Dos soluciones al problema de servosistemas

Efrain Alcorta García
Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Cd. Universitaria, San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México.
efrain.alcortagr@uanl.edu.mx

RESUMEN

El diseño de servosistemas es un problema clásico en la teoría de control. Dos enfoques respecto a este problema son considerados en este trabajo. Por un lado, se plantea el problema de servosistemas como uno de control óptimo de horizonte infinito. La solución bien conocida requiere resolver una ecuación algebraica de Riccati así como la correspondiente ecuación de seguimiento (en tiempo inverso). Una alternativa se presenta como segunda opción, en la cual se parte de un planteamiento de problema de regulación y se le agrega un pre-compensador para que se logre alcanzar el valor final deseado de la salida del sistema. Las dos propuestas son comparadas utilizando un ejemplo de aplicación.

PALABRAS CLAVE

Servosistema, regulación, criterio lineal cuadrático, sistema lineal.

ABSTRACT

The design of servo systems is a classical problem in control theory. Two approaches to this problem are considered in this paper. On the one hand, the servo system problem is posed as an infinite horizon optimal control problem. The well-known solution requires solving an algebraic Riccati equation as well as the corresponding tracking equation (in inverse time). An alternative is presented as a second option, in which a regulation problem approach is used, and a pre-compensator is added to achieve the desired final value of the system output. The two proposals are compared using an application example.

KEYWORDS

Servo system, regulation, linear quadratic criterion, linear system.

INTRODUCCIÓN

El diseño de servosistemas de segundo orden es un problema clásico en la teoría de control, relevante en aplicaciones como robótica, sistemas mecatrónicos y control de motores eléctricos. Este tipo de sistemas se caracterizan por su respuesta dinámica sencilla, pero requieren enfoques rigurosos para garantizar un desempeño confiable frente a perturbaciones, incertidumbres y restricciones físicas. La necesidad de soluciones eficientes y robustas se vuelve aún más crítica en escenarios donde el cumplimiento de especificaciones como tiempo de asentamiento, sobre impulso y rechazo de perturbaciones es fundamental para el éxito operativo.

En la literatura especializada se pueden encontrar distintas soluciones al problema del diseño de servosistemas. Entre las cuales se encuentran esquemas basados en el uso de control integral,[1] las cuales suelen ser robustas a incertidumbre del modelo, pero de desempeño poco favorable;[1] en contraste, la compensación por redes de controladores proporcionales-derivativos-integrales (PID) pueden brindar un compromiso entre robustez y desempeño, pero la sintonía de los parámetros puede llegar a ser elaborada.[2] Alto desempeño y robustez se puede alcanzar si se permite una mayor complejidad, como el uso de técnicas no lineales y/o adaptables[3] o mediante el uso de control robusto.[4]

En este trabajo, se presentan dos enfoques fundamentados en resultados bien conocidos, pero con una aplicación novedosa para resolver el problema del diseño de servosistemas de segundo orden con desempeño garantizado. La primera solución se fundamenta en el control óptimo y es bien conocida en la literatura, ver por ejemplo.[5,6] Sin embargo, el índice de desempeño correspondiente es determinado de tal forma que las especificaciones de desempeño requeridas se alcancen. Mientras que la segunda utiliza la solución subóptima al problema de regulación y una manera ingeniosa de calcular la compensación que complementa el resultado, ver por ejemplo.[7, 8] Ambos enfoques se desarrollan bajo un marco teórico que garantiza cumplimiento explícito de especificaciones dinámicas clave, evaluando además su efectividad mediante simulaciones y casos prácticos representativos.

El documento se organiza como sigue: en la sección 2 se describe el problema y sus formulaciones. La sección 3 presenta la primera solución propuesta, seguida de la descripción de la segunda en la sección 4. Finalmente, los resultados numéricos y la discusión se exponen en la sección 5, concluyendo con observaciones finales y posibles direcciones futuras.

Este trabajo tiene como objetivo contribuir a la práctica del diseño de sistemas de control, ofreciendo herramientas para aplicaciones que demandan confiabilidad y desempeño bajo condiciones desafiantes. Se consideran solo sistemas de una entrada y una salida. El caso en el que se tienen la misma cantidad de entradas y salidas puede también ser abordado con la metodología revisada.

EL PROBLEMA DE SERVOSISTEMAS Y SUS FORMULACIONES

El problema de servo control implica diseñar un controlador que permita a un sistema seguir una trayectoria de referencia o alcanzar un punto objetivo con precisión. En términos formales, un sistema lineal de tiempo continuo se puede modelar como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{1}$$

El objetivo del controlador es diseñar una ley de control $u(t)$ tal que la salida $y(t)$ siga una señal de referencia $r(t)$ con el menor error posible. Este objetivo se puede formalizar mediante la minimización del error de seguimiento $e(t) = r - y(t)$.

Consideraciones adicionales:

- *Estabilidad*: El sistema controlado debe ser estable, lo cual implica que las raíces del polinomio característico de la matriz $A - BK$ deben estar en el semiplano izquierdo del plano complejo.
- *Desempeño*: Se deben considerar criterios de desempeño como el tiempo de establecimiento, sobrepaso y error en estado estacionario.
- *Error en Estado Estacionario*: El error en estado estacionario debe ser pequeño o nulo, dependiendo de los requerimientos del sistema.

Para un sistema lineal, una ley de control típica que resuelve el problema de servosistemas consiste en la retroalimentación del estado:

$$\mathrm{u(t)} = -\mathrm{K\,x(t)} + \mathrm{K_R r} \tag{2}$$

donde K es la matriz de ganancia del controlador, y K_R es una matriz de ganancia que puede depender de K.

PRIMERA SOLUCIÓN CONSIDERADA

Primeramente, se plantea un problema de control de seguimiento óptimo con horizonte infinito, ver por ejemplo.[5, 6] A diferencia del planteamiento encontrado en la literatura antes mencionada, se considera una selección específica del índice de desempeño.[9] Dado el sistema lineal (1), considerar el índice de desempeño:

$$J = \int_0^\infty [(x(\tau) - r)^T Q (x(\tau) - r) + Ru^2(\tau)] d\tau \tag{3}$$

$$\text{Con } Q = diag\{q_1, q_2\};\ R = 1.$$

La ley de control que minimiza el índice de desempeño (3) está dada por:

$$u(t) = -R^{-1}B^T S\, x(t) - R^{-1}B^T v(t) \tag{4}$$

$$0 = A^T S + SA + C^T QC - SBR^{-1}B^T S \tag{5}$$

$$-\dot{v}(t) = (A - BR^{-1}B^T S)^T v(t) - Qr, \qquad v(T) = 0 \tag{6}$$

Notando que (6) es una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes y entrada constantes, sin embargo, representa un problema de valor final. Se puede determinar el valor constante al que converge la solución, como es sugerida en,[6] aplicando un cambio de variable de tiempo como $\tau = T - t$. Una vez resuelto hacer converger T al infinito.

SEGUNDA SOLUCIÓN CONSIDERADA

La segunda solución considera la propuesta de[7] (capitulo 5) para resolver el problema de servosistemas para referencia constante mediante cambio de coordenadas. La propuesta es obtener la retroalimentación de estado requerida mediante la solución a un problema de regulación al origen con horizonte infinito, es decir, resolviendo una ecuación algebraica de Riccati. Para mostrar el enfoque de,[7] se parte del sistema (1) y bajo el supuesto de estabilidad se considerará una entrada ideal u^* de tal forma que al aplicarla sobre el sistema (1), después de un transitorio se alcanza el valor constante x^*, de tal suerte que el sistema se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} 0 &= Ax^* + Bu^* \\ r &= Cx^* + Du^* \end{aligned} \tag{7}$$

Donde u^* y x^* se consideran como base para proponer un cambio de coordenadas, es decir, $\tilde{x} \triangleq x(t) - x^*$ y $\tilde{u} \triangleq u(t) - u^*$. En las nuevas coordenadas la dinámica se puede establecer derivando con respecto al tiempo $\tilde{x}$:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= Ax(t) + Bu(t) = A\tilde{x} + B\tilde{u} + \underbrace{Ax^* + Bu^*}_{=0} \\ \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B\tilde{u} \end{aligned} \tag{8}$$

De donde la ley de control requerida para llevar el estado $\tilde{x}$ al origen (y con esto lograr que el estado del sistema original logre alcanzar el ideal) es justamente una regulación al origen:

$$\tilde{u}(t) = -K\tilde{x}(t) \tag{9}$$

Y volviendo a las coordenadas originales:

$$\begin{aligned} u(t) - u^* &= -K(x(t) - x^*) \\ u(t) &= -Kx(t) + Kx^* + u^* = -Kx(t) + \begin{bmatrix} K & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ u^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De la ecuación (7) se puede despejar el vector $\begin{bmatrix} x^* \\ u^* \end{bmatrix}$ como:

$$\begin{bmatrix} x^* \\ u^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

Con lo que la ley de control completa se puede escribir como sigue:

$$u(t) = -Kx(t) + \begin{bmatrix} K & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \tag{10}$$

$$K = R^{-1}B^T S \tag{11}$$

$$0 = A^T S + SA + Q - SBR^{-1}B^T S \tag{12}$$

Una contribución consiste en el cálculo óptimo de la retroalimentación K en lugar de solo tener ubicación de polos. Note que utilizando el segundo procedimiento se requiere determinar el valor de K primero y después de la pre-compensación como en la ecuación (10).

EJEMPLO DE APLICACIÓN

Con la finalidad de mostrar los procedimientos considerar el modelo simplificado del control de posición de un espejo montado sobre un galvanómetro, los cuales son comunes en sistemas de escaneo láser, en grabadores láser, impresoras láser, etc.[10] La ecuación diferencial correspondiente es:

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta = u(t) \tag{13}$$

Donde:

$$J = 0.001\ Kg\ m^2$$
$$b = 0.002\ \frac{N\ m\ s}{rad}$$
$$k = 0.1\ \frac{N\ m}{rad}$$

$u(t)$ es el par aplicado al actuador del espejo
$\theta(t)$ es el ángulo de orientación del espejo

O equivalentemente, al multiplicar por 1000 la ecuación, resulta:

$$\ddot{\theta} + 2\dot{\theta} + 100\ \theta = 1000\ u(t) \tag{14}$$

De donde resulta la representación de estado correspondiente:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Primera solución

Las matrices involucradas en el diseño son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix};\ \ D = 0;\ \ R = 1; Q = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

La solución a la ecuación algebraica de Riccati resulta:

$$S = \begin{bmatrix} 12.2559 & 0.00377 \\ 0.00377 & 0.00316 \end{bmatrix}$$

Con lo cual la ganancia del control ($K = R^{-1}B^T S$) queda:

$$K = \begin{bmatrix} 3.7742 & 0.0849 \end{bmatrix}$$

Para la solución estacionaria de la ecuación de seguimiento se obtiene

$$v = \begin{bmatrix} -61.2399 \\ -0.01935 \end{bmatrix}$$

la cual se obtuvo utilizando $r = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$. Por lo tanto $\mathrm{K_R r} = 19.3585$. La ley de control completa queda:

$$u^*(t) = -\begin{bmatrix} 3.7742 & 0.0849 \end{bmatrix} x^*(t) + 19.3585$$

Segunda solución

Para la segunda solución se utiliza el mismo valor de S y de K previamente calculado. Para la pre-alimentación, se calcula el valor utilizando la ecuación (10):

$$K_R = [3.7742 \quad 0.0849 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -100 & -2 & 1000 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3.874274$$

Y la ley de control resulta en:

$$u^*(t) = -[3.7742 \quad 0.0849]x^*(t) + 19.3713$$

DISCUSIÓN

Es importante hacer notar que, dado que ambos procedimientos utilizan la misma retroalimentación y tratándose de un sistema con una sola entrada y una sola salida, la pre-compensación requerida en ambas soluciones tiene que ser igual. De aquí se puede concluir que mediante el segundo procedimiento para el cálculo de la pre-compensación y el primero para la determinación de la ganancia de la retroalimentación se puede llegar de manera rápida a la determinación del control requerido.

Un nivel de ajuste adicional es la selección de las matrices de ponderación para garantizar un cierto desempeño requerido. Adicionalmente, se hace necesario revisar las cuestiones de robustez de ambos procedimientos. El primer procedimiento requiere algo más de trabajo computacional comparado con el segundo. Por otro lado, dado que el conocimiento de las matrices del sistema para obtener el control hace los procedimientos discutidos susceptibles a incertidumbre en las matrices del sistema.

REFERENCIAS

1. S. Domínguez, P. Campoy, J. M. Sebastian, A. Jiménez, (2006), Control en el espacio de estado, Prentice Hall.
2. I. D. Díaz Rodriguez, S. Han, S. P. Bhattacharyya, (2019), Analytical design of PID controllers, Springer.
3. R. Kelly, V. Santibañez, A. Loria, (2005), Control of robot manipulators in joint space, Springer.
4. Ch.-Ch. Tsui, (2022) Robust control system design: Advanced state space techniques. CRC-Press.
5. D. Kirk, (2004), Optimal control theory: an introduction, Dover books of electrical engineering.
6. F. L. Lewis, D. L. Vrabie, V. L. Syrmos, (2012) Optimal control, John Wiley & Sons.
7. R. H. Kwong, (2008), course notes on control systems, University of Toronto, Department of Electrical and Computer Engineering.
8. A. Saberi, A. A. Stoorvogel, P. Sannuti, (2000) Control of linear systems with regulation and input constraints, Springer.
9. J.-B. He, Q.-G. Wang, T.-H. Lee, (2000) PI/ PID controller tuning via LQR approach, Chemical Engineering Sciences, 55(2000) 2429-2439.
10. G. E. Marshall, G. E. Stutz, (2004), Handbook of optical and laser scanning, Marcel Dekker.