

Aproximación de operadores fraccionarios en el dominio de la frecuencia y su aplicación en sistemas caóticos

Ernesto Zambrano-Serrano^A, Miguel Ángel Platas-Garza^A,
Elizabeth Guadalupe Lara Hernández^A, Efraín Alcorta García^A,
Jesús Manuel Muñoz-Pacheco^B

^AUniversidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

^BBenemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias de la Electrónica, México
ernesto.zambranos@uanl.edu.mx, miguel.platasgrz@uanl.edu.mx, efrain.alcortagr@uanl.edu.mx,
elizabeth.larahr@uanl.edu.mx, jesusm.pacheco@correo.buap.mx.

RESUMEN

En este trabajo, se difunde una metodología para la aproximación del operador integrador fraccionario, basada en la respuesta en el dominio de la frecuencia. Esta aproximación permite aproximar un integrador de orden fraccionario mediante funciones de transferencia de orden entero, ajustando el orden fraccionario en función del ancho de banda y la precisión requerida. Se analizan dos rangos de orden fraccionario, $[0.1, 0.9]$ y $[0.9, 0.99]$, verificando que la pendiente del diagrama de magnitud corresponde al comportamiento de -20α dB/década. Finalmente, se implementa la aproximación en un sistema caótico de orden fraccionario, evaluando su efectividad en la generación de atractores extraños. Los resultados muestran que la metodología basada en diagramas de Bode ofrece una estrategia eficiente para modelar sistemas caóticos fraccionarios dentro de un rango de frecuencia específico y sus aplicaciones en ingeniería.

PALABRAS CLAVE

Integradores fraccionarios; Diagramas de Bode; Espacio de Estados; Xcos; caos.

ABSTRACT

In this work, a methodology for approximating the fractional-order integrator operator in the frequency domain is considered, based on Bode analysis. This approximation enables the representation of fractional-order systems using integer-order transfer functions, adjusting the fractional order according to the bandwidth and required accuracy. Two ranges of fractional order, $[0.1, 0.9]$ and $[0.9, 0.99]$, are analyzed, verifying that the amplitude diagram slope follows the behavior of -20α dB/decade. Finally, the approximation is implemented in a fractional-order chaotic system, evaluating its effectiveness in generating strange attractors. The results show that the methodology based on Bode diagrams provides an efficient strategy for modeling fractional order chaotic systems within a specific frequency range and its applications in engineering.

KEYWORDS

Fractional Integrators; Bode diagrams; State Space; Xcos; chaos.

INTRODUCCIÓN

Imagina un mundo donde el presente no solo depende del instante anterior, sino de toda su historia. Esa es la esencia del cálculo fraccionario. A diferencia del cálculo clásico, basado en derivadas y ecuaciones de orden entero, el cálculo fraccionario incorpora memoria y efectos heredados, permitiendo modelar sistemas con dinámicas más ricas y complejas^{1,2}.

Este enfoque ha encontrado aplicaciones en una gran variedad de áreas, que van desde el control de sistemas mecánicos y eléctricos y de biomedicina, donde describe la propagación de señales en tejidos biológicos^{3,4}. De igual manera desempeña un papel clave en el estudio de materiales viscoelásticos, en la cual la respuesta a una fuerza no solo depende de la magnitud aplicada, sino también de su historial previo. En el ámbito del caos, esta propiedad introduce nuevas complejidades en la dinámica del sistema, que pueden exhibir bifurcaciones, coexistencia de atractores y comportamientos dinámicos no observados en sus contrapartes de orden entero⁵.

El estudio de sistemas caóticos fraccionarios ha demostrado que la variación del orden fraccionario no solo modifica el comportamiento transitorio, sino también influye en la estabilidad de los atractores como en su estructura geométrica dentro del espacio de fases. Esto ha motivado investigaciones sobre la relación entre la memoria de los operadores fraccionarios y la generación de caos, así como su impacto en aplicaciones prácticas, como la criptografía, el análisis de sistemas mecánicos y eléctricos, y el modelado de sistemas neuronales⁶.

Dentro del análisis numérico de sistemas fraccionarios, se han desarrollado dos enfoques principales el dominio del tiempo y de la frecuencia. Los métodos en el dominio del tiempo están basados en la discretización de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, destacando algoritmos como Adams-Bashforth-Moulton⁷ en su versión predictor-corrector. Estos métodos permiten obtener soluciones precisas, pero su implementación puede ser computacionalmente costosa cuando se requiere evaluar sistemas dinámicos de largo plazo⁸.

Por otro lado, los métodos en el dominio de la frecuencia se centran en la aproximación de operadores fraccionarios mediante funciones de transferencia de orden entero, facilitando su implementación en sistemas lineales e ingeniería de control. Entre los métodos más utilizados se encuentran los de Charef⁹, Carlson¹⁰ y Oustaloup¹¹, los cuales permiten construir aproximaciones racionales del operador fraccionario $1/s^\alpha$. En particular, el método de Charef ha demostrado ser una técnica robusta para obtener aproximaciones con una buena relación entre precisión y complejidad computacional.

Dado que los elementos fraccionarios presentan una respuesta de frecuencia característica con una pendiente de -20α dB/década, en este trabajo se explora la aproximación del integrador fraccionario en el dominio de la frecuencia, utilizando diagramas de Bode para representar su comportamiento en distintos rangos de orden fraccionario. Para ello, empleamos un método basado en la aproximación de la pendiente mediante un conjunto de líneas rectas en zigzag, con segmentos de 0 dB/década y -20 dB/década. Este enfoque permite obtener una representación lineal del integrador fraccionario dentro de una banda de frecuencia específica, donde el orden de la aproximación depende tanto del ancho de banda seleccionado como del nivel de precisión requerido. Posteriormente, se evaluará la efectividad de estas aproximaciones y su aplicación en un sistema caótico de orden fraccionario, verificando que preserve la generación de atractores extraños.

SÍNTESIS DEL INTEGRADOR FRACCIONARIO

Una de las formas más comunes de describir el comportamiento de un sistema de orden fraccionario es mediante su función de transferencia. En este contexto, consideramos la siguiente expresión:

$$G(s) = \frac{1}{s^\alpha}, \quad (1)$$

donde $s \in \mathbb{C}$ y $G = (j\omega)$ con $s = j\omega$ representa la evaluación de la función de transferencia en el dominio de la frecuencia siendo α es un número positivo que representa el orden fraccionario del sistema. Entonces, la función de transferencia de un sistema de orden fraccionario que opera en múltiples frecuencias se describe mediante:

$$G(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{s}{p_{T_i}}\right)^{\alpha_i}}, \quad 0 < \alpha_i < 1; \text{ para } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

donde $1/p_{T_i}$, representa la constante de tiempo y α_i es el orden fraccionario del sistema. Con estos parámetros, el operador fraccionario puede modelarse en el dominio de la frecuencia mediante la función de transferencia de un polo de potencia fraccionaria, dada por:

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (3)$$

dado que el ancho de banda de un sistema dinámico es acotado, la magnitud de la respuesta en frecuencia derivada de (3) puede ser aproximada por un sistema con múltiples polos y según el método mostrado en la figura.⁹

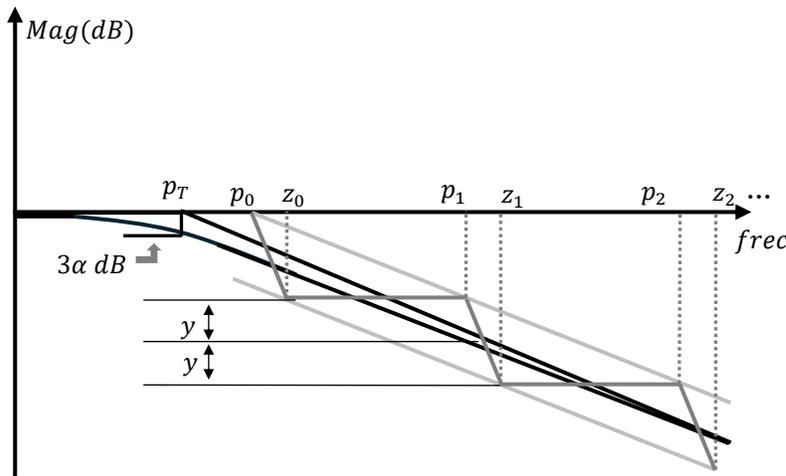


Fig. 1. Diagrama de Bode de $\frac{1}{1+(s/p_T)^\alpha}$ con una pendiente asintótica de -20α dB/década y su aproximación mediante líneas rectas en zig-zag con pendientes individuales de -20 y 0 dB/década.

En consecuencia, la función de transferencia que representa la aproximación al integrador fraccionario de la siguiente forma:

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\alpha} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (4)$$

donde el número total de polos en la función de transferencia es N . De este modo, la expresión de la función de orden fraccionario $\frac{1}{s^\alpha}$ se reduce a la determinación de los ceros y polos del sistema de orden entero.

De acuerdo con el método de aproximación en el dominio de la frecuencia mediante el diagrama de Bode, si el error de cálculo de las variables del sistema dinámico no excede y dB ($y > 0$), los ceros y polos del sistema dinámico pueden determinarse de acuerdo con la siguiente ecuación.

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 = p_T 10^{y/(20\alpha)}; \\ z_0 = p_0 10^{y/(10(1-\alpha))}; \\ p_1 = z_0 10^{y/(10\alpha)}; \\ z_1 = p_1 10^{y/(10(1-\alpha))}; \\ \vdots \\ z_{N-1} = p_{N-1} 10^{y/(10(1-\alpha))}; \\ p_N = z_{N-1} 10^{y/(10\alpha)}; \end{array} \right. \quad (5)$$

p_0 es el primer polo de la dinámica del sistema y es determinado por el error especificado y y p_T , además p_N es el último polo determinado por N .

Definiendo $k = 10^{y/(10(1-\alpha))}$ y $d = 10^{y/(20\alpha)}$, se obtiene que el producto de ambos términos es $kd = 10^{y/(10\alpha(1-\alpha))}$. Entonces

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\alpha} = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(kd)^i kp_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(kd)^i p_0}\right)}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (6)$$

supongamos que la frecuencia angular máxima en el sistema dinámico es ω_{max} , entonces $p_{N-1} < \omega_{max} < p_N$, y de acuerdo con la ecuación (5)

$$N - 1 < \frac{\log\left(\frac{\omega_{max}}{p_0}\right)}{\log(kd)} < N. \quad (7)$$

De tal forma que si ω_{max} y p_0 son conocidas el integrador de orden fraccionario se aproxima mediante una función de transferencia lineal de orden $N + 1$, donde N esta dado por la siguiente expresión:

$$N = 1 + \left\lfloor \frac{\log\left(\frac{\omega_{max}}{p_0}\right)}{\log(kd)} \right\rfloor, \quad (8)$$

siendo $\lfloor \cdot \rfloor$ la función piso.

APROXIMACIONES EN FRECUENCIA DE OPERADORES FRACCIONARIOS

En esta sección, se presentan diversas aproximaciones del integrador fraccionario $1/s^\alpha$ para distintos valores de α , obtenidas mediante el método de racionalización en el dominio de la frecuencia descritos en la sección anterior.

A continuación, los resultados se muestran en las tablas I-II. La tabla I presenta la aproximación de la función de transferencia cuando $y = 1dB$, con un tamaño de paso de $\alpha = 0.01$ en el intervalo $\alpha \in [0.9, 0.99]$, considerando $\omega_{max} = 100$ y $p_T = 0.01$. Mientras que la tabla II muestra la aproximación de la función de transferencia cuando $y = 1dB$ con un tamaño de paso de $\alpha = 0.1$, en el intervalo de $(\alpha \in [0.1, 0.9])$, considerando $\omega_{max} = 100$ y $p_T = 0.1$. (ver Anexo 1)

Tabla I. Aproximaciones operador de orden fraccionario $1/s^\alpha$ con $\alpha \in [0.9,0.99]$ y error máximo de 1 dB.

α	N	Función de transferencia $G(s)$
0.9	4	$\frac{1.243(s + 0.0114)(s + 0.1467)(s + 1.8957)}{(s + 0.0011)(s + 0.0147)(s + 0.1896)(s + 2.4484)}$
0.91	4	$\frac{1.297(s + 0.0147)(s + 0.2438)(s + 4.0556)}{(s + 0.0011)(s + 0.0189)(s + 0.3140)(s + 5.2233)}$
0.92	4	$\frac{1.353(s + 0.0202)(s + 0.4603)(s + 10.5133)}{(s + 0.0011)(s + 0.0259)(s + 0.5912)(s + 13.5031)}$
0.93	3	$\frac{1.155(s + 0.0304)(s + 1.0434)}{(s + 0.0011)(s + 0.0389)(s + 1.3365)}$
0.94	3	$\frac{1.255(s + 0.0525)(s + 3.1111)}{(s + 0.0011)(s + 0.0670)(s + 3.9746)}$
0.95	3	$\frac{1.278(s + 0.1129)(s + 14.3845)}{(s + 0.0011)(s + 0.1438)(s + 18.3298)}$
0.96	3	$\frac{1.314(s + 0.3565)(s + 143.3013)}{(s + 0.0011)(s + 0.4532)(s + 182.1448)}$
0.97	2	$\frac{1.233(s + 2.4259)}{(s + 0.0011)(s + 3.0759)}$
0.98	2	$\frac{1.265(s + 112.4658)}{(s + 0.0011)(s + 142.2529)}$
0.99	2	$\frac{1.262(s + 1.1233 \times 10^7)}{(s + 0.0011)(s + 1.4175 \times 10^7)}$

La figura 2 muestra los diagramas de magnitud de Bode correspondientes a la aproximación del operador fraccionario $1/s^\alpha$ considerando un error máximo de 1 dB. En la figura 2(a), se presentan los diagramas para valores de α en el rango de $[0.91, 0.99]$, mientras que en la figura 2(b) se muestran para α en el intervalo de $[0.1, 0.9]$. Las funciones de transferencia utilizadas en estas aproximaciones se detallan en la tabla I y II, respectivamente.

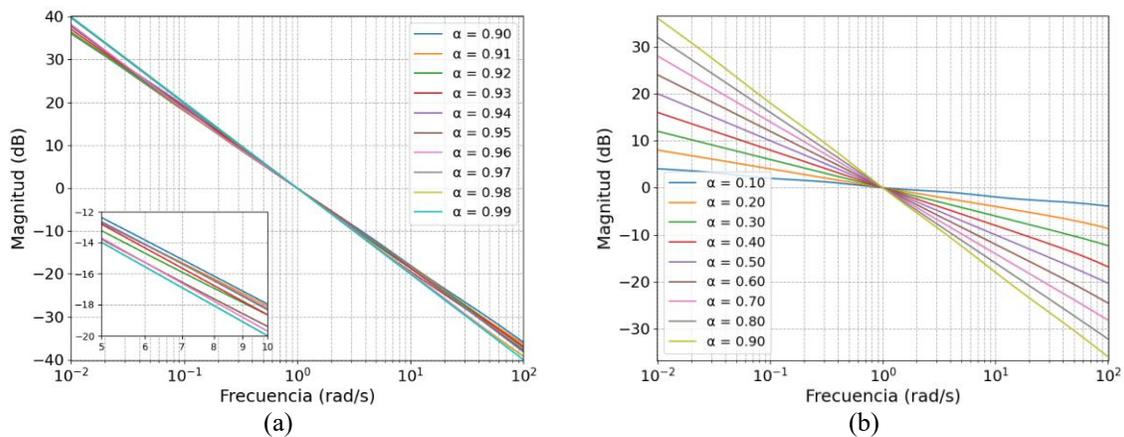


Fig. 2. Diagrama de magnitud de aproximaciones del operador fraccionario $1/s^\alpha$ considerando un error máximo de 1 dB. (a) Para valores de α en el rango de $[0.9,0.99]$. (b) Para valores de α en el rango de $[0.1,0.9]$.

El operador fraccionario $1/s^\alpha$ tiene un diagrama de amplitud de Bode caracterizado por una pendiente de -20α dB/década. En este método, dicha pendiente se aproxima mediante un conjunto de líneas rectas en zigzag conectadas entre sí, con pendientes individuales de 0 dB/década y -20 dB/década. Esto permite obtener una aproximación lineal del integrador de orden fraccionario con cualquier nivel de precisión deseado dentro de una banda de frecuencia específica.

Las tablas III y IV presentan los errores máximos obtenidos en la aproximación del integrador fraccionario para valores de α en el rango de $[0.91, 0.99]$, y de $[0.1, 0.9]$, mostrados en las tablas I y II, respectivamente. El orden del sistema N varía con α para mantener el error máximo por debajo de 1 dB. Se observa que, en la mayoría de los casos, el error se mantiene por debajo de 1 dB, validando la precisión del método de aproximación. Sin embargo, para $\alpha=0.97$ el error máximo alcanza 1.01 dB, superando ligeramente el umbral establecido. Esto sugiere que la precisión de la aproximación está relacionada con el aumento en el número de polos y ceros requeridos para aproximar los operadores.

Tabla III. Errores máximos en la aproximación del integrador fraccionario para distintos valores de $\alpha \in [0.9, 0.99]$.

α	0.9	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
Error dB	0.203	0.259	0.382	0.362	0.521	0.541	0.861	1.01	0.73	0.399

Tabla IV. Errores máximos en la aproximación del integrador fraccionario para distintos valores de $\alpha [0.1, 0.9]$.

α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
Error dB	0.23	0.238	0.138	0.471	0.188	0.367	0.085	0.10	0.202

Estos resultados servirán como base para la implementación del operador fraccionario en aplicaciones dinámicas, como se discutirá en la siguiente sección

APLICACIÓN DEL INTEGRADOR DE ORDEN FRACCIONARIO EN UN SISTEMA CAÓTICO

Se propuso un modelo caótico de orden fraccionario con una estructura tipo Jerk.¹² La figura 3 presenta el diagrama de bloques correspondiente, que describe la dinámica del modelo.

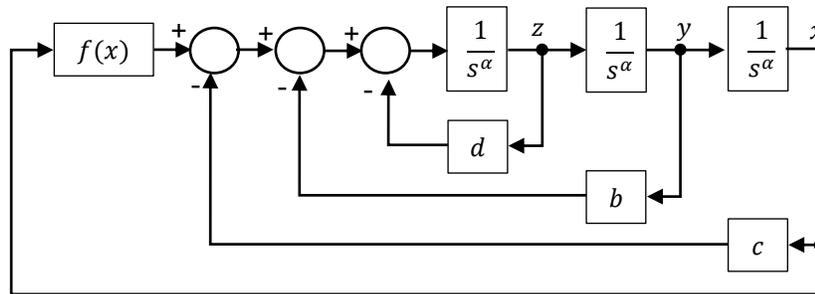


Fig. 3. Diagrama de bloques del sistema caótico de orden fraccionario.

El modelo resultante se expresa en el espacio de estados mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 D^\alpha x &= y, \\
 D^\alpha y &= z, \\
 D^\alpha z &= -dx - by - cx + f(x),
 \end{aligned} \tag{9}$$

donde (x, y, z) son las variables de estado, $f(x) = kx|x|$, es la función no lineal, y (d, b, c, k) son los parámetros del sistema. Además, α es el orden de la derivada fraccionaria y D^α representa la derivada de orden fraccionario tipo Caputo⁷.

El sistema (9) es disipativo si y solo si el parámetro d es positivo. En este caso, conforme el tiempo tiende a infinito, cualquier volumen que contenga la trayectoria del sistema decrece exponencialmente hasta reducirse a cero. Como resultado, todas las órbitas del sistema quedan finalmente confinadas en un subconjunto de volumen nulo, y el movimiento asintótico se estabiliza en un atractor dentro del espacio fase.

El sistema (9) presenta tres puntos de equilibrio $E_1(0,0,0)$, $E_2(\frac{c}{k}, 0,0)$ y $E_3(-\frac{c}{k}, 0,0)$, E_1 es un punto silla de índice 1, mientras que E_2 y E_3 son puntos silla de índice 2.¹² Para realizar la simulación del sistema, es necesario transformar el integrador fraccionario $\frac{1}{s^\alpha}$ en una función de transferencia, de acuerdo con las tablas I y II. Posteriormente, esta función de transferencia se convertirá en una representación en espacio de estados definida como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t); \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \quad (10)$$

donde, $u(t)$ es la entrada, $x(t)$ es el vector de estado, $y(t)$ es el vector de salida, y A, B, C, D son las matrices de coeficientes del sistema. Es bien sabido que existen diversas técnicas para obtener la representación en el espacio de estado a partir de la función de transferencia. Considere la función de transferencia general:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0s^N + b_1s^{N-1} + \dots + b_{N-1}s + b_N}{s^N + a_1s^{N-1} + \dots + a_{N-1}s + a_N}. \quad (11)$$

En este artículo, se adopta la representación en espacio de estados en su forma canónica controlable, la cual permite una estructura adecuada para el análisis del sistema.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{N-1}(t) \\ \dot{x}_N(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_N & -a_{N-1} & -a_{N-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{N-1}(t) \\ x_N(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t); \\ y(t) &= [b_N - a_N b_0 \quad b_{N-1} - a_{N-1} b_0 \quad \dots \quad b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{N-1}(t) \\ x_N(t) \end{bmatrix} + b_0 u(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Por lo tanto, si consideramos que el orden de los integradores del sistema mostrado en la figura 3 es $\alpha = 0.95$, con un error de aproximación de $y = 1dB$, una frecuencia máxima de $\omega_{max} = 100$ y $p_T = 0.01$, entonces, de acuerdo con el método de aproximación en el dominio de la frecuencia, la representación en el espacio de estados se obtiene a partir de la función de transferencia mostrada en la tabla I, quedando de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.0029 & -2.6561 & -18.4747 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t); \\ y(t) &= [2.0755 \quad 18.5277 \quad 1.278] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

El modelo del sistema, en su representación mediante el diagrama de bloques mostrado en la figura 3 ha sido implementado en XCOS, considerando el integrador de orden fraccionario definido en la ecuación (13). La implementación del sistema se muestra en la figura 4, mientras que los resultados de la simulación se presentan en la figura 5.

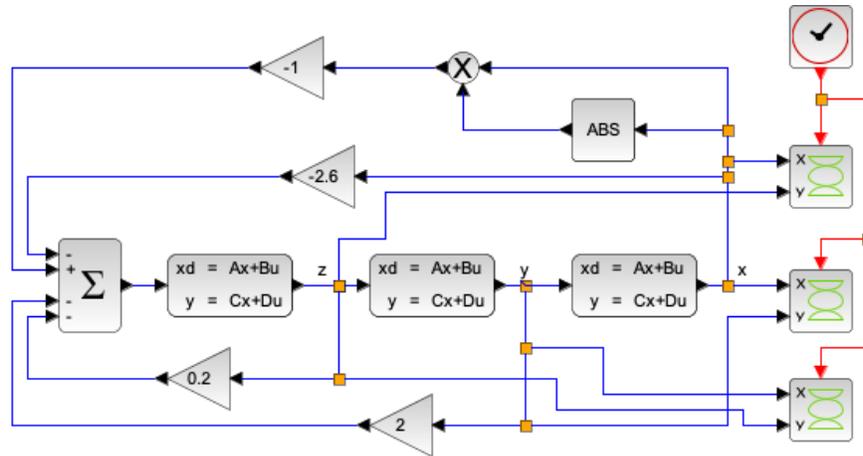


Fig. 4. Diagrama de bloques en XCOS para la simulación del sistema (3) considerando $1/s^{0.95}$.

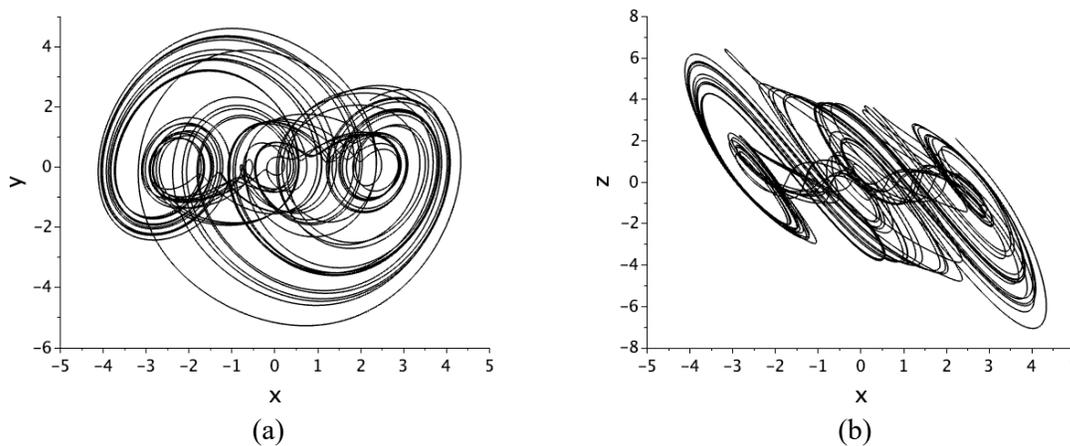


Fig. 5. Planos de fase del atractor caótico dado en (9) considerando la representación en espacio de estados de (12) cuando $\alpha=0.95$. (a) plano x-y, (b) plano x-z.

A partir de esta simulación, se puede observar que el sistema (9) exhibe un atractor extraño cuando los parámetros del sistema (d, b, c, k) toman los valores (0.2, 2, -2.6, -1). Al utilizar métodos de aproximación en el dominio de la frecuencia para operadores fraccionarios, es fundamental tener en cuenta sus limitaciones y cómo pueden afectar la precisión de los resultados. Aunque estas técnicas permiten obtener representaciones de orden entero que facilitan el análisis y la implementación en aplicaciones tanto en electrónica digital como analógica, no siempre logran conservar por completo las propiedades dinámicas del sistema original. En,¹³⁻¹⁴ se menciona que la elección del rango de frecuencia adecuado y el nivel de aproximación utilizado juegan un papel clave en la reducción de errores y en la fidelidad del modelo fraccionario. Por esta razón, es recomendable evaluar cuidadosamente la validez de la aproximación según la aplicación específica y, cuando sea necesario, complementarla con estrategias que tengan en cuenta la memoria inherente de los sistemas fraccionarios, con el objetivo de mejorar la precisión del modelo y evitar posibles desviaciones en su comportamiento.

CONCLUSIONES

En este trabajo, se analizó la aproximación del operador integrador fraccionario en el dominio de la frecuencia mediante el uso de diagramas de Bode y su aplicación en sistemas caóticos de orden fraccionario. La metodología empleada permitió representar sistemas fraccionarios mediante funciones de transferencia de orden entero, ajustando el orden de la aproximación en función del ancho de banda y la precisión deseada. Los resultados obtenidos muestran que la estrategia basada en la aproximación de la pendiente teórica -20α dB/década a través de líneas rectas en zigzag permite modelar con buena precisión el comportamiento del operador fraccionario en un rango de frecuencia específico. Sin embargo, se observó que el error en la aproximación depende tanto del número de polos y ceros utilizados como del intervalo de frecuencia seleccionado. Asimismo, la implementación a través de la simulación en XCOS, del integrador fraccionario aproximado en un sistema caótico de orden fraccionario permitió verificar que la estrategia utilizada conserva las principales características dinámicas del sistema, incluyendo la generación de atractores extraños. No obstante, como se ha mencionado en estudios previos, la aproximación en el dominio de la frecuencia presenta ciertas limitaciones inherentes, particularmente en la capacidad de capturar la memoria a largo plazo característica de los operadores fraccionarios. Finalmente, los métodos presentados en este trabajo pueden ser de utilidad en diversas aplicaciones de ingeniería, incluyendo el diseño de controladores fraccionarios, el modelado de sistemas mecánicos y eléctricos, y el análisis de señales en sistemas biológicos.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Departamento de Electrónica y Automatización de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la UANL, y al proyecto (CF-2023-I-1110), apoyado por la convocatoria Ciencia de Frontera 2023 del CONAHCYT. Muñoz-Pacheco agradece a la BUAP por el apoyo brindado a través del proyecto VIEP-2025.

REFERENCIAS

1. Vieira, L. C., Costa, R. S., & Valério, D. (2023). An overview of mathematical modelling in cancer research: fractional calculus as modelling tool. *Fractal and fractional*, 7(8), 595.
2. Tarasov, V. E. (2019). On history of mathematical economics: Application of fractional calculus. *Mathematics*, 7(6), 509.
3. Ali, A., Bingi, K., Ibrahim, R., Devan, P. A. M., & Devika, K. B. (2024). A review on FPGA implementation of fractional-order systems and PID controllers. *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, 155218.
4. Burrage, K., Burrage, P.M., Bueno-Orovio, A. (2024). Fractional Models in Biology and Medicine. In: Kevrekidis, P.G., Cuevas-Maraver, J. (eds) *Fractional Dispersive Models and Applications. Nonlinear Systems and Complexity*, vol 37. Springer, Cham.
5. Muñoz-Pacheco, J. M., Posadas-Castillo, C., & Zambrano-Serrano, E. (2020). The effect of a non-local fractional operator in an asymmetrical glucose-insulin regulatory system: Analysis, synchronization and electronic implementation. *Symmetry*, 12(9), 1395.
6. Tamba, V. K., Biamou, A. L. M., Pham, V. T., Grassi, G., Tagne, F. K., & Takougang, A. C. N. (2025). Fractional-order bi-Hopfield neuron coupled via a multistable memristor: Complex neuronal dynamic analysis and implementation with microcontroller. *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, 191, 155661.
7. Diethelm, K., Ford, N. J., & Freed, A. D. (2002). A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. *Nonlinear Dynamics*, 29, 3-22.
8. Echenausía-Monroy, J. L., Quezada-Tellez, L. A., Gilardi-Velázquez, H. E., Ruíz-Martínez, O. F., Heras-Sánchez, M. D. C., Lozano-Rizk, J. E., ... & Álvarez, J. (2024). Beyond Chaos in Fractional-Order Systems: Keen Insight in the Dynamic Effects. *Fractal and Fractional*, 9(1), 22.

9. Charef, A., Sun, H. H., Tsao, Y. Y., & Onaral, B. (1992). Fractal system as represented by singularity function. *IEEE Transactions on automatic Control*, 37(9), 1465-1470.
10. Carlson, G., & Halijak, C. (1964). Approximation of fractional capacitors $(1/s)^{1/n}$ by a regular Newton process. *IEEE Transactions on Circuit theory*, 11(2), 210-213.
11. Oustaloup, A., Levron, F., Mathieu, B., & Nanot, F. M. (2000). Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 47(1), 25-39.
12. Azar, A. T., Vaidyanathan, S., & Ouannas, A. (Eds.). (2017). *Fractional order control and synchronization of chaotic systems* (Vol. 688). Springer.
13. Tavazoei, M. S., & Haeri, M. (2007). Unreliability of frequency-domain approximation in recognising chaos in fractional-order systems. *IET Signal Processing*, 1(4), 171-181.
14. Tavazoei, M. S., & Haeri, M. (2008). Limitations of frequency domain approximation for detecting chaos in fractional order systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 69(4), 1299-1320.

Anexo 1

Tabla II. Aproximaciones operador de orden fraccionario $1/s^\alpha$ con $\alpha \in [0.1, 0.9]$ y error máximo de 1dB.

α	N	Función de transferencia $G(s)$
0.1	5	$\frac{507.3712(s + 0.0408)(s + 0.5275)(s + 6.8129)(s + 87.9923)}{(s + 0.0316)(s + 0.4084)(s + 5.2750)(s + 68.1292)(s + 879.9225)}$
0.2	8	$\frac{141.0892(s + 0.0237)(s + 0.1)(s + 0.4217)(s + 1.7783)(s + 7.4989)(s + 31.6228)(s + 133.3521)}{(s + 0.0178)(s + 0.0750)(s + 0.3162)(s + 1.3335)(s + 5.6234)(s + 23.7137)(s + 100)(s + 421.6965)}$
0.3	10	$\frac{58.424(s + 0.0204)(s + 0.0611)(s + 0.1828)(s + 0.5471)(s + 1.6379)(s + 4.9032)(s + 14.6780)(s + 43.9397)(s + 131.5369)}{(s + 0.0147)(s + 0.0439)(s + 0.1315)(s + 0.3938)(s + 1.1788)(s + 3.5287)(s + 10.5635)(s + 31.6228)(s + 94.6652)(s + 283.3877)}$
0.4	11	$\frac{26.6095(s + 0.0196)(s + 0.0511)(s + 0.1334)(s + 0.3481)(s + 0.9085)(s + 2.3714)(s + 6.1897)(s + 16.1560)(s + 42.1697)(s + 110.0694)}{(s + 0.0133)(s + 0.0348)(s + 0.0909)(s + 0.2371)(s + 0.6190)(s + 1.6156)(s + 4.2170)(s + 11.0069)(s + 28.7298)(s + 74.9894)(s + 195.7342)}$
0.5	11	$\frac{12.5897(s + 0.0200)(s + 0.0501)(s + 0.1259)(s + 0.3162)(s + 0.7943)(s + 1.9953)(s + 5.0119)(s + 12.5893)(s + 31.6228)(s + 79.4328)}{(s + 0.0126)(s + 0.0316)(s + 0.0794)(s + 0.1995)(s + 0.5012)(s + 1.2589)(s + 3.1623)(s + 7.9433)(s + 19.9526)(s + 50.1187)(s + 125.8925)}$
0.6	11	$\frac{8.9133(s + 0.0215)(s + 0.0562)(s + 0.1468)(s + 0.3831)(s + 1.0000)(s + 2.6102)(s + 6.8129)(s + 17.7828)(s + 46.4159)(s + 121.1528)}{(s + 0.0121)(s + 0.0316)(s + 0.0825)(s + 0.2154)(s + 0.5623)(s + 1.4678)(s + 3.8312)(s + 10.0000)(s + 26.1016)(s + 68.1292)(s + 177.8279)}$
0.7	10	$\frac{5.7158(s + 0.0254)(s + 0.0760)(s + 0.2276)(s + 0.6813)(s + 2.0395)(s + 6.1054)(s + 18.2770)(s + 54.7136)(s + 163.7894)}{(s + 0.0118)(s + 0.0353)(s + 0.1056)(s + 0.3162)(s + 0.9467)(s + 2.8339)(s + 8.4834)(s + 25.3958)(s + 76.0243)(s + 227.5846)}$
0.8	8	$\frac{3.4435(s + 0.0365)(s + 0.1540)(s + 0.6494)(s + 2.7384)(s + 11.5478)(s + 48.6968)(s + 205.3525)}{(s + 0.0115)(s + 0.0487)(s + 0.2054)(s + 0.8660)(s + 3.6517)(s + 15.3993)(s + 64.9382)(s + 273.8420)}$
0.9	5	$\frac{2.0206(s + 0.1136)(s + 1.4678)(s + 18.9574)(244.8437)}{(s + 0.0114)(s + 0.1468)(s + 1.8957)(s + 24.4844)(s + 316.2278)}$