe, Transient and steady-state currents in epoxy resin, *J. Phys. D. Appl. Phys.* 39 (2006) 515–524. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/39/3/015>.
2. H.F.M. Mohamed, E.E. Abdel-Hady, W.M. Mohammed, Investigation of Transport Mechanism and Nanostructure of Nylon-6,6/PVA Blend Polymers, *Polymers (Basel)*. 15 (2022) 107. <https://doi.org/10.3390/polym15010107>.
3. F. Namouchi, H. Guermazi, P. Notingher, S. Agnel, Effect of space charges on the local field and mechanisms of conduction in aged PMMA, *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.* 13 (2010) 012006. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/13/1/012006>.
4. S. Morsalin, B.T. Phung, Dielectric response study of service-aged XLPE cable based on polarisation and depolarisation current method, *IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul.* 27 (2020) 58–66. <https://doi.org/10.1109/TDEI.2019.008306>.
5. C. Laurent, G. Teyssedre, S. Le Roy, F. Baudoin, Charge dynamics and its energetic features in polymeric materials, *IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul.* 20 (2013) 357–381. <https://doi.org/10.1109/TDEI.2013.6508737>.
6. C. Mouchache, N. Saidi-Amroun, V. Griseri, M. Saidi, G. Teyssedre, Electrical Conduction and Space Charge in Gamma-Irradiated XLPE, *IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul.* 30 (2023) 2099–2106. <https://doi.org/10.1109/TDEI.2023.3271612>.
7. J.G. Puente-Córdoba, E. Reyes-Melo, B. López-Walle, Estudio de los mecanismos de conducción eléctrica en películas delgadas de PVB, *Ingenierías* 20 (2017) 55–72. https://ingenierias.uanl.mx/anteriores/76/documentos/A20_N76_estudio_de_los_mecanismos.pdf.
8. S. Matsuoka, Entropy, free volume, and cooperative relaxation, *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.* 102 (1997) 213. <https://doi.org/10.6028/jres.102.017>.
9. B. Hadri, P.R. Mamy, J. Martinez, M. Mostefa, Electrical conduction in a semicrystalline polyethylene terephthalate in high electric field, *Solid State Commun.* 139 (2006) 35–39. <https://doi.org/10.1016/j.ssc.2006.04.034>.
10. F.-C. Chiu, A Review on Conduction Mechanisms in Dielectric Films, *Adv. Mater. Sci. Eng.* 2014 (2014) 1–18. <https://doi.org/10.1155/2014/578168>.
11. P.A. Ryapolov, E.B. Postnikov, Mittag–Leffler Function as an Approximant to the Concentrated Ferrofluid’s Magnetization Curve, *Fractal Fract.* 5 (2021) 147. <https://doi.org/10.3390/fractalfract5040147>.
12. I.Y. Miranda-Valdez, J.G. Puente-Córdoba, F.Y. Rentería-Baltierrez, L. Fliri, M. Hummel, A. Puisto, J. Koivisto, M.J. Alava, Viscoelastic phenomena in methylcellulose aqueous systems: Application of fractional calculus, *Food Hydrocoll.* 147 (2024) 109334. <https://doi.org/10.1016/j.foodhyd.2023.109334>.
13. F.Y. Rentería-Baltierrez, M.E. Reyes-Melo, J.G. Puente-Córdoba, B. López-Walle, Application of fractional calculus in the mechanical and dielectric correlation model of hybrid

- polymer films with different average molecular weight matrices, *Polym. Bull.* 80 (2023) 6327–6347. <https://doi.org/10.1007/s00289-022-04365-1>.
14. F.Y. Rentería-Baltierra, M.E. Reyes-Melo, J.G. Puente-Córdoba, B. López-Walle, Correlation between the mechanical and dielectric responses in polymer films by a fractional calculus approach, *J. Appl. Polym. Sci.* 138 (2021). <https://doi.org/10.1002/app.49853>.
 15. E. Zambrano-Serrano, M.A. Platas-Garza, A.E. Loya-Cabrera, G.E. Cedillo-Garza, C. Posadas-Castillo, Comportamiento de orden fraccionario en la respuesta de un circuito RC mediante derivada de núcleo singular, *Ingenierías* 24 (2021) 22–32. <https://doi.org/10.29105/ingenierias24.91-19>.
 16. J.G. Puente-Córdoba, F.Y. Rentería-Baltierra, M.E. Reyes-Melo, La derivada conformable y sus aplicaciones en ingeniería, *Ingenierías* 23 (2020) 20–31. <https://doi.org/10.29105/ingenierias23.88-3>.
 17. J.F. Gómez-Aguilar, J. Rosales-García, M. Guía-Calderón, J.R. Razo-Hernández, Fractional RC and LC Electrical Circuits, *Ing. Investig. y Tecnol.* 15 (2014) 311–319. [https://doi.org/10.1016/s1405-7743\(14\)72219-x](https://doi.org/10.1016/s1405-7743(14)72219-x).
 18. J.F. Gómez-Aguilar, A. Atangana, V.F. Morales-Delgado, Electrical circuits RC, LC, and RL described by Atangana–Baleanu fractional derivatives, *Int. J. Circuit Theory Appl.* 45 (2017) 1514–1533. <https://doi.org/10.1002/cta.2348>.
 19. F. Gómez-Aguilar, J. Rosales-García, M. Guía-Calderón, J. Bernal-Alvarado, Analysis of Equivalent Circuits for Cells: A Fractional Calculus Approach, *Ing. Investig. y Tecnol.* 13 (2012) 375–384. <https://doi.org/10.22201/fi.25940732e.2012.13n3.035>.
 20. K. Bandara, C. Ekanayake, T. Saha, Modelling the dielectric response measurements of transformer oil, *IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul.* 22 (2015) 1283–1291. <https://doi.org/10.1109/TDEI.2015.7076832>.
 21. M.D. Ortigueira, J.A. Tenreiro Machado, What is a fractional derivative?, *J. Comput. Phys.* 293 (2015) 4–13. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.07.019>.
 22. G. Sales Teodoro, J.A. Tenreiro Machado, E. Capelas de Oliveira, A review of definitions of fractional derivatives and other operators, *J. Comput. Phys.* 388 (2019) 195–208. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.03.008>.
 23. A. Bonfanti, J.L. Kaplan, G. Charras, A. Kabla, Fractional viscoelastic models for power-law materials, *Soft Matter* 16 (2020) 6002–6020. <https://doi.org/10.1039/D0SM00354A>.
 24. A. Atangana, J.F. Gómez-Aguilar, Decolonisation of fractional calculus rules: Breaking commutativity and associativity to capture more natural phenomena, *Eur. Phys. J. Plus* 133 (2018) 166. <https://doi.org/10.1140/epjp/i2018-12021-3>.
 25. J.G. Puente Córdoba, C.L. Hernández Ramírez, M.E. Reyes Melo, F.Y. Rentería Baltierra, I.Y. Miranda Valdez, Estudio reológico de soluciones poliméricas de carboximetil celulosa, *Ing. Investig. y Tecnol.* 23 (2022) 1–10. <https://doi.org/10.22201/fi.25940732e.2022.23.2.012>.
 26. J. Rosales-García, J.A. Andrade-Lucio, O. Shulika, Conformable derivative applied to experimental Newton’s law of cooling, *Rev. Mex. Física* 66 (2020) 224–227. <https://doi.org/10.31349/RevMexFis.66.224>.
 27. Y. Zhao, P. Chen, D. Cao, Extension of Modified Havriliak-Negami Model to Characterize Linear Viscoelastic Properties of Asphalt Binders, *J. Mater. Civ. Eng.* 28 (2016). [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)MT.1943-5533.0001491](https://doi.org/10.1061/(ASCE)MT.1943-5533.0001491).
 28. N. Zeggai, B. Dali Youcef, F. Dubois, T. Bouchaour, P. Supiot, L. Bedjaoui, U. Maschke, Analysis of dynamic mechanical properties of photochemically crosslinked poly(isobornylacrylate-co-isobutylacrylate) applying WLF and Havriliak-Negami models, *Polym. Test.* 72 (2018) 432–438. <https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2018.10.038>.
 29. F. Mainardi, Why the Mittag-Leffler Function Can Be Considered the Queen Function of the Fractional Calculus?, *Entropy* 22 (2020) 1359. <https://doi.org/10.3390/e22121359>.