

# Ingenierías

99

- 🔗 Eterno retorno del universo
- 🔗 Fusión de procesos de metales
- 🔗 Síntesis de puntos cuánticos PbS
- 🔗 Operadores fraccionarios en sistemas caóticos

JULIO- DICIEMBRE 2025, VOLUMEN XXVIII, No. 99

**Ingenierías** REVISTA DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



## INTERNATIONAL YEAR OF Quantum Science and Technology

**Ingenierías** es una publicación semestral arbitrada, editada por la Facultad de Ingenierías Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León, dirigida a profesionales, profesores, investigadores y estudiantes de las diferentes áreas de la ingeniería. Las opiniones y contenidos expresados en los artículos son responsabilidad exclusiva de los autores. Prohibida su reproducción total o parcial, en cualquier forma o medio, del contenido editorial de este número sin previa autorización.

Versión en extenso en internet: <http://ingenierias.unal.mx/>

- 1
- 3 **Síntesis de puntos cuánticos de PbS con un “band gap” óptimo para aplicaciones fotovoltaicas**  
José Misael M. Chavarría-Martínez, Diana Fabiola García-Gutiérrez,  
Domingo Ixcóatl García-Gutiérrez
- 16 **Aproximación de operadores fraccionarios en el dominio de la frecuencia y su aplicación en sistemas caóticos**  
Ernesto Zambrano-Serrano, Miguel Ángel Platas-Garza,  
Elizabeth Guadalupe Lara Hernández, Efraín Alcorta García,  
Jesús Manuel Muñoz-Pacheco
- 27 **El eterno retorno del universo**  
José Rubén Morones Ibarra
- 36 **Modelado del proceso de fusión selectiva por láser en aleaciones de aluminio**  
Daniel García Macías, Luis Arturo Reyes Osorio,  
Roberto Carlos Cabriales Gómez, Octavio García Salazar
- 46 **Estudio de la precipitación durante el proceso de laminación en caliente de un acero de alta aleación y resistencia**  
Laura Fátima Zúñiga Pineda, Martha Patricia Guerrero Mata,  
Omar García Rincón
- 74 **Colaboradores**
- 76 **Información para colaboradores**
- 77 **Código de ética**



**UANL**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



**FIME**

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



**Ingenierías**

**Ingenierías**, Vol. 28, N° 99, julio-diciembre 2025. Es una publicación semestral, editada por la Universidad Autónoma de Nuevo León, a través de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. Domicilio de la Publicación: Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Pedro de Alba S/N, Edificio 7, San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México, C.P. 66450. Teléfono: +52 (81) 83294020 Ext. 5854, Fax +52 81 83320904. Editor responsable: Dr. Juan Antonio Aguilar Garib. Reserva de derechos al uso exclusivo pendiente. ISSN en trámite. Número de certificado de licitud de título y contenido, otorgado por la Comisión Calificadora de Publicaciones y Revistas Ilustradas de la Secretaría de Gobernación pendiente. Registro de marca ante el Instituto Mexicano de la Propiedad Industrial: En trámite.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación.

Prohibida su reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización del Editor.

Todos los derechos reservados  
© Copyright 2025  
revistaingenierias@uanl.mx

## DIRECTORIO

### UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Dr. Santos Guzmán López  
Rector

Dr. Mario Garza Castillo  
Secretario General

Dr. Jaime Arturo Castillo Elizondo  
Secretario Académico

Dr. José Javier Villarreal Tostado  
Secretario de Extensión y Cultura

Lic. Antonio Ramos Revillas  
Director de Editorial Universitaria

### FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

Dr. Arnulfo Treviño Cubero  
Director

Dr. Juan Antonio Aguilar Garib  
Editor responsable

M.C. Cyntia Ocañas Galván  
Dr. Jesús G. Puente Córdova  
Redacción

Gregoria Torres Garay  
Tipografía y formación

Alondra Arreola De Anda  
Aldo Alberto Torres Ramos  
Jarely Janeth González Herrera  
Jonathan Eduardo Cortes Roque  
Auxiliares

### CONSEJO EDITORIAL INTERNACIONAL

Dr. Mauricio Cabrera Ríos, Puerto Rico. UPRM / Dra. Ruth Kiminami, Brasil. UFSC, San Pablo / Dr. Juan Jorge Martínez Vega, Francia. Universidad de Toulouse III / Dr. Zarel Valdez Nava, Francia. UPS-INPT-LAPLACE-CNRS.

### CONSEJO EDITORIAL MÉXICO

Dr. Benjamín Limón Rodríguez, FIC-UANL / Dr. José Rubén Morones Ibarra, FCFM-UANL / Dr. Ubaldo Ortiz Méndez, FIME-UANL / Dr. Félix Sánchez De Jesús, ICBI-UAEH / Dr. Ernesto Vázquez Martínez, FIME-UANL.

### COMITÉ TÉCNICO

Dr. Efraín Alcorta García, FIME-UANL / Dr. Rafael Colás Ortiz, FIME-UANL / Dr. Jesús De León Morales, FIME-UANL / Dr. Virgilio Ángel González González, FIME-UANL / Dr. Carlos Alberto Guerrero Salazar, FIME-UANL / Dra. Oxana Vasiliévna Karissova, FCFM-UANL / Dr. Francisco Eugenio López Guerrero, FIME-UANL / Dr. Roger Z. Ríos Mercado, FIME-UANL / Dr. Juan Ángel Rodríguez Liñán, FIME-UANL.

# Síntesis de puntos cuánticos de PbS con un “band gap” óptimo para aplicaciones fotovoltaicas

José Misael Chavarría-Martínez<sup>A,B</sup>, Diana Fabiola Garcia-Gutierrez<sup>A,B</sup>, Domingo Ixcóatl Garcia-Gutierrez<sup>A,B</sup>

<sup>A</sup>Universidad Autónoma de Nuevo León, UANL, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, FIME, Av. Universidad S/N, Cd. Universitaria, San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México.

<sup>B</sup>Universidad Autónoma de Nuevo León, UANL, Centro de Innovación, Investigación y Desarrollo en Ingeniería y Tecnología CIIDIT, Apodaca, Nuevo León, México.

Correo electrónico del autor correspondiente: domingo.garciagt@uanl.edu.mx

## RESUMEN

*Los puntos cuánticos (QDs) de sulfuro de plomo (PbS) presentan importantes propiedades de confinamiento cuántico para tamaños menores a 18 nm. Diferentes metodologías de síntesis se han llevado a cabo para la fabricación de QDs de PbS, alcanzando tamaños tan pequeños de hasta 1.4 nm. Estudios teóricos se han desarrollado para determinar el ancho de banda prohibida de energía ( $E_g$ ) óptimo para aplicaciones fotovoltaicas, obteniendo un valor de  $\sim 1.4$  eV. Con base en lo anterior, es importante enfocar esfuerzos en la mejora de metodologías de síntesis para QDs de PbS monodispersos con  $E_g$  óptimo para aplicaciones fotovoltaicas.*

## PALABRAS CLAVE

Puntos cuánticos, PbS, síntesis química, confinamiento cuántico.

## ABSTRACT

*Lead sulfide (PbS) quantum dots (QDs) exhibit great quantum confinement effect properties at sizes smaller than 18 nm. Different synthesis methodologies have been used to synthesize PbS QDs with sizes as small as 1.4 nm. Theoretical studies have been conducted to determine the optimum value for the energy band gap exhibited by the material when used as the light-absorbing layer in photovoltaic devices, reporting a value of  $\sim 1.4$  eV. Based on this fact, it is important to focus efforts on synthesizing monodisperse PbS QDs with this optimal  $E_g$  value for photovoltaic applications.*

## KEYWORDS

Quantum dots, PbS, chemical synthesis, quantum confinement effects.

## INTRODUCCIÓN

En años recientes el estudio de nanopartículas semiconductoras como parte de dispositivos fotovoltaicos ha ido en aumento<sup>1-5</sup>. Esto debido a la búsqueda exhaustiva por parte de los científicos para reducir las emisiones provenientes del uso desmedido de energía de fuentes fósiles. En los sistemas fotovoltaicos es posible aumentar la eficiencia al absorber la mayor cantidad de fotones provenientes del sol<sup>6</sup>. El espectro de irradiancia solar nos permite identificar la región del espectro que tiene más energía disponible por unidad de área, siendo esta la región visible del espectro (figura 1).

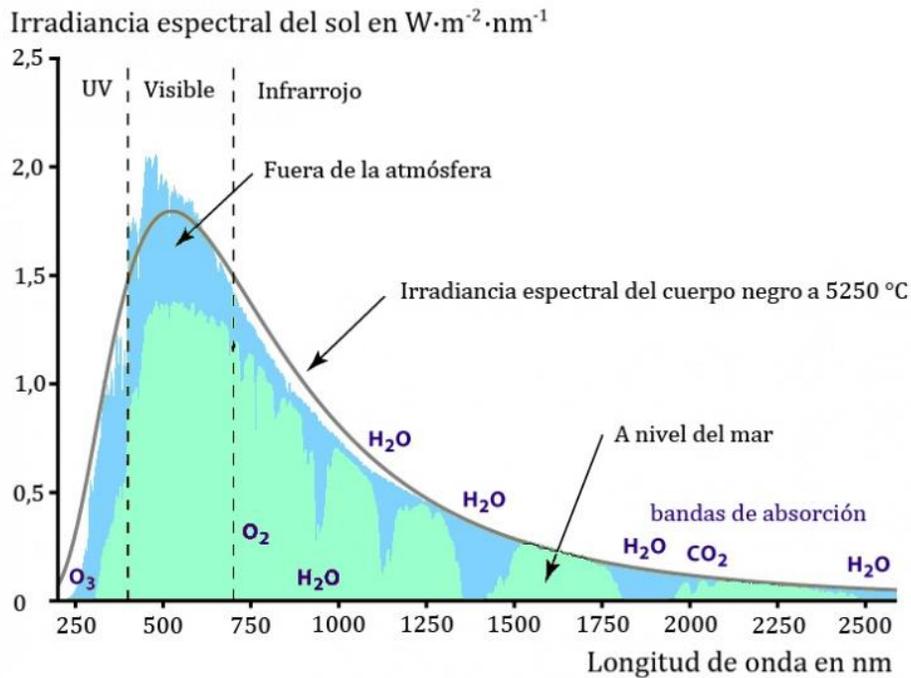


Fig. 1. Espectro de irradiancia solar. Obtenido de “Irradiancia Solar” por ECYT-AR ([https://cyt-ar.com.ar/cyt-ar/index.php/Irradiaci%C3%B3n\\_solar](https://cyt-ar.com.ar/cyt-ar/index.php/Irradiaci%C3%B3n_solar))<sup>7</sup>. CC BY-NC-SA 3.0.

La región del espectro de irradiancia solar donde los diferentes materiales absorben los fotones generados por el sol está determinada por el valor de su ancho de banda prohibida de energía ( $E_g$ , band gap en inglés). Para el caso de los materiales semiconductores (materiales con una conductividad eléctrica entre la de los metales y los aislantes) este valor de  $E_g$  se encuentra en un rango entre 0.2 eV (6,200 nm) y 5 eV (250 nm); donde  $E_g$  es la diferencia en energía entre; máximo de la banda de valencia y el mínimo de la banda de conducción (figura 2).

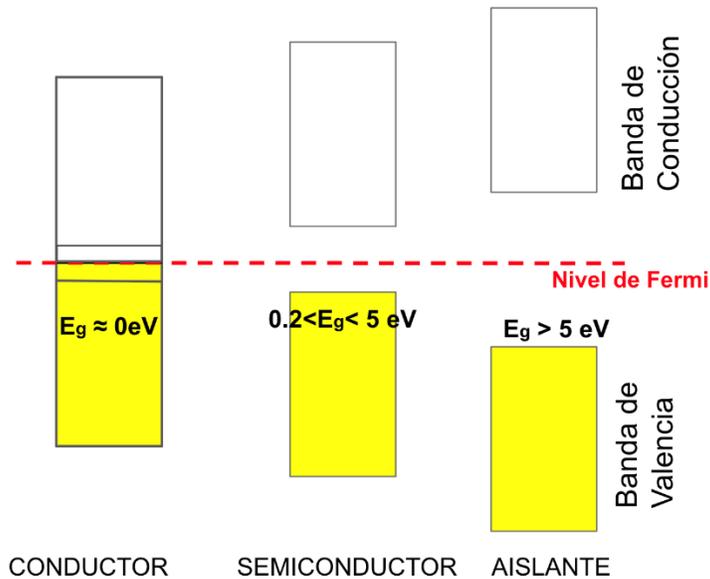


Fig. 2. Esquema de bandas de energía para materiales conductores, semiconductores y aislantes.

El poder hacer uso de la energía emitida por el sol para aplicaciones fotovoltaicas depende del valor del  $E_g$  de los materiales semiconductores usados como capa absorbente de luz en dichos dispositivos. Estudios teóricos han reportado que el  $E_g$  óptimo para aplicaciones fotovoltaicas es de  $\sim 1.4$  eV<sup>3</sup>.

El sulfuro de plomo (PbS) en su forma de bulk tiene un  $E_g$  de 0.41 eV, sin embargo, también presenta un radio de excitón de Bohr de 18 nm<sup>8</sup>, que es un valor alto entre los diferentes materiales semiconductores. Esto permite que las nanopartículas de PbS presenten efectos de confinamiento cuántico, volviéndose puntos cuánticos (QDs por sus siglas en inglés), que presentan cambios en sus propiedades optoelectrónicas, a tamaños de partícula menores de 18 nm. Pero ¿cuál es la diferencia entre una nanopartícula y un punto cuántico (QD)? Lo que caracteriza a los QDs es la dependencia de sus propiedades ópticas (absorción y emisión) en su tamaño. Todos los QDs son nanopartículas, pero no todas las nanopartículas son QDs. Cuando una nanopartícula empieza a mostrar variaciones en sus propiedades de absorción o emisión óptica en virtud de su tamaño, entonces ya se puede hablar de un QD (figura 3).

La variación de las propiedades ópticas con respecto al tamaño en los QDs es una consecuencia de los efectos de confinamiento cuántico. Cuando el diámetro de las nanopartículas es comparable al radio del excitón de Bohr del material semiconductor del cual están hechas, entonces se empieza a observar los mencionados efectos de confinamiento cuántico. Estos son el resultado de dos fenómenos que ocurren a la par. El número de átomos tan reducido que compone a los QDs (entre los cientos y miles), en comparación con el material en “bulk” reducen enormemente la densidad de estados electrónicos (DOS por sus siglas en inglés) permitidos, lo que cambia la cantidad de niveles electrónicos permitidos que pueden ser ocupados por los portadores de carga (electrones o huecos); pasando de las bandas de energía con una alta DOS, a niveles discretos que se asemejan más a orbitales moleculares. Adicionalmente, el confinamiento del que son objeto los portadores de carga, al tener un espacio más reducido disponible para moverse en los QDs, hace que los niveles electrónicos permitidos se empiecen a separar entre sí; esta separación entre los niveles de energía permitidos es inversamente proporcional al diámetro de los QDs (figura 3). Como ya se mencionó en el texto, la condición que se debe cumplir para que estos efectos de confinamiento cuántico se empiecen a observar, es que el radio del excitón de Bohr (una constante de los materiales semiconductores) de los compuestos de los que están hechas las nanopartículas sea parecido, o menor, a su diámetro. Recordando que un excitón es una “cuasipartícula” que se genera cuando un electrón es excitado de la banda de valencia a la banda de conducción generando una interacción electrostática con el “hueco” que ha dejado en la banda de valencia (figura 3), lo que los mantiene unidos hasta que se separen al toparse con una interfase con otro material o que se recombinen.

El radio del excitón de Bohr se puede interpretar como la separación física entre el electrón y el hueco en un excitón.

Debido a esto, la manipulación correcta de la síntesis de PbS permite controlar el tamaño final de los QDs, por lo que es posible modificar el  $E_g$  del material, logrando llegar incluso al rango óptimo para aplicaciones fotovoltaicas<sup>6</sup>.

La síntesis convencional de los QDs de PbS implica el uso de precursores organometálicos que permiten obtener partículas nano-cristalinas. Hines y Scholes<sup>9</sup> propusieron en 2003 un método para producir nanopartículas de PbS con diferentes tamaños de partícula que absorben en el infrarrojo. La síntesis se basa en el método de inyección en caliente, utilizando como precursor de plomo al PbO y sulfuro de bis(trimetilsilil) (TMS por sus siglas en inglés) como precursor de azufre. Para evitar el crecimiento acelerado de las nanopartículas se utiliza el ácido oleico (AO) como agente protector, siendo este un agente orgánico que recubre la superficie del material, pasivándola y deteniendo su crecimiento<sup>9</sup>. Sin embargo, la rápida nucleación de la reacción ha limitado el control que se tiene sobre el crecimiento de las nanopartículas, siendo un reto obtener una baja dispersión de tamaño para diámetros menores a los 3 nm<sup>10</sup>. Para que los QDs de PbS puedan absorber en el espectro visible, su tamaño promedio tiene que estar alrededor de los 2 nm, lo que representa un reto importante en la síntesis de este tipo de QDs, ya que, para este material semiconductor, este rango de tamaños

corresponde al conocido como “confinamiento cuántico fuerte” (strong quantum confinement regime)<sup>2</sup>. A pesar de esto, existen reportes de QDs de PbS con la capacidad de absorber en el rango del visible, esto implica tamaños menores a 2.5 nm.<sup>2,9-13</sup>

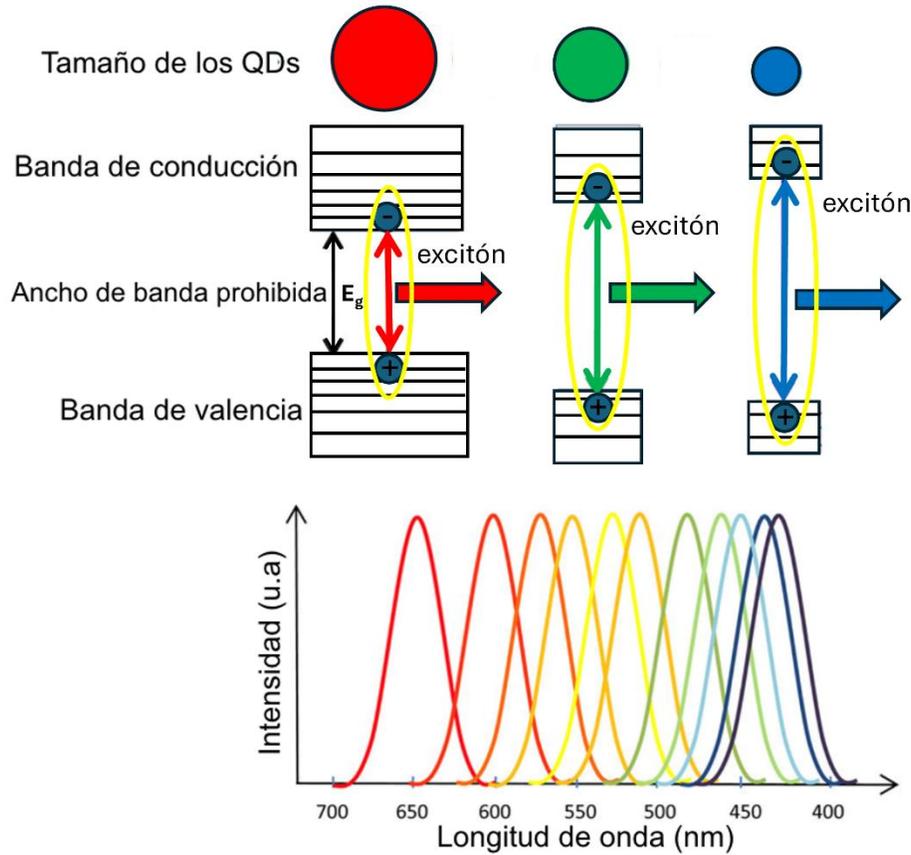


Fig. 3. Esquema representativo de los efectos de confinamiento cuántico en las propiedades ópticas de absorción y emisión de QDs.

M.J. Fernée y colaboradores<sup>2</sup> utilizaron la síntesis de Hines y Scholes modificada para obtener QDs monodispersos entre 1 y 2 nm, utilizando ácido sulfhídrico como fuente de azufre, y n-decano como solvente. Con estas modificaciones lograron controlar el tamaño de partícula a través de la temperatura, registrando valores de absorbancia desde los 650 nm hasta los 850 nm. Demostrando un fenómeno inverso a la maduración de Oswald, obteniendo picos más definidos a longitudes de onda más altas.

La síntesis de QDs de PbS con un tamaño de 1.5 nm y un pico de absorción en el ultravioleta-visible (480 nm) fue reportada por H. Choi y colaboradores<sup>12</sup>. Esto fue logrado a través de la modificación del método de Hines y Scholes, permitiendo la nucleación de los oleatos de plomo a 90°C y realizando un enfriamiento rápido justo después del inicio de la reacción para impedir el crecimiento de los QDs. Otro punto crítico para la obtención de dichas nanopartículas fue la temperatura a la cual fue inyectado el precursor de azufre, se analizaron muy bajas temperaturas desde 5°C hasta 50°C, resultando las primeras en puntos cuánticos de 1.5 nm y las últimas en 2.5 nm.

Por otra parte, mediante el uso de la difenilfosfina (DFF) en el precursor de azufre N. Torres-Gomez y colaboradores<sup>13</sup> lograron demostrar la capacidad de la difenilfosfina para funcionar como catalizador y agente protector, logrando además obtener dos grupos de QDs. El primero (figura 4a) con una absorbancia de 560 nm y un band gap 1.82 eV, y el otro de QDs más grandes de 760 nm y un  $E_g$  de 1.44 eV (figura 4b). Controlando el tiempo de reacción pudieron sintetizar QDs

monodispersos de PbS que absorben en el visible con una variación en los niveles HOMO y LUMO atribuidos no solo a los efectos de confinamiento cuántico si no a las interacciones de la difenilfosfina con los átomos de S en la superficie de los QDs.

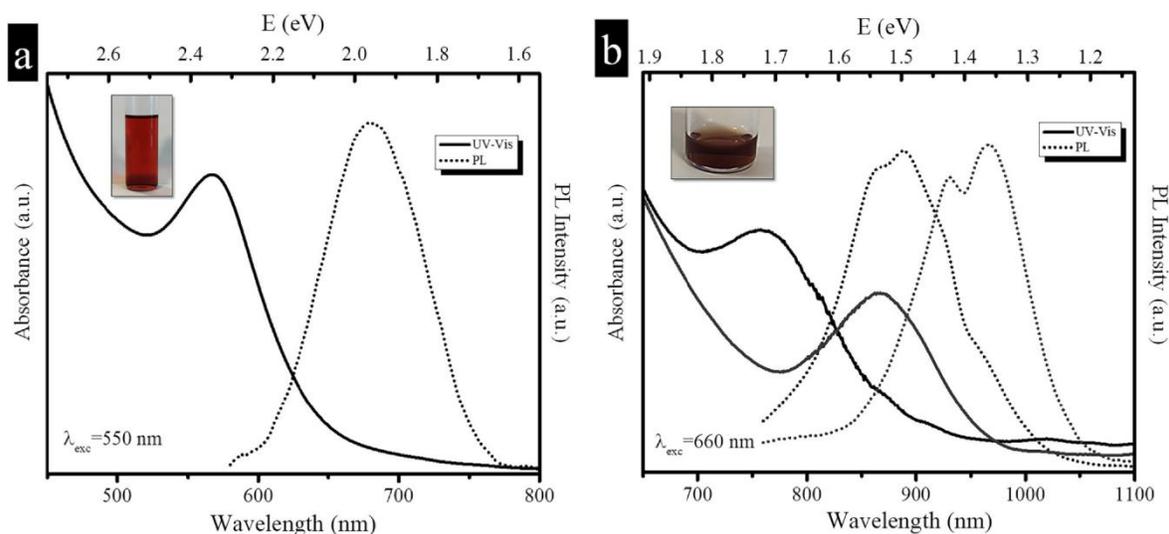


Fig. 4. UV-Vis-NIR y espectro de fotoluminiscencia para: a) primer grupo de nanopartículas (560 nm) b) segundo grupo de partículas (760 nm y 860 nm)<sup>13</sup>.

El efecto de aminas en la reacción de Hines y Scholes fue estudiado por P.B. Green y colaboradores<sup>14</sup>, demostrando una cinética de dos pasos con especies intermediarias estables y reproducibles que emiten en el visible. En este respecto, se demostró que durante la síntesis se crean grupos de monómeros Pb-S en la prenucleación, este paso puede ser interrumpido al agregar aminas. Se probaron derivados de la anilina, aminopiridinas, benzilaminas, alquilaminas y aminas primarias, determinando que aminas con un mayor pKa generan una disrupción en la producción de los grupos prenucleantes, generando así QDs estables, monodispersos y con un pico de absorción estrecho.

Trabajos adicionales recalcaron la importancia del volumen del agente protector para determinar el tamaño final de los QDs en síntesis similares. Yu y Peng<sup>10</sup> evaluaron el efecto de la concentración de AO en la síntesis de QDs de CdS encontrando que a bajas concentraciones el pico de absorbancia se hacía más delgado y aparecía un subgrupo de QDs más pequeños en tamaño, indicando por la absorbancia. Se concluyó que el número de núcleos formados es influenciado por la concentración de AO, al aumentarla se tendrán mayor cantidad de núcleos disponibles para crecimiento, lo que reduce el tamaño promedio de los QDs; mientras que a bajas concentraciones del agente protector aumenta la reactividad de los monómeros precursores. Por otro lado, D.F. García Gutiérrez y colaboradores<sup>15</sup> estudiaron el efecto de diferentes agentes protectores en la síntesis QDs de PbS al acentuar los efectos negativos de transporte de portadores de carga que tienen las cadenas orgánicas largas. Se probaron diferentes ácidos carboxílicos de cadena corta, encontrando que un agente protector de cadena más corta (ácido acético) produce una coalescencia de los QDs a cortos tiempos de reacción, formando aglomerados tan grandes que no se logró observar un pico de absorción en las muestras. Demostrando también que el tener otros agentes protectores de cadena más corta no produce un cambio en la estequiometría de los QDs, pero sí en su morfología, tamaño y estado de agregación.

En el presente trabajo se pretenden modificar los parámetros de la síntesis propuesta por Hines y Scholes para producir nanopartículas de PbS que absorban en el rango del visible, con un ancho de banda de energía prohibida ( $E_g$ , band gap) óptimo para aplicaciones fotovoltaicas; explorando el uso de la DFF y la oleilamina (OLA) como agente reductor y catalizador, respectivamente, y ambas como agente protector en la reacción.

## METODOLOGÍA EXPERIMENTAL

### Materiales

Óxido de plomo (PbO), 1-octadeceno (ODE), sulfuro de bis(trimetilsilil) (TMS por sus siglas en inglés), ácido oleico (AO), oleilamina (OLA), difenilfosfina (DFF), tetracloroetileno (TCE), acetona anhidra fueron adquiridos de Sigma Aldrich y utilizados sin tratamiento posterior.

### SÍNTESIS DE LOS QDs DE PbS

La metodología que se siguió fue la reportada por Hines y Scholes<sup>9</sup>, con una modificación, la que consistió en incorporar 250  $\mu$ L de DFF en el precursor de azufre. Se utilizó un método de inyección en caliente que implica la preparación de dos precursores. Para el precursor de plomo, se pesaron 0.223 gramos de PbO y se añadieron a un matraz de fondo redondo de tres bocas con 25 mL de 1-octadeceno (ODE), 0.63 mL de ácido oleico (AO). La mezcla se sometió a reflujo en una atmósfera de nitrógeno para prevenir la oxidación. El matraz se calentó gradualmente hasta 120°C para disolver el PbO, y luego la temperatura se redujo a 80°C para controlar el crecimiento de los QDs.

Paralelamente, se preparó el precursor de azufre en una caja de guantes con atmósfera de argón para evitar la exposición al aire y la humedad. En un recipiente se mezclaron de 1.5 mL ODE, 214  $\mu$ L de TMS, 250  $\mu$ L de DFF y 0.33 mL de AO. Esta solución se agitó durante 15 minutos para asegurar una mezcla homogénea y la disolución completa de los reactivos.

Una vez que la solución de precursor de plomo alcanzó los 80°C, el precursor de azufre fue inyectado rápidamente en el matraz con el precursor de plomo, permitiendo una nucleación instantánea de los QDs y previniendo el crecimiento descontrolado de las partículas. Se tomaron alícuotas en intervalos específicos de 0, 10, 30, 60 y 180 segundos, así como a los 10 y 15 minutos, usando una pipeta de 10 mL. Cada alícuota se enfrió rápidamente en acetona fría para estabilizar el tamaño de las nanopartículas.

Tras enfriar la reacción, los QDs de PbS se purificaron mediante centrifugación a 9500 RPM durante 30 minutos, separando las nanopartículas de los solventes y reactivos residuales. Posteriormente, se realizaron 7 ciclos adicionales de lavado, en los cuales las nanopartículas se disolvieron en hexano y se precipitaron con acetona.

### OLEILAMINA (OLA) COMO AGENTE PROTECTOR

Adicionalmente, se realizó una modificación del método de Green<sup>14</sup> para la síntesis de QDs de PbS con absorción en el visible de la siguiente manera. Para el precursor de plomo, se comenzó agregando 0.223 gramos de PbO a un matraz de fondo redondo de tres bocas, que contenía 30 mL de ODE, 2.85 mL de AO, y 0.7 mL de OLA. Mediante un sistema de reflujo, esta preparación se llevó a cabo en una atmósfera de nitrógeno para evitar la oxidación del precursor. La solución se calentó gradualmente hasta alcanzar los 120°C para disolver completamente el PbO y formar el precursor de plomo. Posteriormente, la temperatura de la solución se redujo hasta llegar a la temperatura de crecimiento de 80°C, la cual es crítica para controlar el tamaño y la calidad de los QDs formados. Por otro lado, el precursor de azufre se preparó en una caja de guantes, siguiendo un proceso meticuloso para evitar la exposición al aire y humedad, que podrían afectar la reactividad de los componentes. Se añadieron 1.5 mL de ODE, 30  $\mu$ L de TMS, 5  $\mu$ L de DFF, y 0.33 mL de AO a un recipiente, y esta solución se mantuvo en constante agitación durante 15 minutos para asegurar una mezcla homogénea y la completa disolución de los reactivos.

Una vez que el precursor de plomo alcanzó la temperatura de crecimiento deseada de 80°C, se inyectó rápidamente el precursor de azufre en el matraz que contenía el precursor de plomo. La inyección rápida es esencial para asegurar la nucleación instantánea de los QDs y prevenir el crecimiento descontrolado de las partículas. Las dos soluciones reaccionaron durante un minuto, permitiendo la formación de los QDs de PbS. Posteriormente, la reacción se detuvo enfriando rápidamente el matraz en un baño de acetona fría, lo que estabilizó el tamaño de las nanopartículas formadas.

Después de que la reacción se enfrió, los QDs de PbS fueron purificadas mediante centrifugación a 9500 RPM durante 30 minutos. Este paso inicial de purificación permitió la separación de las nanopartículas de los solventes y reactivos residuales. A continuación, se realizaron 5 ciclos adicionales de lavado, en los que las nanopartículas se disolvieron en hexano y se precipitaron con acetona.

## CARACTERIZACIÓN

Se llevó a cabo la caracterización de absorción óptica UV-Vis-NIR de los QDs de PbS sintetizados utilizando un espectrofotómetro marca Agilent, modelo Cary 5000. Los espectros de absorción óptica fueron adquiridos mediante la dilución de los QDs de PbS en hexano y permitieron identificar el pico máximo de absorción de las diferentes muestras.

La microscopía Raman se llevó a cabo utilizando un instrumento DXR de Thermo Fisher Scientific. La fuente de excitación láser utilizada tenía una longitud de onda de 532 nm, analizando un rango de número de onda de  $100\text{ cm}^{-1}$  a  $3500\text{ cm}^{-1}$ . Mientras que los estudios de absorción en el infrarrojo por transformada de Fourier (FTIR por sus siglas en inglés) se obtuvieron utilizando pastillas de KBr, con un intervalo de  $400\text{ cm}^{-1}$  a  $4000\text{ cm}^{-1}$  por medio de un espectrofotómetro FTIR marca Interspec, modelo 200-X.

Para los estudios de Microscopía Electrónica de Transmisión (TEM) se utilizó un microscopio marca FEI, modelo Titan G2 80-300 operado a 300 kV. Este microscopio está equipado con detectores de Campo Oscuro de Alto Ángulo Anular (HAADF por sus siglas en inglés), campo claro (BF por sus siglas en inglés) y campo oscuro anular (ADF por sus siglas en inglés) para el modo de Microscopía Electrónica de Barrido – Transmisión (STEM, por sus siglas en inglés), así como un detector marca EDAX para los estudios elementales de espectroscopía de energía dispersiva de rayos-X (EDS por sus siglas en inglés). Para preparar las muestras para las imágenes de TEM, una pequeña cantidad de las muestras diluidas se depositó cuidadosamente en una rejilla de cobre recubierta con una película delgada de carbono, permitiendo un análisis estructural detallado a escala nanométrica.

## RESULTADOS Y DISCUSIONES

Los resultados obtenidos de la caracterización de los QDs de PbS sintetizados por el método modificado de Hines y Scholes (figura 5). En estos experimentos se observó un crecimiento lineal en el tamaño de las partículas a medida que transcurre el tiempo de reacción (figura 5a). Este aumento progresivo se observa claramente, ya que el tamaño inicial de las partículas, medido en 2.3 nm con una desviación estándar de  $\pm 1.43\text{ nm}$ , evoluciona hasta alcanzar un tamaño de 14 nm en el periodo de análisis, con una desviación estándar mucho mayor de  $\pm 7.09\text{ nm}$ .

Este seguimiento preciso del tamaño de partícula se llevó a cabo mediante el conteo de 300 partículas en las micrografías de TEM en BF (figura 5c y 5d). Estos datos proporcionan el detalle de cómo el tiempo de crecimiento influye directamente en el tamaño de las partículas.

Por otra parte, al explorar las propiedades ópticas (figura 5b), se observó una respuesta solo en el espectro UV al medir la absorbancia de las partículas a 1 minuto de tiempo de reacción. En este espectro se puede observar una absorbancia en 450 nm, además de ser una curva amplia lo que implica una distribución de tamaño no homogénea en las partículas. Es importante señalar que en el resto de los casos (10 s, 30 s, 2 min, 5 min, 10 min y 15 min), al intentar dispersar las partículas sintetizadas en tricloroetileno (TCE), se encontró que no se lograba una dilución adecuada, resultando en la precipitación de todas las partículas. A pesar de los intentos de utilizar diversos solventes, tanto polares como no polares, para disolver las partículas, no se obtuvo éxito en ninguno de los casos. Esta observación sugiere una limitación en la dispersión y solubilidad de las partículas en los solventes probados, lo cual puede ser crucial al considerar aplicaciones específicas o métodos de caracterización. Estas dificultades nos remarcen la importancia de comprender las propiedades de dispersión y solubilidad de las nanopartículas para garantizar mejores resultados y aplicaciones exitosas en futuros estudios o posibles usos tecnológicos.

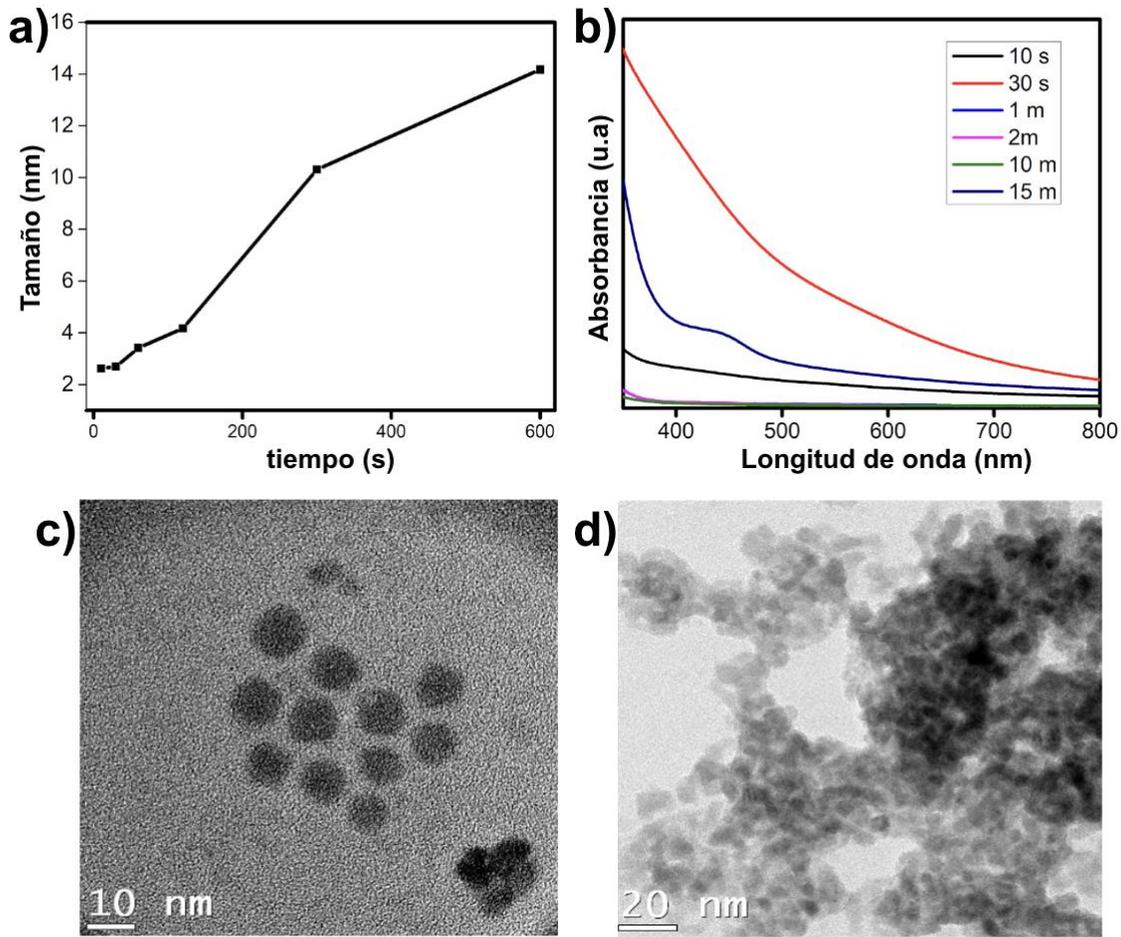


Fig. 5. a) Tamaño promedio de partícula respecto al tiempo de crecimiento. b) espectros de absorción UV-vis-NIR. c) Partículas a 10 minutos de crecimiento. d) aglomerados de partículas a 10 minutos de crecimiento.

Como se evidencia en las imágenes de microscopía electrónica de transmisión (TEM) (figura 5d), se observa la formación de aglomerados en la síntesis, fenómeno que se atribuye al aumento en el rendimiento inducido por la presencia de DFF. La mejora en el rendimiento ha sido explicada por otros investigadores<sup>16</sup> a través de la formación de centros de nucleación de plomo elemental ( $Pb^0$ ), lo que facilita la formación de un mayor conjunto de partículas con menor dispersión de tamaño y además con un tamaño más reducido. No obstante, este incremento en el rendimiento conlleva una limitación en el agente protector, impidiendo que las partículas estén completamente protegidas. Esta falta de protección integral promueve la coalescencia entre las partículas, lo cual se refleja en la formación de aglomerados observables tanto a simple vista como en las imágenes detalladas de TEM. Esta dinámica compleja entre el agente protector y el aumento en el rendimiento resalta la importancia de considerar cuidadosamente los aspectos de síntesis para controlar la dispersión y la estabilidad de las partículas. Estos aglomerados de QDs impiden la correcta disolución de las partículas en los solventes probados, provocando así una dispersión con solutos de tamaño relativamente grande que “escondan” el pico de absorción en la longitud de onda en el rango estudiado debido a la dispersión ocasionada por estos aglomerados. Esto explica la baja o nula señal en los espectros de absorbancia (figura 5b). El compromiso entre el rendimiento y la protección de las partículas se presenta como un desafío clave en la optimización de procesos para la síntesis de nanopartículas; ya que, para este caso, el uso de DFF en la síntesis aumenta la cantidad de monómeros de plomo (oleatos de plomo)

nucleantes<sup>16</sup>, generando que la reacción tenga un déficit de AO y el mismo DFF (agentes protectores), promoviendo la coalescencia y la aglomeración entre los QDs.

Los resultados de la síntesis que involucró el uso de la OLA como parte de la reacción se presentan a continuación. Los espectros de UV se utilizaron como primera aproximación para determinar si los QDs presentan las características necesarias, al relacionar un pico estrecho con una baja dispersión de tamaño. En la figura 6a se puede observar la absorción de los QDs sintetizados a diferentes tiempos. Se puede apreciar que a tiempos cortos de crecimiento se obtienen curvas amplias a baja longitud de onda, esto se atribuye a partículas con tamaño más pequeño, pero a su vez con una dispersión de tamaño más amplia. A partir de 1 minuto se observa una mejora en el pico de absorción lo que indica una estabilización en el crecimiento de las nanopartículas o en otras palabras una mejor distribución de tamaño.

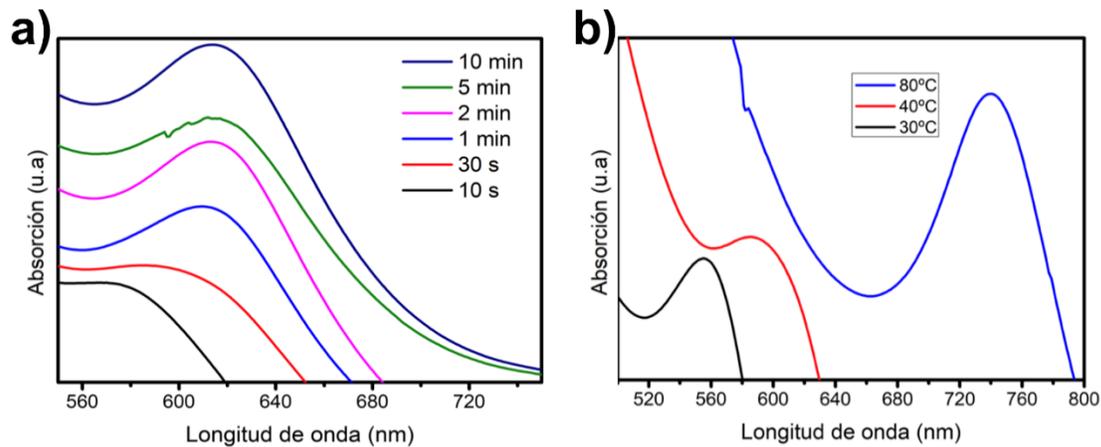


Fig. 6. Espectros de absorción UV-Vis-NIR para partículas sintetizadas con OLA. a) diferente tiempo de crecimiento a temperatura constante; b) diferente temperatura a un tiempo constante.

Con base en este tiempo de crecimiento 1 minuto, se obtuvieron resultados a diferentes temperaturas; observándose en la figura 6b que a  $T=80^{\circ}\text{C}$  se obtiene un pico mejor definido. Esto se atribuye a una mayor energía cinética en el sistema, lo que permite una nucleación más rápida, generando nanopartículas de mayor tamaño que a temperaturas más bajas, pero con una mejor distribución de tamaño debido a un recubrimiento más eficiente por parte del agente protector<sup>17-19</sup>.

En la figura 7a se observa la gráfica aplicando del método de Tauc a los datos del espectro de absorción de los QDs de PbS sintetizados a  $80^{\circ}\text{C}$  con un tiempo de reacción de 1 minuto para un material de band gap directo. En ella se extendió la línea tangente hasta el eje X y se determinó un  $E_g$  de  $\sim 1.5$  eV, lo que cae dentro de la clasificación de materiales semiconductores con un valor de  $E_g$  dentro del rango ideal para aplicaciones fotovoltaicas. Posteriormente, con el uso del Titan G2 80-300 se obtuvo el patrón de difracción de electrones (figura 7b); el cual se indexó y comparó con las tarjetas JCPDS de la base de datos y se determinó que los QDs sintetizados corresponden a PbS (JCPDS 77-0244) con una estructura FCC y un parámetro de red de 5.93 Å. Analizando las imágenes de TEM se obtuvo un tamaño promedio de 2.99 nm con una desviación estándar de  $\pm 0.5$  nm (figura 7c-d). Este promedio se obtuvo de la midiendo 300 partículas en diferentes imágenes.

El espectro de FTIR obtenido de los QDs de PbS sintetizados (figura 7e) presenta una banda en  $\sim 720$   $\text{cm}^{-1}$ , característica para el enlace Pb-S<sup>20</sup>; mientras que los picos en  $\sim 3410$  y  $\sim 3470$   $\text{cm}^{-1}$  se atribuyen a un doble enlace del carbono atribuido a trazas de los materiales orgánicos ODE y OLA; los picos en  $\sim 2920$  y  $\sim 2851$   $\text{cm}^{-1}$  se atribuyen al enlace OH de los ácidos carboxílicos presentes en el agente protector; y las flexiones en  $\sim 1510$  y  $\sim 1410$   $\text{cm}^{-1}$  características de los carboxilatos también atribuidos a los enlaces del agente protector.

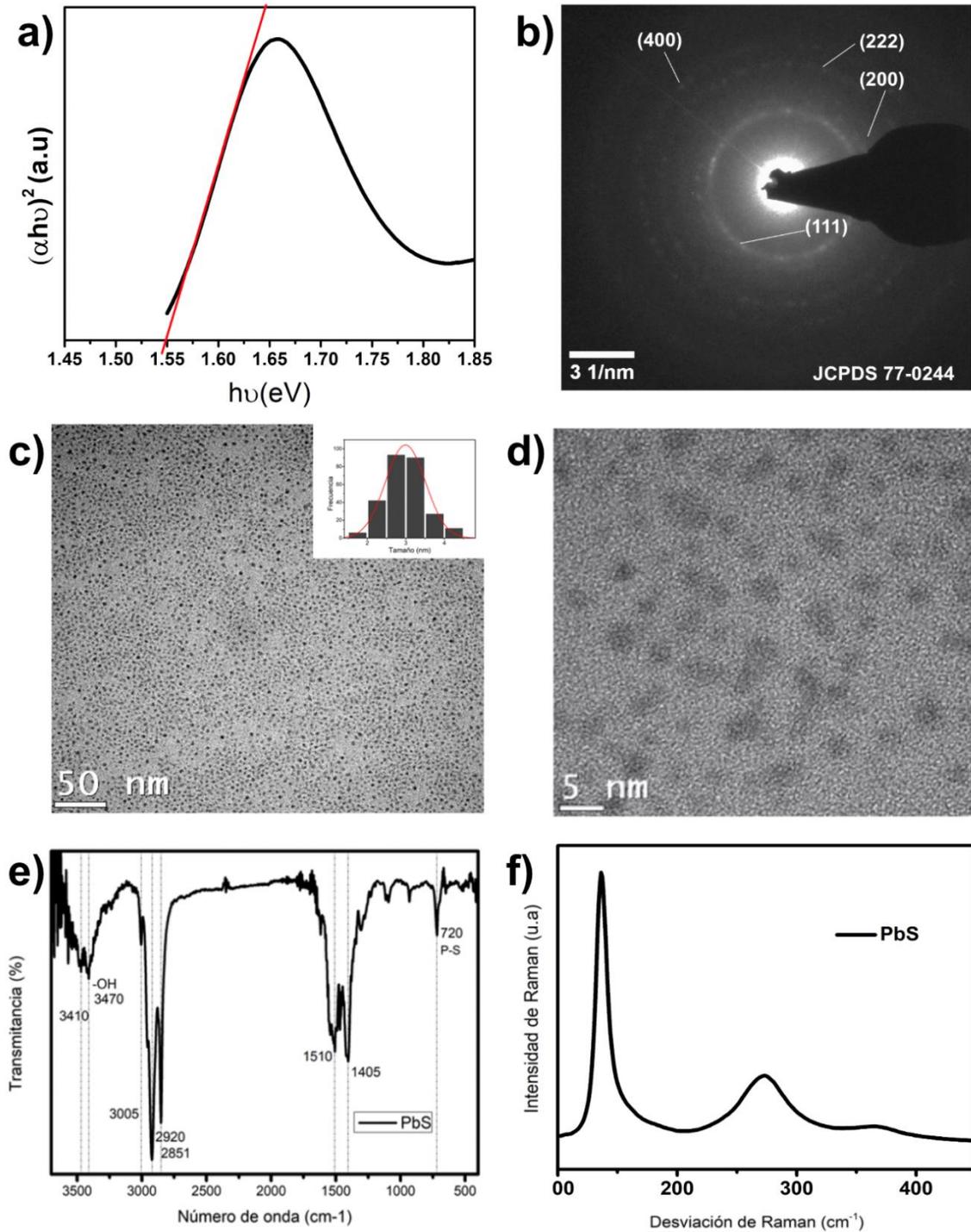


Fig. 7. Análisis realizado a partículas sintetizadas a un tiempo de crecimiento de 60 segundos y una temperatura de 80 °C. a) Gráfica de Tauc; b) SAED; c) Micrografía en campo claro baja magnificación; d) Micrografía en campo claro alta magnificación; e) Espectro de FTIR; f) Espectro de Raman.

En la figura 7f se observa el espectro Raman de los QDs de PbS, donde la banda en  $\sim 134 \text{ cm}^{-1}$  ha sido reportada con anterioridad y es atribuida al estiramiento Pb-O-Pb<sup>21</sup>. Se han reportado bandas en la región de 100 a 1000  $\text{cm}^{-1}$ , estas atribuidas a la degradación de los productos orgánicos y a la oxidación del anión<sup>22-24</sup>. Adicionalmente, en  $\sim 270 \text{ cm}^{-1}$  se presenta una banda relacionada con la formación de un fonón óptico superficial discreto en los QDs de PbS, debido a la presencia de las moléculas del agente protector y a la discontinuidad del cristal de los QDs de PbS, justo en la superficie de los QDs<sup>24</sup>.

## CONCLUSIONES

Mediante modificaciones en la síntesis de QDs de PbS fue posible reducir su tamaño lo suficiente para obtener QDs monodispersos que absorben en el rango óptimo para aplicaciones fotovoltaicas, esto en el caso de la síntesis modificada de Green, con el uso de la oleilamina. Cambios en la temperatura de reacción, modificaron el tamaño final de los QDs, una mayor temperatura de inyección produjo QDs con un pico de absorción óptica más estrecho, esto aunado al uso de oleilamina que reduce la formación de monómeros pre-nucleantes. Con el uso de oleilamina en la síntesis a bajas temperaturas (30°C) se obtiene, a partir de 1 minuto de tiempo de reacción, un pico de absorción óptica estrecho que varía poco al aumentar la duración de la reacción. Una temperatura de inyección de 80°C, con un tiempo de reacción de 1 minuto, produjo QDs de PbS con un tamaño promedio de 2.99 nm y con una distribución de tamaño monodispersas, que absorben en  $\sim 740 \text{ nm}$ , lo que corresponde a un  $E_g$  de  $\sim 1.5 \text{ eV}$ , que está dentro del rango ideal para aplicaciones fotovoltaicas.

Por otro lado, los resultados de la síntesis del método modificado de Hines y Scholes con el uso de la difenilfosfina no lograron mostrar un claro pico de absorción en el rango de interés, ni en el del infrarrojo. Esto debido a la aglomeración observada en las imágenes de TEM que se da entre los QDs sintetizados, primordialmente debido a la falta de agente protector para un adecuado recubrimiento de su superficie, en parte por el aumento en el rendimiento de la reacción causado por la presencia de la difenilfosfina. Estos aglomerados dispersan la luz del experimento de absorción óptica, impidiendo el correcto estudio de las propiedades ópticas de los QDs.

Estos resultados contribuyen a un mejor entendimiento de los diferentes parámetros de la síntesis de QDs de PbS con picos de absorción en el rango de interés para aplicaciones fotovoltaicas, lo que aumenta el potencial de futuras aplicaciones de estos QDs en el desarrollo de tecnologías fotovoltaicas.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo recibido de la “Convocatoria de Investigación Científica Básica 2017-2018” de la SECIHTI, a través del proyecto A1-S-27146. J.M.C.M agradece el apoyo económico recibido de la SECIHTI.

## REFERENCIAS

1. Kroupa, D. M. et al. “Tuning colloidal quantum dot band edge positions through solution-phase surface chemistry modification”. *Nat. Commun.* 8, 15257 (2017).
2. Fernée, M. J.; Thomsen, E.; Jensen, P.; Rubinsztein-Dunlop, H. “Highly Efficient Luminescence from a Hybrid State Found in Strongly Quantum Confined PbS Nanocrystals”. *Nanotechnology*, 17 (4), 956–962 (2006).
3. Zdanowicz, T., Rodziejewicz, T., & Zabkowska-Waclawek, M. “Theoretical analysis of the optimum energy band gap of semiconductors for fabrication of solar cells for applications in higher latitudes locations”. *Sol. Ener. Mater. Sol. Cells*, 87(1–4), 757–769 (2005).
4. Bhandari, K. P. et al. “Thin film solar cells based on the heterojunction of colloidal PbS quantum dots with CdS”. *Sol. Ener. Mater. Sol. Cells*, 117, 476–482 (2013).
5. Jasieniak, J., Califano, M. & Watkins, S. E. “Size-dependent valence and conduction band-edge energies of semiconductor nanocrystals”. *ACS Nano* 5, 5888–5902 (2011).

6. Zeitouny, J., Katz, E.A., Dollet, A. et al. “Band Gap Engineering of Multi-Junction Solar Cells: Effects of Series Resistances and Solar Concentration”. *Sci Rep.* 7, 1766 (2017).
7. «Irradiación solar - ECyT-ar». Accedido: 17 de diciembre de 2024. [En línea]. Disponible en: [https://cyt-ar.com.ar/cyt-ar/index.php/Irradiaci%C3%B3n\\_solar#Fuentes](https://cyt-ar.com.ar/cyt-ar/index.php/Irradiaci%C3%B3n_solar#Fuentes).
8. Lee, Wonyoung & Dasgupta, Neil & Jung, Hee Joon & Lee, Jung-Rok & Sinclair, Robert & Prinz, Fritz. “Scanning tunneling spectroscopy of lead sulfide quantum wells fabricated by atomic layer deposition”. *Nanotechnology.* 21, 485402 (2010).
9. Hines, M.A. and Scholes, G.D. “Colloidal PbS Nanocrystals with Size-Tunable Near-Infrared Emission: Observation of Post-Synthesis Self-Narrowing of the Particle Size Distribution”. *Adv. Mater.* 15, 1844-1849 (2003).
10. Yu, W. W., & Peng, X. “Formation of High-Quality CdS and Other II-VI Semiconductor Nanocrystals in Noncoordinating Solvents: Tunable Reactivity of Monomers”. *Angew. Chem. Inter. Ed.* 41(13), 2368–2371 (2002).
11. Mark C. Weidman, Megan E. Beck, Rachel S. Hoffman, Ferry Prins, and William A. Tisdale. “Monodisperse, Air-Stable PbS Nanocrystals via Precursor Stoichiometry Control”. *ACS Nano*, 8, 6363–6371 (2014).
12. Choi, H.; Ko, J.; Kim, Y.; Jeong, S. “Steric-Hindrance-Driven Shape Transition in PbS Quantum Dots”. *J. Am. Chem. Soc.* 135, 5278–5281 (2013).
13. Torres-Gomez, N., Garcia-Gutierrez, D. F., Lara-Canche, A. R., Triana-Cruz, L., Arizpe-Zapata, J. A., & Garcia-Gutierrez, D. I. “Absorption and emission in the visible range by ultra-small PbS quantum dots in the strong quantum confinement regime with S-terminated surfaces capped with diphenylphosphine”. *J. Alloys Compd.* 860, 158443 (2021).
14. Green, P. B., Narayanan, P., Li, Z., Sohn, P., Imperiale, C. J., & Wilson, M. W. “Controlling Cluster Intermediates Enables the Synthesis of Small PbS Nanocrystals with Narrow Ensemble Line Widths”. *Chem. Mater.* 32(9), 4083–4094 (2020).
15. García-Gutiérrez, D. F.; González Ovalle, D.; Hernández Casillas, L. P.; Fungo, F.; García-Gutiérrez, D. I. “Efecto Del Cambio de Agente Protector En Las Propiedades Ópticas y Eléctricas de Nanopartículas de Sulfuro de Plomo (PbS)”. *Ingenierías*, 8 (5), 6–16 (2014).
16. Lina M. De Leon-Covian, Jesús A. Arizpe-Zapata, Marco A. Garza-Navarro, Domingo I. Garcia-Gutierrez. “Effect of diphenylphosphine in the synthesis of PbSe Nanoparticles”. *Chalcogenide Lett.*, 11 (11), 567 – 576 (2014).
17. Thanh, N. T. K., Maclean, N., & Mahiddine, S. “Mechanisms of Nucleation and Growth of Nanoparticles in Solution”. *Chem. Rev.*, 114(15), 7610–7630 (2014).
18. Manzoor, U., Tuz Zahra, F., Rafique, S., Moin, M. T., & Mujahid, M. “Effect of Synthesis Temperature, Nucleation Time, and Postsynthesis Heat Treatment of ZnO Nanoparticles and Its Sensing Properties”. *Journal of Nanomaterials*, 2015, 1–6 (2015).
19. Li, D., & Kaner, R. B. “How nucleation affects the aggregation of nanoparticles”. *J. Mater. Chem.*, 17(22), 2279 (2007).
20. Zofia Mielke, G. Dana Brabson, and Lester Andrews. “Matrix Infrared Spectra of the Phosphorus Sulfides PS P2S, and PS2”. *J. Phys. Chem.* 95, 75-79 (1991).
21. Blackburn, J. L.; Chappell, H.; Luther, J. M.; Nozik, A. J.; Johnson, J. C. “Correlation between Photooxidation and the Appearance of Raman Scattering Bands in Lead Chalcogenide Quantum Dots”. *J. Phys. Chem. Lett.* 2, 599–603 (2011).
22. Li, X., Minamimoto, H., & Murakoshi, K. “Electrochemical surface-enhanced Raman scattering measurement on ligand capped PbS quantum dots at gap of Au nanodimer”. *Spectrochim. Acta A Mol. Biomol. Spectrosc.* 197, 244–250 (2018).

23. Baranov, A. V., Bogdanov, K. V., Ushakova, E. V., Cherevkov, S. A., Fedorov, A. V., & Tsharntke, S. “Comparative analysis of Raman spectra of PbS macro- and nanocrystals”. *Opt. Spectrosc.* 109(2), 268–271 (2010).
24. García-Gutiérrez, D. F., Hernández-Casillas, L. P., Cappellari, M. V., Fungo, F., Martínez-Guerra, E., & García-Gutiérrez, D. I. “Influence of the Capping Ligand on the Band Gap and Electronic Levels of PbS Nanoparticles through Surface Atomistic Arrangement Determination”. *ACS Omega*, 3(1), 393–405 (2018).

# Aproximación de operadores fraccionarios en el dominio de la frecuencia y su aplicación en sistemas caóticos

Ernesto Zambrano-Serrano<sup>A</sup>, Miguel Ángel Platas-Garza<sup>A</sup>,  
Elizabeth Guadalupe Lara Hernández<sup>A</sup>, Efraín Alcorta García<sup>A</sup>,  
Jesús Manuel Muñoz-Pacheco<sup>B</sup>

<sup>A</sup>Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

<sup>B</sup>Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias de la Electrónica, México  
ernesto.zambranos@uanl.edu.mx, miguel.platasgrz@uanl.edu.mx, efrain.alcortagr@uanl.edu.mx,  
elizabeth.larahr@uanl.edu.mx, jesusm.pacheco@correo.buap.mx.

## RESUMEN

*En este trabajo, se difunde una metodología para la aproximación del operador integrador fraccionario, basada en la respuesta en el dominio de la frecuencia. Esta aproximación permite aproximar un integrador de orden fraccionario mediante funciones de transferencia de orden entero, ajustando el orden fraccionario en función del ancho de banda y la precisión requerida. Se analizan dos rangos de orden fraccionario,  $[0.1, 0.9]$  y  $[0.9, 0.99]$ , verificando que la pendiente del diagrama de magnitud corresponde al comportamiento de  $-20\alpha$  dB/década. Finalmente, se implementa la aproximación en un sistema caótico de orden fraccionario, evaluando su efectividad en la generación de atractores extraños. Los resultados muestran que la metodología basada en diagramas de Bode ofrece una estrategia eficiente para modelar sistemas caóticos fraccionarios dentro de un rango de frecuencia específico y sus aplicaciones en ingeniería.*

## PALABRAS CLAVE

Integradores fraccionarios; Diagramas de Bode; Espacio de Estados; Xcos; caos.

## ABSTRACT

*In this work, a methodology for approximating the fractional-order integrator operator in the frequency domain is considered, based on Bode analysis. This approximation enables the representation of fractional-order systems using integer-order transfer functions, adjusting the fractional order according to the bandwidth and required accuracy. Two ranges of fractional order,  $[0.1, 0.9]$  and  $[0.9, 0.99]$ , are analyzed, verifying that the amplitude diagram slope follows the behavior of  $-20\alpha$  dB/decade. Finally, the approximation is implemented in a fractional-order chaotic system, evaluating its effectiveness in generating strange attractors. The results show that the methodology based on Bode diagrams provides an efficient strategy for modeling fractional order chaotic systems within a specific frequency range and its applications in engineering.*

## KEYWORDS

Fractional Integrators; Bode diagrams; State Space; Xcos; chaos.

## INTRODUCCIÓN

Imagina un mundo donde el presente no solo depende del instante anterior, sino de toda su historia. Esa es la esencia del cálculo fraccionario. A diferencia del cálculo clásico, basado en derivadas y ecuaciones de orden entero, el cálculo fraccionario incorpora memoria y efectos heredados, permitiendo modelar sistemas con dinámicas más ricas y complejas<sup>1,2</sup>.

Este enfoque ha encontrado aplicaciones en una gran variedad de áreas, que van desde el control de sistemas mecánicos y eléctricos y de biomedicina, donde describe la propagación de señales en tejidos biológicos<sup>3,4</sup>. De igual manera desempeña un papel clave en el estudio de materiales viscoelásticos, en la cual la respuesta a una fuerza no solo depende de la magnitud aplicada, sino también de su historial previo. En el ámbito del caos, esta propiedad introduce nuevas complejidades en la dinámica del sistema, que pueden exhibir bifurcaciones, coexistencia de atractores y comportamientos dinámicos no observados en sus contrapartes de orden entero<sup>5</sup>.

El estudio de sistemas caóticos fraccionarios ha demostrado que la variación del orden fraccionario no solo modifica el comportamiento transitorio, sino también influye en la estabilidad de los atractores como en su estructura geométrica dentro del espacio de fases. Esto ha motivado investigaciones sobre la relación entre la memoria de los operadores fraccionarios y la generación de caos, así como su impacto en aplicaciones prácticas, como la criptografía, el análisis de sistemas mecánicos y eléctricos, y el modelado de sistemas neuronales<sup>6</sup>.

Dentro del análisis numérico de sistemas fraccionarios, se han desarrollado dos enfoques principales el dominio del tiempo y de la frecuencia. Los métodos en el dominio del tiempo están basados en la discretización de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, destacando algoritmos como Adams-Bashforth-Moulton<sup>7</sup> en su versión predictor-corrector. Estos métodos permiten obtener soluciones precisas, pero su implementación puede ser computacionalmente costosa cuando se requiere evaluar sistemas dinámicos de largo plazo<sup>8</sup>.

Por otro lado, los métodos en el dominio de la frecuencia se centran en la aproximación de operadores fraccionarios mediante funciones de transferencia de orden entero, facilitando su implementación en sistemas lineales e ingeniería de control. Entre los métodos más utilizados se encuentran los de Charef<sup>9</sup>, Carlson<sup>10</sup> y Oustaloup<sup>11</sup>, los cuales permiten construir aproximaciones racionales del operador fraccionario  $1/s^\alpha$ . En particular, el método de Charef ha demostrado ser una técnica robusta para obtener aproximaciones con una buena relación entre precisión y complejidad computacional.

Dado que los elementos fraccionarios presentan una respuesta de frecuencia característica con una pendiente de  $-20\alpha$  dB/década, en este trabajo se explora la aproximación del integrador fraccionario en el dominio de la frecuencia, utilizando diagramas de Bode para representar su comportamiento en distintos rangos de orden fraccionario. Para ello, empleamos un método basado en la aproximación de la pendiente mediante un conjunto de líneas rectas en zigzag, con segmentos de 0 dB/década y  $-20$  dB/década. Este enfoque permite obtener una representación lineal del integrador fraccionario dentro de una banda de frecuencia específica, donde el orden de la aproximación depende tanto del ancho de banda seleccionado como del nivel de precisión requerido. Posteriormente, se evaluará la efectividad de estas aproximaciones y su aplicación en un sistema caótico de orden fraccionario, verificando que preserve la generación de atractores extraños.

## SÍNTESIS DEL INTEGRADOR FRACCIONARIO

Una de las formas más comunes de describir el comportamiento de un sistema de orden fraccionario es mediante su función de transferencia. En este contexto, consideramos la siguiente expresión:

$$G(s) = \frac{1}{s^\alpha}, \quad (1)$$

donde  $s \in \mathbb{C}$  y  $G = (j\omega)$  con  $s = j\omega$  representa la evaluación de la función de transferencia en el dominio de la frecuencia siendo  $\alpha$  es un número positivo que representa el orden fraccionario del sistema. Entonces, la función de transferencia de un sistema de orden fraccionario que opera en múltiples frecuencias se describe mediante:

$$G(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{s}{p_{T_i}}\right)^{\alpha_i}}, \quad 0 < \alpha_i < 1; \text{ para } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

donde  $1/p_{T_i}$ , representa la constante de tiempo y  $\alpha_i$  es el orden fraccionario del sistema. Con estos parámetros, el operador fraccionario puede modelarse en el dominio de la frecuencia mediante la función de transferencia de un polo de potencia fraccionaria, dada por:

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (3)$$

dado que el ancho de banda de un sistema dinámico es acotado, la magnitud de la respuesta en frecuencia derivada de (3) puede ser aproximada por un sistema con múltiples polos y según el método mostrado en la figura.<sup>9</sup>

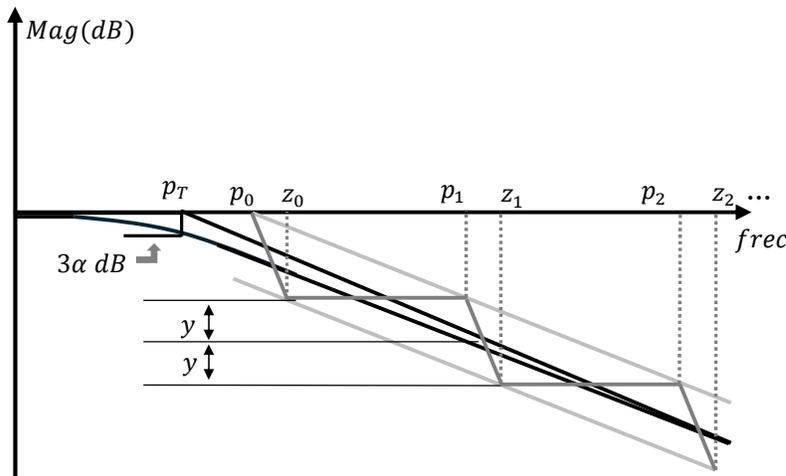


Fig. 1. Diagrama de Bode de  $\frac{1}{1+(s/p_T)^\alpha}$  con una pendiente asintótica de  $-20 \alpha$  dB/década y su aproximación mediante líneas rectas en zig-zag con pendientes individuales de  $-20$  y  $0$  dB/década.

En consecuencia, la función de transferencia que representa la aproximación al integrador fraccionario de la siguiente forma:

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\alpha} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (4)$$

donde el número total de polos en la función de transferencia es  $N$ . De este modo, la expresión de la función de orden fraccionario  $\frac{1}{s^\alpha}$  se reduce a la determinación de los ceros y polos del sistema de orden entero.

De acuerdo con el método de aproximación en el dominio de la frecuencia mediante el diagrama de Bode, si el error de cálculo de las variables del sistema dinámico no excede  $y$  dB ( $y > 0$ ), los ceros y polos del sistema dinámico pueden determinarse de acuerdo con la siguiente ecuación.

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 = p_T 10^{y/(20\alpha)}; \\ z_0 = p_0 10^{y/(10(1-\alpha))}; \\ p_1 = z_0 10^{y/(10)}; \\ z_1 = p_1 10^{y/(10(1-\alpha))}; \\ \vdots \\ z_{N-1} = p_{N-1} 10^{y/(10(1-\alpha))}; \\ p_N = z_{N-1} 10^{y/(10\alpha)}; \end{array} \right. \quad (5)$$

$p_0$  es el primer polo de la dinámica del sistema y es determinado por el error especificado  $y$  y  $p_T$ , además  $p_N$  es el último polo determinado por  $N$ .

Definiendo  $k = 10^{y/(10(1-\alpha))}$  y  $d = 10^{y/(20\alpha)}$ , se obtiene que el producto de ambos términos es  $kd = 10^{y/(10\alpha(1-\alpha))}$ . Entonces

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\alpha} = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(kd)^i kp_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(kd)^i p_0}\right)}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (6)$$

supongamos que la frecuencia angular máxima en el sistema dinámico es  $\omega_{max}$ , entonces  $p_{N-1} < \omega_{max} < p_N$ , y de acuerdo con la ecuación (5)

$$N - 1 < \frac{\log\left(\frac{\omega_{max}}{p_0}\right)}{\log(kd)} < N. \quad (7)$$

De tal forma que si  $\omega_{max}$  y  $p_0$  son conocidas el integrador de orden fraccionario se aproxima mediante una función de transferencia lineal de orden  $N + 1$ , donde  $N$  esta dado por la siguiente expresión:

$$N = 1 + \left\lfloor \frac{\log\left(\frac{\omega_{max}}{p_0}\right)}{\log(kd)} \right\rfloor, \quad (8)$$

siendo  $\lfloor \cdot \rfloor$  la función piso.

## APROXIMACIONES EN FRECUENCIA DE OPERADORES FRACCIONARIOS

En esta sección, se presentan diversas aproximaciones del integrador fraccionario  $1/s^\alpha$  para distintos valores de  $\alpha$ , obtenidas mediante el método de racionalización en el dominio de la frecuencia descritos en la sección anterior.

A continuación, los resultados se muestran en las tablas I-II. La tabla I presenta la aproximación de la función de transferencia cuando  $y = 1dB$ , con un tamaño de paso de  $\alpha = 0.01$  en el intervalo  $\alpha \in [0.9, 0.99]$ , considerando  $\omega_{max} = 100$  y  $p_T = 0.01$ . Mientras que la tabla II muestra la aproximación de la función de transferencia cuando  $y = 1dB$  con un tamaño de paso de  $\alpha = 0.1$ , en el intervalo de  $(\alpha \in [0.1, 0.9])$ , considerando  $\omega_{max} = 100$  y  $p_T = 0.1$ . (ver Anexo 1)

Tabla I. Aproximaciones operador de orden fraccionario  $1/s^\alpha$  con  $\alpha \in [0.9,0.99]$  y error máximo de 1 dB.

$\alpha$	$N$	Función de transferencia $G(s)$
0.9	4	$\frac{1.243(s + 0.0114)(s + 0.1467)(s + 1.8957)}{(s + 0.0011)(s + 0.0147)(s + 0.1896)(s + 2.4484)}$
0.91	4	$\frac{1.297(s + 0.0147)(s + 0.2438)(s + 4.0556)}{(s + 0.0011)(s + 0.0189)(s + 0.3140)(s + 5.2233)}$
0.92	4	$\frac{1.353(s + 0.0202)(s + 0.4603)(s + 10.5133)}{(s + 0.0011)(s + 0.0259)(s + 0.5912)(s + 13.5031)}$
0.93	3	$\frac{1.155(s + 0.0304)(s + 1.0434)}{(s + 0.0011)(s + 0.0389)(s + 1.3365)}$
0.94	3	$\frac{1.255(s + 0.0525)(s + 3.1111)}{(s + 0.0011)(s + 0.0670)(s + 3.9746)}$
0.95	3	$\frac{1.278(s + 0.1129)(s + 14.3845)}{(s + 0.0011)(s + 0.1438)(s + 18.3298)}$
0.96	3	$\frac{1.314(s + 0.3565)(s + 143.3013)}{(s + 0.0011)(s + 0.4532)(s + 182.1448)}$
0.97	2	$\frac{1.233(s + 2.4259)}{(s + 0.0011)(s + 3.0759)}$
0.98	2	$\frac{1.265(s + 112.4658)}{(s + 0.0011)(s + 142.2529)}$
0.99	2	$\frac{1.262(s + 1.1233 \times 10^7)}{(s + 0.0011)(s + 1.4175 \times 10^7)}$

La figura 2 muestra los diagramas de magnitud de Bode correspondientes a la aproximación del operador fraccionario  $1/s^\alpha$  considerando un error máximo de 1 dB. En la figura 2(a), se presentan los diagramas para valores de  $\alpha$  en el rango de  $[0.91, 0.99]$ , mientras que en la figura 2(b) se muestran para  $\alpha$  en el intervalo de  $[0.1, 0.9]$ . Las funciones de transferencia utilizadas en estas aproximaciones se detallan en la tabla I y II, respectivamente.

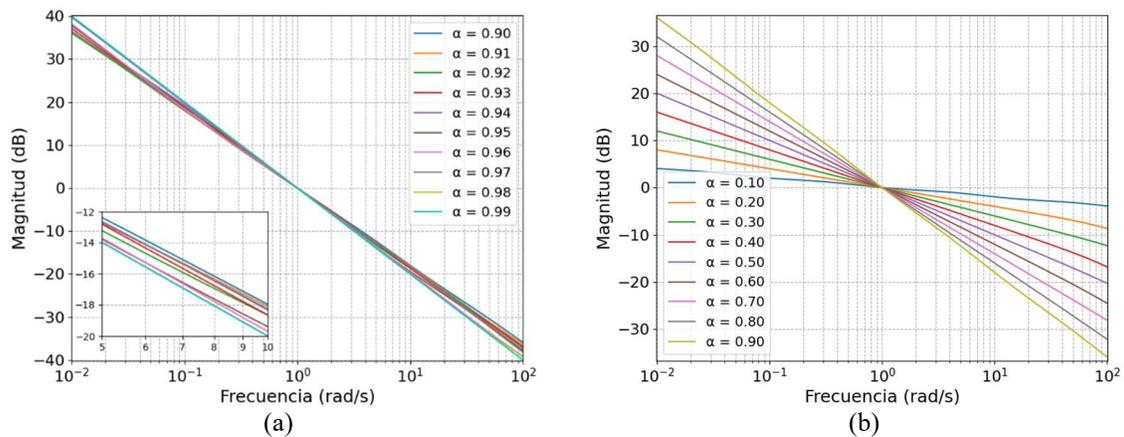


Fig. 2. Diagrama de magnitud de aproximaciones del operador fraccionario  $1/s^\alpha$  considerando un error máximo de 1 dB. (a) Para valores de  $\alpha$  en el rango de  $[0.9,0.99]$ . (b) Para valores de  $\alpha$  en el rango de  $[0.1,0.9]$ .

El operador fraccionario  $1/s^\alpha$  tiene un diagrama de amplitud de Bode caracterizado por una pendiente de  $-20\alpha$  dB/década. En este método, dicha pendiente se aproxima mediante un conjunto de líneas rectas en zigzag conectadas entre sí, con pendientes individuales de 0 dB/década y  $-20$  dB/década. Esto permite obtener una aproximación lineal del integrador de orden fraccionario con cualquier nivel de precisión deseado dentro de una banda de frecuencia específica.

Las tablas III y IV presentan los errores máximos obtenidos en la aproximación del integrador fraccionario para valores de  $\alpha$  en el rango de  $[0.91, 0.99]$ , y de  $[0.1, 0.9]$ , mostrados en las tablas I y II, respectivamente. El orden del sistema  $N$  varía con  $\alpha$  para mantener el error máximo por debajo de 1 dB. Se observa que, en la mayoría de los casos, el error se mantiene por debajo de 1 dB, validando la precisión del método de aproximación. Sin embargo, para  $\alpha=0.97$  el error máximo alcanza 1.01 dB, superando ligeramente el umbral establecido. Esto sugiere que la precisión de la aproximación está relacionada con el aumento en el número de polos y ceros requeridos para aproximar los operadores.

Tabla III. Errores máximos en la aproximación del integrador fraccionario para distintos valores de  $\alpha \in [0.9, 0.99]$ .

$\alpha$	0.9	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
Error dB	0.203	0.259	0.382	0.362	0.521	0.541	0.861	1.01	0.73	0.399

Tabla IV. Errores máximos en la aproximación del integrador fraccionario para distintos valores de  $\alpha [0.1, 0.9]$ .

$\alpha$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
Error dB	0.23	0.238	0.138	0.471	0.188	0.367	0.085	0.10	0.202

Estos resultados servirán como base para la implementación del operador fraccionario en aplicaciones dinámicas, como se discutirá en la siguiente sección

### APLICACIÓN DEL INTEGRADOR DE ORDEN FRACCIONARIO EN UN SISTEMA CAÓTICO

Se propuso un modelo caótico de orden fraccionario con una estructura tipo Jerk.<sup>12</sup> La figura 3 presenta el diagrama de bloques correspondiente, que describe la dinámica del modelo.

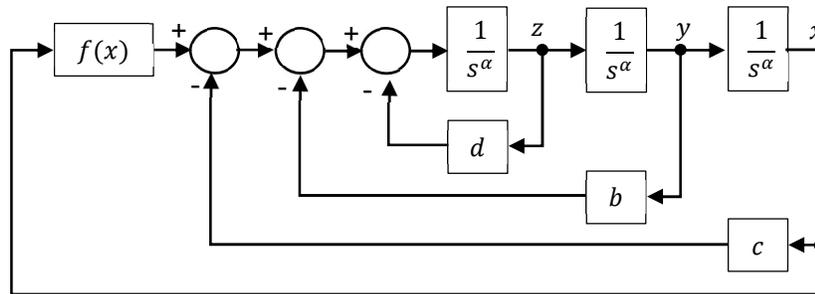


Fig. 3. Diagrama de bloques del sistema caótico de orden fraccionario.

El modelo resultante se expresa en el espacio de estados mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 D^\alpha x &= y, \\
 D^\alpha y &= z, \\
 D^\alpha z &= -dx - by - cx + f(x),
 \end{aligned} \tag{9}$$

donde  $(x, y, z)$  son las variables de estado,  $f(x) = kx|x|$ , es la función no lineal, y  $(d, b, c, k)$  son los parámetros del sistema. Además,  $\alpha$  es el orden de la derivada fraccionaria y  $D^\alpha$  representa la derivada de orden fraccionario tipo Caputo<sup>7</sup>.

El sistema (9) es disipativo si y solo si el parámetro  $d$  es positivo. En este caso, conforme el tiempo tiende a infinito, cualquier volumen que contenga la trayectoria del sistema decrece exponencialmente hasta reducirse a cero. Como resultado, todas las órbitas del sistema quedan finalmente confinadas en un subconjunto de volumen nulo, y el movimiento asintótico se estabiliza en un atractor dentro del espacio fase.

El sistema (9) presenta tres puntos de equilibrio  $E_1(0,0,0)$ ,  $E_2(\frac{c}{k}, 0,0)$  y  $E_3(-\frac{c}{k}, 0,0)$ ,  $E_1$  es un punto silla de índice 1, mientras que  $E_2$  y  $E_3$  son puntos silla de índice 2.<sup>12</sup> Para realizar la simulación del sistema, es necesario transformar el integrador fraccionario  $\frac{1}{s^\alpha}$  en una función de transferencia, de acuerdo con las tablas I y II. Posteriormente, esta función de transferencia se convertirá en una representación en espacio de estados definida como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t); \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \quad (10)$$

donde,  $u(t)$  es la entrada,  $x(t)$  es el vector de estado,  $y(t)$  es el vector de salida, y  $A, B, C, D$  son las matrices de coeficientes del sistema. Es bien sabido que existen diversas técnicas para obtener la representación en el espacio de estado a partir de la función de transferencia. Considere la función de transferencia general:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0s^N + b_1s^{N-1} + \dots + b_{N-1}s + b_N}{s^N + a_1s^{N-1} + \dots + a_{N-1}s + a_N}. \quad (11)$$

En este artículo, se adopta la representación en espacio de estados en su forma canónica controlable, la cual permite una estructura adecuada para el análisis del sistema.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{N-1}(t) \\ \dot{x}_N(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_N & -a_{N-1} & -a_{N-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{N-1}(t) \\ x_N(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t); \\ y(t) &= [b_N - a_N b_0 \quad b_{N-1} - a_{N-1} b_0 \quad \dots \quad b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{N-1}(t) \\ x_N(t) \end{bmatrix} + b_0 u(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Por lo tanto, si consideramos que el orden de los integradores del sistema mostrado en la figura 3 es  $\alpha = 0.95$ , con un error de aproximación de  $y = 1dB$ , una frecuencia máxima de  $\omega_{max} = 100$  y  $p_T = 0.01$ , entonces, de acuerdo con el método de aproximación en el dominio de la frecuencia, la representación en el espacio de estados se obtiene a partir de la función de transferencia mostrada en la tabla I, quedando de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.0029 & -2.6561 & -18.4747 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t); \\ y(t) &= [2.0755 \quad 18.5277 \quad 1.278] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

El modelo del sistema, en su representación mediante el diagrama de bloques mostrado en la figura 3 ha sido implementado en XCOS, considerando el integrador de orden fraccionario definido en la ecuación (13). La implementación del sistema se muestra en la figura 4, mientras que los resultados de la simulación se presentan en la figura 5.

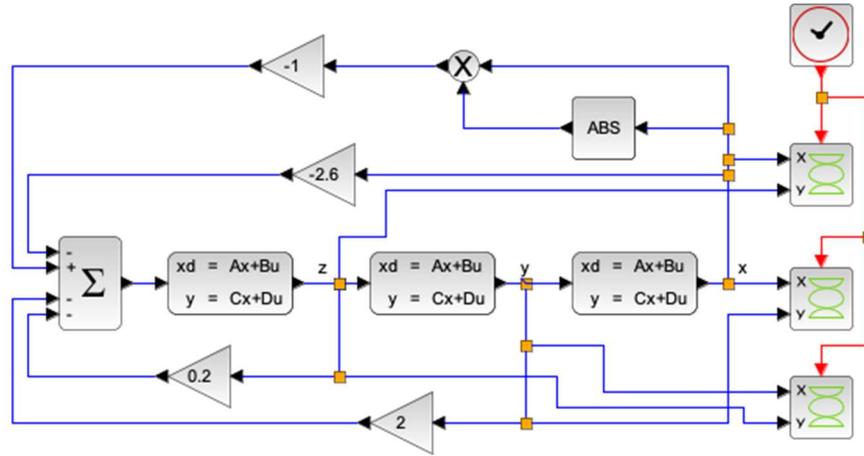


Fig. 4. Diagrama de bloques en XCOS para la simulación del sistema (3) considerando  $1/s^{0.95}$ .

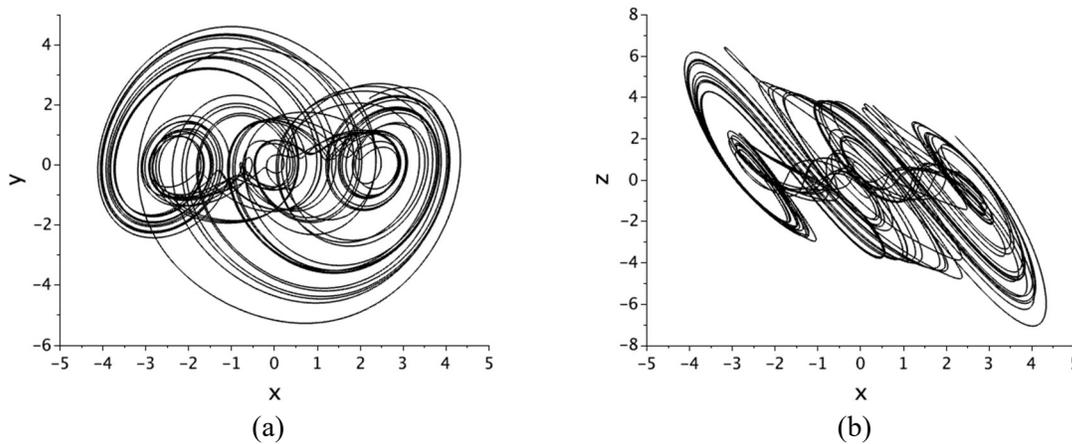


Fig. 5. Planos de fase del atractor caótico dado en (9) considerando la representación en espacio de estados de (12) cuando  $\alpha=0.95$ . (a) plano x-y, (b) plano x-z.

A partir de esta simulación, se puede observar que el sistema (9) exhibe un atractor extraño cuando los parámetros del sistema ( $d, b, c, k$ ) toman los valores (0.2, 2, -2.6, -1). Al utilizar métodos de aproximación en el dominio de la frecuencia para operadores fraccionarios, es fundamental tener en cuenta sus limitaciones y cómo pueden afectar la precisión de los resultados. Aunque estas técnicas permiten obtener representaciones de orden entero que facilitan el análisis y la implementación en aplicaciones tanto en electrónica digital como analógica, no siempre logran conservar por completo las propiedades dinámicas del sistema original. En,<sup>13-14</sup> se menciona que la elección del rango de frecuencia adecuado y el nivel de aproximación utilizado juegan un papel clave en la reducción de errores y en la fidelidad del modelo fraccionario. Por esta razón, es recomendable evaluar cuidadosamente la validez de la aproximación según la aplicación específica y, cuando sea necesario, complementarla con estrategias que tengan en cuenta la memoria inherente de los sistemas fraccionarios, con el objetivo de mejorar la precisión del modelo y evitar posibles desviaciones en su comportamiento.

## CONCLUSIONES

En este trabajo, se analizó la aproximación del operador integrador fraccionario en el dominio de la frecuencia mediante el uso de diagramas de Bode y su aplicación en sistemas caóticos de orden fraccionario. La metodología empleada permitió representar sistemas fraccionarios mediante funciones de transferencia de orden entero, ajustando el orden de la aproximación en función del ancho de banda y la precisión deseada. Los resultados obtenidos muestran que la estrategia basada en la aproximación de la pendiente teórica  $-20\alpha$  dB/década a través de líneas rectas en zigzag permite modelar con buena precisión el comportamiento del operador fraccionario en un rango de frecuencia específico. Sin embargo, se observó que el error en la aproximación depende tanto del número de polos y ceros utilizados como del intervalo de frecuencia seleccionado. Asimismo, la implementación a través de la simulación en XCOS, del integrador fraccionario aproximado en un sistema caótico de orden fraccionario permitió verificar que la estrategia utilizada conserva las principales características dinámicas del sistema, incluyendo la generación de atractores extraños. No obstante, como se ha mencionado en estudios previos, la aproximación en el dominio de la frecuencia presenta ciertas limitaciones inherentes, particularmente en la capacidad de capturar la memoria a largo plazo característica de los operadores fraccionarios. Finalmente, los métodos presentados en este trabajo pueden ser de utilidad en diversas aplicaciones de ingeniería, incluyendo el diseño de controladores fraccionarios, el modelado de sistemas mecánicos y eléctricos, y el análisis de señales en sistemas biológicos.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Departamento de Electrónica y Automatización de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la UANL, y al proyecto (CF-2023-I-1110), apoyado por la convocatoria Ciencia de Frontera 2023 del CONAHCYT. Muñoz-Pacheco agradece a la BUAP por el apoyo brindado a través del proyecto VIEP-2025.

## REFERENCIAS

1. Vieira, L. C., Costa, R. S., & Valério, D. (2023). An overview of mathematical modelling in cancer research: fractional calculus as modelling tool. *Fractal and fractional*, 7(8), 595.
2. Tarasov, V. E. (2019). On history of mathematical economics: Application of fractional calculus. *Mathematics*, 7(6), 509.
3. Ali, A., Bingi, K., Ibrahim, R., Devan, P. A. M., & Devika, K. B. (2024). A review on FPGA implementation of fractional-order systems and PID controllers. *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, 155218.
4. Burrage, K., Burrage, P.M., Bueno-Orovio, A. (2024). Fractional Models in Biology and Medicine. In: Kevrekidis, P.G., Cuevas-Maraver, J. (eds) *Fractional Dispersive Models and Applications. Nonlinear Systems and Complexity*, vol 37. Springer, Cham.
5. Munoz-Pacheco, J. M., Posadas-Castillo, C., & Zambrano-Serrano, E. (2020). The effect of a non-local fractional operator in an asymmetrical glucose-insulin regulatory system: Analysis, synchronization and electronic implementation. *Symmetry*, 12(9), 1395.
6. Tamba, V. K., Biamou, A. L. M., Pham, V. T., Grassi, G., Tagne, F. K., & Takougang, A. C. N. (2025). Fractional-order bi-Hopfield neuron coupled via a multistable memristor: Complex neuronal dynamic analysis and implementation with microcontroller. *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, 191, 155661.
7. Diethelm, K., Ford, N. J., & Freed, A. D. (2002). A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. *Nonlinear Dynamics*, 29, 3-22.
8. Echenausía-Monroy, J. L., Quezada-Tellez, L. A., Gilardi-Velázquez, H. E., Ruíz-Martínez, O. F., Heras-Sánchez, M. D. C., Lozano-Rizk, J. E., ... & Álvarez, J. (2024). Beyond Chaos in Fractional-Order Systems: Keen Insight in the Dynamic Effects. *Fractal and Fractional*, 9(1), 22.

9. Charef, A., Sun, H. H., Tsao, Y. Y., & Onaral, B. (1992). Fractal system as represented by singularity function. *IEEE Transactions on automatic Control*, 37(9), 1465-1470.
10. Carlson, G., & Halijak, C. (1964). Approximation of fractional capacitors  $(1/s)^{(1/n)}$  by a regular Newton process. *IEEE Transactions on Circuit theory*, 11(2), 210-213.
11. Oustaloup, A., Levron, F., Mathieu, B., & Nanot, F. M. (2000). Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 47(1), 25-39.
12. Azar, A. T., Vaidyanathan, S., & Ouannas, A. (Eds.). (2017). *Fractional order control and synchronization of chaotic systems* (Vol. 688). Springer.
13. Tavazoei, M. S., & Haeri, M. (2007). Unreliability of frequency-domain approximation in recognising chaos in fractional-order systems. *IET Signal Processing*, 1(4), 171-181.
14. Tavazoei, M. S., & Haeri, M. (2008). Limitations of frequency domain approximation for detecting chaos in fractional order systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 69(4), 1299-1320.

Anexo 1

Tabla II. Aproximaciones operador de orden fraccionario  $1/s^\alpha$  con  $\alpha \in [0.1, 0.9]$  y error máximo de 1dB.

$\alpha$	$N$	<b>Función de transferencia <math>G(s)</math></b>
0.1	5	$\frac{507.3712(s + 0.0408)(s + 0.5275)(s + 6.8129)(s + 87.9923)}{(s + 0.0316)(s + 0.4084)(s + 5.2750)(s + 68.1292)(s + 879.9225)}$
0.2	8	$\frac{141.0892(s + 0.0237)(s + 0.1)(s + 0.4217)(s + 1.7783)(s + 7.4989)(s + 31.6228)(s + 133.3521)}{(s + 0.0178)(s + 0.0750)(s + 0.3162)(s + 1.3335)(s + 5.6234)(s + 23.7137)(s + 100)(s + 421.6965)}$
0.3	10	$\frac{58.424(s + 0.0204)(s + 0.0611)(s + 0.1828)(s + 0.5471)(s + 1.6379)(s + 4.9032)(s + 14.6780)(s + 43.9397)(s + 131.5369)}{(s + 0.0147)(s + 0.0439)(s + 0.1315)(s + 0.3938)(s + 1.1788)(s + 3.5287)(s + 10.5635)(s + 31.6228)(s + 283.3877)}$
0.4	11	$\frac{26.6095(s + 0.0196)(s + 0.0511)(s + 0.1334)(s + 0.3481)(s + 0.9085)(s + 2.3714)(s + 6.1897)(s + 16.1560)(s + 42.1697)(s + 110.0694)}{(s + 0.0133)(s + 0.0348)(s + 0.0909)(s + 0.2371)(s + 0.6190)(s + 1.6156)(s + 4.2170)(s + 11.0069)(s + 28.7298)(s + 74.9894)(s + 195.7342)}$
0.5	11	$\frac{12.5897(s + 0.0200)(s + 0.0501)(s + 0.1259)(s + 0.3162)(s + 0.7943)(s + 1.9953)(s + 5.0119)(s + 12.5893)(s + 31.6228)(s + 79.4328)}{(s + 0.0126)(s + 0.0316)(s + 0.0794)(s + 0.1995)(s + 0.5012)(s + 1.2589)(s + 3.1623)(s + 7.9433)(s + 19.9526)(s + 50.1187)(s + 125.8925)}$
0.6	11	$\frac{8.9133(s + 0.0215)(s + 0.0562)(s + 0.1468)(s + 0.3831)(s + 1.0000)(s + 2.6102)(s + 6.8129)(s + 17.7828)(s + 46.4159)(s + 121.1528)}{(s + 0.0121)(s + 0.0316)(s + 0.0825)(s + 0.2154)(s + 0.5623)(s + 1.4678)(s + 3.8312)(s + 10.0000)(s + 26.1016)(s + 68.1292)(s + 177.8279)}$
0.7	10	$\frac{5.7158(s + 0.0254)(s + 0.0760)(s + 0.2276)(s + 0.6813)(s + 2.0395)(s + 6.1054)(s + 18.2770)(s + 54.7136)(s + 163.7894)}{(s + 0.0118)(s + 0.0353)(s + 0.1056)(s + 0.3162)(s + 0.9467)(s + 2.8339)(s + 8.4834)(s + 25.3958)(s + 76.0243)(s + 227.5846)}$
0.8	8	$\frac{3.4435(s + 0.0365)(s + 0.1540)(s + 0.6494)(s + 2.7384)(s + 11.5478)(s + 48.6968)(s + 205.3525)}{(s + 0.0115)(s + 0.0487)(s + 0.2054)(s + 0.8660)(s + 3.6517)(s + 15.3993)(s + 64.9382)(s + 273.8420)}$
0.9	5	$\frac{2.0206(s + 0.1136)(s + 1.4678)(s + 18.9574)(244.8437)}{(s + 0.0114)(s + 0.1468)(s + 1.8957)(s + 24.4844)(s + 316.2278)}$

# El eterno retorno del universo

José Rubén Morones Ibarra

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Nuevo León

jose.moronesib@uanl.edu.mx

## RESUMEN

*En este trabajo se presentan algunas ideas sobre el concepto del eterno retorno en el universo, acompañadas de argumentos científicos que sustentan esta idea. Aplicando los conceptos de la física estadística cuántica, se prueba que para un universo eterno en el tiempo y de volumen finito, aunque ilimitado, todos los estados físicos posibles se presentan de manera recurrente para tiempos suficientemente largos. Esto significa que todos los eventos que ocurren en el universo se repetirán indefinidamente. En un universo eterno todo lo que puede ocurrir, ocurrirá. En un universo eterno y finito en el espacio, todo lo que puede ocurrir ya ha ocurrido, se ha repetido y se seguirá repitiendo.*

## PALABRAS CLAVE

Eterno retorno, teorema de recurrencia de Poincaré, microestados de un sistema, física estadística.

## ABSTRACT

*In this work some ideas about the concept of eternal return in the universe are presented, supported by scientific arguments. Applying the concepts of quantum statistical physics, it is proven that for a universe eternal in time and finite volume but unlimited, all possible physical states occur recurrently for sufficiently long times. This means that all events that occur in the universe will repeat indefinitely. In an eternal universe everything that can happen, will occur. In an eternal and finite universe, everything that can happen has already happen and will occur again and again.*

## KEYWORDS

Eternal return, Poincaré's recurrence theorem, microstates of a system, statistical physics.

## INTRODUCCIÓN

El concepto de eterno retorno en el universo apareció como una idea filosófica que se originó en las culturas antiguas y se refiere al hecho de que todo lo que ha ocurrido en el universo volverá a ocurrir en una sucesión infinita de veces. Por supuesto que en sus orígenes esta idea era solamente producto del pensamiento filosófico o religioso y sin ninguna base material. En la actualidad el eterno retorno tiene una fundamentación científica apoyado en la física y desarrollado con base a ciertas hipótesis, las cuales, si son satisfechas, el fenómeno del eterno retorno del universo se presentará. Las limitaciones actuales sobre el conocimiento de algunas variables que determinan la evolución y destino del universo, como el concepto de energía oscura, impiden que podamos determinar con precisión el futuro del universo. Por esta razón se establece que las conclusiones de este artículo están sujetas a que sean satisfechas las hipótesis que se plantean.

La idea del eterno retorno se remonta a la época de los Babilonios quienes tenían la creencia de que el tiempo es cíclico, lo que implica que los sucesos del mundo se repiten periódicamente. Para desarrollar estas ideas se apoyaron en sus conocimientos astronómicos y de la observación de que los astros repetían ciclos. Estas ideas las extendieron a todos los fenómenos del mundo incluyendo la vida humana.

Posteriormente el concepto de eterna recurrencia lo establecieron en la Antigua Grecia los estoicos, quienes creían que el universo se destruye y renace periódicamente.<sup>1</sup>

### **Evolución histórica del concepto de eterno retorno**

Históricamente, varios filósofos han reflexionado sobre el tema del eterno retorno. Jorge Luis Borges en su libro “Historia de la eternidad”, menciona que Platón afirmaba que, si los periodos planetarios son cíclicos, también la historia universal lo será. El Año Platónico o Gran Año, es el período de tiempo necesario para que todos los astros realicen de manera simultánea un ciclo completo. Borges escribió: “Al cabo de cada año Platónico renacerán los mismos individuos y cumplirán el mismo destino. La historia humana se repite: nada hay ahora que no fue y lo que ha sido será”.<sup>2</sup>

David Hume en sus Diálogos sobre religión natural, establece que un número finito de partículas no es posible que genere un número infinito de transposiciones. Un número finito de partículas sólo es susceptible de transposiciones finitas, y necesariamente debe ocurrir, en una duración eterna, que todo orden o posición posible será ensayado un infinito número de veces. Este mundo, por lo tanto, con todos sus acontecimientos, aun los más nimios, ha sido producido y destruido antes, y será de nuevo producido y destruido, sin fin ni limitación. Nadie que tenga idea del poder de lo infinito, en comparación con lo finito, puede tener objeciones a esta afirmación.<sup>3</sup>

Más recientemente Friedrich Nietzsche retomó la idea del eterno retorno como una concepción filosófica mencionándola en su libro Así Habló Zaratustra.<sup>4</sup> Considerando que el universo consiste de una cantidad finita de materia, Nietzsche razonaba de la siguiente manera: un número finito de átomos es imposible que produzca un número infinito de variaciones.

A principios del siglo XX, el matemático y físico teórico francés Henri Poincaré, trata el asunto del eterno retorno de manera más formal y científica. Basado en la Mecánica Clásica propone y demuestra el Teorema de Recurrencia que lleva su nombre, en el cual se establece que en un sistema cerrado de partículas con energía y volumen finito, gobernado por las leyes de la física clásica, todos los estados del sistema se repetirán si se consideran tiempos muy grandes.<sup>5,6</sup>

De acuerdo con Poincaré, el tiempo de recurrencia de un sistema físico es el intervalo de tiempo necesario para que el sistema regrese a su estado original. Esto significa que cualquier configuración inicial del conjunto de partículas que conforman al sistema, volverá a presentarse en algún tiempo futuro. Los argumentos en los que se apoya el teorema de recurrencia de Poincaré parten de la física estadísticas evaluando la probabilidad de que se presente cada una de las configuraciones de un sistema de partículas, además de la suposición de que el sistema es acotado y de duración infinita. En nuestra experiencia diaria sobre el comportamiento de un sistema de partículas esto parece imposible, pero cuando extendemos las ideas a tiempos muy grandes esto debe ser posible, y, de hecho, ocurre inevitablemente. Más adelante en este artículo, se realiza un cálculo para estimar el tiempo de recurrencia de Poincaré para el universo.

## **CONCEPCIONES MODERNAS SOBRE LA EVOLUCIÓN DEL UNIVERSO**

### **La teoría de la Relatividad**

La teoría general de la relatividad de Einstein sentó las bases para estudiar el universo como un sistema físico, es decir, el universo como un todo. La gran diferencia entre el modelo del universo que surge de la relatividad general y el de los modelos anteriores es que el modelo del universo de Einstein es finito. El universo de Einstein tiene un volumen finito, pero es ilimitado. No existen límites ni fronteras en este universo, ya que este se cierra sobre sí mismo de la misma manera en que lo hace una esfera. Podemos ejemplificar el concepto de universo finito pero ilimitado considerando el caso de la Tierra, la cual tiene un volumen finito, pero podemos viajar por su superficie sin que encontremos un borde que nos indique que más allá de ese borde no se puede seguir.

Podríamos imaginar este universo ilimitado si nos vemos viajando sobre un rayo de luz. De acuerdo con la teoría de la relatividad, esta luz seguirá la curvatura del espacio y regresará al mismo punto después de “darle la vuelta” al universo. Esta es una de las características del universo de la teoría de la relatividad: el universo es finito pero ilimitado y tiene una curvatura que obliga a la luz y a la materia a seguir trayectorias definidas dependiendo de la materia presente.

No pensemos en que el espacio que ocupa el universo es algo que está metido en un espacio más grande. Esta idea es incorrecta desde el punto de vista de la relatividad de Einstein. El universo es el

todo y no podemos salir de este espacio. Cualquier cosa que se mueva, como un rayo de luz que se dirija en cualquier dirección y que no encuentre obstáculo, regresará al mismo punto después de algún tiempo. En este caso, el intervalo de tiempo será muy grande, pero finito.

Para entender al universo como un todo, es fundamental conocer el comportamiento de sus componentes más pequeñas, las partículas elementales. Así mismo, para comprender lo que ocurrió en los primeros instantes del universo y la manera como este evolucionó, es necesario entender lo que sucede con las interacciones entre las partículas subatómicas.

Por otra parte, la pregunta sobre el destino del universo tiene también en la actualidad respuestas apoyadas en el conocimiento científico. Para comprender mejor estas respuestas hagamos una analogía con lo que ocurre a una bala lanzada por un hipotético cañón muy poderoso. Si la bala se dispara verticalmente hacia arriba con una velocidad menor a una cierta velocidad conocida como velocidad crítica o velocidad de escape, la bala se detendrá en algún punto y regresará a la Tierra. Esto corresponde al caso familiar en el que lanzamos una piedra hacia arriba y la vemos caer.

En el caso en el que la bala lanzada por el cañón exceda la velocidad de escape, entonces la bala no regresará a la tierra y continuará moviéndose por el espacio, en principio, indefinidamente. En general, el valor numérico de la velocidad de escape para un cuerpo astronómico cualquiera, depende de la masa y del tamaño del astro.

De manera similar, en el caso del universo, si la velocidad inicial de la Gran Explosión, excedió cierto valor crítico, entonces el universo seguirá expandiéndose por siempre. Contrariamente, si la velocidad inicial que adquirieron las partículas en el Big Bang, es menor que el valor crítico ya mencionado, entonces la expansión se detendrá en algún momento en el futuro y empezará su contracción, terminando en un Gran Colapso. Esta forma de evolución del universo, si suponemos que es eterno, será cíclica produciéndose una sucesión infinita de expansiones y contracciones.

Existe una cantidad importante para decidir cuál de las dos posibilidades anteriores será el destino del universo. Esta cantidad se conoce como la densidad de masa crítica del universo. Si la densidad de masa del universo es menor que la densidad crítica, el escenario para su evolución será el de la expansión eterna. A este universo se la conoce como universo abierto. Por otra parte, si la densidad de masa es mayor que la densidad crítica, el universo detendrá su expansión, contrayéndose posteriormente, colapsándose e iniciando una nueva explosión. Este modelo del universo es un modelo cerrado y por razones obvias se conoce como universo cíclico u oscilante.

## EL ETERNO RETORNO

La fundamentación física para establecer la teoría del eterno retorno del universo se basa en las siguientes hipótesis:

1. El universo consiste en radiación, materia bariónica, materia oscura y energía oscura. Esta última se introduce a través de una cantidad física llamada constante cosmológica  $\Lambda$ .
2. Todas estas cantidades físicas son finitas.
3. El universo es finito pero ilimitado.
4. Las leyes de la física gobiernan todos los procesos del universo.
5. El universo es eterno en el tiempo, no tuvo un principio ni tendrá final. El universo no se generó de nada, siempre ha existido y es indestructible.

La materia bariónica es la materia ordinaria, formada por átomos y estos por electrones y en el núcleo protones y neutrones.

Actualmente no se tiene un conocimiento completo sobre el destino del universo. No se sabe si el universo es acotado o abierto. Para el caso en el que el universo continúe su expansión indefinidamente, lo cual conduce a un universo abierto, los resultados obtenidos en este artículo no son aplicables. En el caso opuesto, el de un universo que detendrá su expansión e iniciará un período de contracción, tendremos un universo acotado y son aplicables las ideas y los resultados obtenidos en este artículo.

Supondremos que el destino del universo es el Gran Colapso (Big Crunch) con lo cual estamos estableciendo que la materia domina la evolución del universo o que la constante cosmológica  $\Lambda$  tiene

un valor muy pequeño o negativo. Esta hipótesis implica que la evolución del universo se realiza en una secuencia eterna de expansiones y contracciones.

Aceptando estas hipótesis, quien comprenda los conceptos de infinito y eternidad no tendrá dificultad para entender ni argumentos para rechazar la idea del eterno retorno.<sup>7</sup>

Dadas estas condiciones, todos los sucesos que ocurran en el universo ya sucedieron en el pasado y en el futuro se volverán a presentar.

## UNIVERSO CUÁNTICO RELATIVISTA

Al considerar una visión cosmológica cuántico- relativista la idea del eterno retorno en el universo resulta ser un concepto central y no una idea periférica en la cosmología. Por otra parte, en la concepción puramente relativista del universo los modelos cíclicos surgen regularmente. Sin embargo, en la corriente principal de la cosmología moderna los argumentos que soportan la idea de un universo que se repite a sí mismo un infinito número de veces parecen no tener mucha relevancia o interés. La explicación para este hecho se dará en la sección donde se calcula el tiempo de recurrencia.

Quien primero obtuvo un resultado matemático formal para apoyar el concepto de universo cíclico fue el matemático y lógico austriaco Kurt Goedel. Goedel vivió entre 1906 Y 1978 y es considerado como uno de los más grandes lógicos de la historia. Tuvo ideas muy audaces y provocó grandes disrupciones en la ciencia.

En el año de 1949 Kurt Goedel aplicó las ecuaciones de campo gravitacional de Einstein al universo como un todo y obtuvo unas soluciones que consisten en curvas cerradas en el tiempo. Estas soluciones a las que denominó Closed Time Curves (CTC), las presentó en una conferencia en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, donde estaba presente Einstein. La interpretación física de estas soluciones es que los estados por los que ha pasado el universo se repiten periódicamente.

La interpretación física de las soluciones CTC de Goedel, es que una partícula o un sistema de partículas sigue una trayectoria cerrada en el espacio-tiempo de Einstein. Esto equivale a decir que el sistema vuelve a un estado que ya ocurrió en el pasado. Si pensamos en un sistema cerrado que no se destruya, la solución CTC representa la evolución espacio-temporal del sistema viajando hacia el pasado, reproduciendo sus estados físicos. Esto puede aplicarse al universo como un todo, teniendo como consecuencia que todos los estados del universo son recurrentes.

Los resultados de CTC que presentó Goedel en su conferencia escandalizaron a todos los asistentes y posteriormente a la comunidad científica general. Einstein queriendo invalidar estas soluciones recurrió al sentido común y a la intuición. Sin embargo, ni el sentido común ni la intuición son aplicables a las teorías cuánticas. En seguida, para evitar el escándalo, Goedel aclaró que estas soluciones se obtenían suponiendo ciertas condiciones sobre el universo. Una de las condiciones es que el universo estuviera en rotación y de acuerdo con las observaciones presentes, no lo está. La otra condición es que el universo no esté en expansión y sí lo está. Con estos argumentos físicos se descarta la validez de las soluciones CTC, quedando estas solo como una curiosidad matemática.<sup>8</sup>

## FORMULACIÓN HAMILTONIANA DE LA MECÁNICA CLÁSICA

En la formulación Hamiltoniana de la mecánica clásica, cualquier cantidad física medible se puede determinar expresándola como una función de la posición y el momento lineal. Para el caso de una partícula, se requieren tres coordenadas de posición  $x, y, z$  y tres coordenadas del momento  $p_x, p_y, p_z$ , para determinar su estado físico. Al espacio de 6 dimensiones que consiste de posiciones y momentos de una partícula, donde cada punto se representa como  $(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$  se le conoce como espacio fase de la partícula. En una teoría no-cuántica el estado del sistema se describe por un punto, expresado como  $(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$  en este espacio fase.

En una teoría cuántica, el Principio de Incertidumbre de Heisenberg para una dimensión espacial se expresa como  $\Delta x \Delta p_x > h$ . Debido a este Principio el estado de la partícula se representa no como un punto en el espacio fase sino como un pequeño volumen de tamaño  $\Delta x \Delta p_x \Delta y \Delta p_y \Delta z \Delta p_z = h^3$ ,

donde  $h$  es la constante de Planck. Para un sistema de  $N$  partículas, el espacio fase correspondiente tendrá  $6N$  dimensiones,  $3N$  coordenadas espaciales y  $3N$  coordenadas de momento. El estado de un sistema de  $N$  partículas se representa como un hiper-volumen dado por  $\tau = h^{3N}$  en este espacio fase de  $6N$  dimensiones.<sup>9</sup>

## FÍSICA ESTADÍSTICA

El estudio de los sistemas termodinámicos a nivel microscópico se realiza mediante la física estadística. Los métodos usados en la física estadística involucran algunos conceptos fundamentales necesarios para realizar el análisis estadístico de las propiedades físicas de los sistemas de muchas partículas. Además del espacio fase para un sistema de  $N$  partículas ya mencionado, nos interesa introducir los conceptos de microestado y macro estado de un sistema.

Un microestado específico de un sistema de  $N$  partículas está determinado por un punto dentro del pequeño hiper-volumen  $\tau = h^{3N}$  en el espacio fase de  $6N$  dimensiones. A este hiper-volumen  $\tau = h^{3N}$  le corresponde un solo microestado. Cualquier punto dentro de este hiper-volumen representa un estado físicamente indistinguible de cualquier otro punto dentro del mismo hiper-volumen. Desde el punto de vista de la física no tiene sentido establecer diferencias físicas en estados que se encuentran representados dentro de esta región del espacio fase. Esta es un requisito que impone la teoría cuántica. El resultado de cuantizar el espacio fase es que este queda como una especie de retícula con celdas de dimensión finita cada una de  $6N$  dimensiones, y volumen  $\tau = h^{3N}$  quedando cada una asociada a un estado del sistema o representando un estado particular de todo del sistema.

En un microestado, determinado por el momento y la posición de cada una de las partículas podemos intercambiar, por ejemplo, el momento y la posición de dos partículas idénticas. Con esta transformación obtenemos un microestado diferente pero el sistema físico de ambos microestados se comportará físicamente de la misma manera debido a la identidad de las partículas intercambiadas. Los dos estados obtenidos por el intercambio de partículas se dice que son dos microestados correspondientes al mismo macroestado. En general, a un macroestado, le corresponden muchos microestados. Las propiedades físicas del sistema quedan determinadas por el macroestado en el que se encuentre el sistema.<sup>10</sup>

Simbólicamente escribimos el microestado de un sistema de  $N$  partículas como  $(\vec{r}_i, \vec{p}_i)$  con  $i = 1, 2, 3, \dots, N$  donde  $\vec{r}_i$  y  $\vec{p}_i$  indican la posición y el momento de la partícula  $i$ . Intercambiar dos partículas idénticas, la  $i$  y la  $k$ , por ejemplo, conduce a otro microestado, pero el macroestado correspondiente es el mismo ya que las propiedades físicas del sistema no cambian ante este intercambio.<sup>11</sup>

La cuantización del espacio fase nos permite contar el número de microestados de un sistema que consiste de un número finito de partículas encerrado en un volumen finito. En este caso, si el número de partículas es  $N$ , y el volumen es  $V$  el número total de microestados en un volumen espacial  $V$  estará dado por  $^{12} \frac{V \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z}{h^3}$

$$\frac{V \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z}{h^3} = \text{número total de microestados}$$

por lo tanto, si suponemos que el universo tiene un volumen finito, y un número de partículas también finito entonces el número total de microestados posibles es finito. Este es el resultado más importante de este artículo.

## Teorema de recurrencia de Poincaré

El teorema de recurrencia de Poincaré (TRP) establece que para tiempos suficientemente largos todos los sistemas dinámicos cerrados repetirán sus estados indefinidamente si el tiempo no está acotado. Aun cuando el volumen no se mantenga constante, si este es finito, el teorema de Poincaré es aplicable. El TRP es fundamental en la teoría de los sistemas dinámicos y puede establecerse en los siguientes términos: Si un sistema dinámico finito se encuentra determinado inicialmente por un

punto  $(q, p)$  en el espacio fase de  $6N$  dimensiones, tendremos que, debido a que el número de trayectorias que puede seguir el sistema es finito, existe una probabilidad diferente de cero de que siga una trayectoria idéntica a una ya recorrida en el pasado y que termine en el punto inicial del espacio fase. En este caso, decimos que el sistema es recurrente. Aplicado este concepto al universo el fenómeno se conoce como el eterno retorno del universo. Al tiempo de recurrencia  $t_{\text{Poincaré}}$  se le conoce como tiempo de Poincaré para el sistema.

El resultado presentado por el TRP muestra un fuerte conflicto entre reversibilidad e irreversibilidad del tiempo, dos conceptos que se presentan en la mecánica clásica y en la física estadística, respectivamente. Por una parte, en una teoría clásica tenemos que las leyes de la física son invariantes ante inversiones en el tiempo; esto se conoce como reversibilidad, lo cual indica que si invertimos el tiempo un sistema mecánico regresa a su estado inicial. Sin embargo, encontramos en la práctica que un sistema termodinámico que evoluciona de un estado de no-equilibrio a un estado de equilibrio es irreversible, esto significa que al invertir el tiempo no se regresa al estado original.

La irreversibilidad del tiempo resulta de la interpretación estadística de la flecha del tiempo donde la entropía nunca disminuye. Si en vez de referirnos al tiempo como la cantidad que es irreversible en la termodinámica o lo que es reversible en el teorema de Poincaré, consideramos a la entropía como la cantidad que retoma su valor para tiempos suficientemente grandes, el conflicto desaparece. No tomar el tiempo como el concepto fundamental sino la entropía resuelve el conflicto entre reversibilidad establecido en el teorema de Poincaré e irreversibilidad descrito en la segunda ley de la termodinámica. En este caso se afirma que el valor de la entropía siempre regresa a sus valores anteriores para tiempos muy grandes.

En realidad, los resultados de la física estadística establecen no la irreversibilidad de los procesos, sino que los sistemas pasan más tiempo en estados cercanos al estado de equilibrio que en los estados lejos del equilibrio.

En el artículo de Jos Uffink, se prueba que el comportamiento irreversible de los sistemas de muchas partículas, puede ser reconciliado con el de invariancia de la inversión temporal bajo ciertas circunstancias. Prueba además que la ecuación de Boltzmann puede ser obtenida de las ecuaciones de Hamilton, las cuales satisfacen reversibilidad temporal probando además que no hay asimetría temporal.<sup>13</sup>

En síntesis, para eliminar la contradicción, entre reversibilidad temporal y la segunda ley de la termodinámica, se puede sustituir el concepto de inversión temporal por la idea de disminución en la entropía en un sistema termodinámico. El concepto de invertir la flecha del tiempo invirtiendo los momentos de todas y cada una de las partículas no es práctico para un universo como en el que vivimos, de una edad tan pequeña como la estimada de  $1.3 \times 10^{10}$  años, pero ello no invalida la reversibilidad para tiempos infinitos en la teoría.

Puesto que el tiempo de recurrencia de Poincaré es enorme, mucho mayor que la edad actual del universo, los físicos no se ocupan de este problema para considerarlo en sus trabajos de investigación científica ya que está fuera de la confirmación experimental. Sin embargo, dentro de las concepciones filosóficas de la física el tema sí es objeto de estudio, ya que se supone que todos los resultados obtenidos de las teorías físicas, que son matemáticamente consistentes, deben ser consideradas realidades físicas.

Aun cuando los físicos afirman que todo lo que no esté prohibido por las leyes de la física ocurrirá, los físicos ponen un límite a esta concepción declarando que aquello que no se puede comprobar experimentalmente no es física. Por este motivo, la aplicación en la física del Teorema de Recurrencia de Poincaré no es un asunto de gran interés para los físicos. Un ejemplo de este problema aparece al considerar en la termodinámica de gases un sistema de un número de partículas del orden del número de Avogadro encerrado en un recipiente. Al analizar el proceso en el que todas las partículas ocupen la mitad del volumen dejando la otra mitad vacía encontramos que, aun cuando matemáticamente el fenómeno ocurrirá en algún momento, la confirmación experimental nunca se realizará debido a que el tiempo para que esto ocurra es mayor que la edad del universo. Sin embargo, se establece que, para

un sistema cerrado, con un número finito de partículas, los estados macroscópicos del sistema se repetirán en algún momento, para tiempos muy grandes, en el caso de un sistema que no se destruye.

## SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA CON CAMPOS GRAVITACIONALES

Otra limitación de la segunda ley de la termodinámica aplicada a un sistema como el universo es que no tenemos una teoría completa que garantice su validez en presencia de campos gravitacionales. Más aún, la presencia de agujeros negros complica totalmente el estudio termodinámico de sistemas donde está presente la gravedad.<sup>5</sup>

La presencia de la gravedad modifica de manera importante el comportamiento de los sistemas termodinámicos y la segunda ley de la termodinámica no sabemos aún como manejarla.

## TIEMPO DE RECURRENCIA DE POINCARÉ PARA EL UNIVERSO

Para el sistema del universo, el tiempo de recurrencia de Poincaré se estima en  $10^{10^{10^{2.08}}}$  años. Un tiempo incomprensiblemente grande.

Este número se puede estimar para el universo como un todo suponiendo un número de partículas finito  $N$  y un volumen finito  $V$ .<sup>14</sup>

El cálculo lo realizaremos estimando el radio, volumen, número de partículas y el número total de microestados del universo visible. El tiempo de recurrencia se calcula estableciendo una proporcionalidad Partiremos de la hipótesis de que el tiempo de recurrencia de Poincaré  $T_{Poincaré}$  es proporcional a la exponencial del número de microestados del sistema  $T_{Poincaré} \sim \exp(N_{microestados})$ , lo cual puede escribirse como

$$T_{Poincaré} \sim N_{macroestados} \sim e^{N_{microestados}} \quad (1)$$

por otra parte, la definición estadística de la entropía  $S$  de un sistema está dada por la fórmula de Boltzmann

$$S = K \ln W \quad (2)$$

donde  $W$  es el número de microestados del sistema. Usando unidades naturales donde la constante de Boltzmann  $K = 1$ , podemos escribir la relación 2 como

$$W \sim e^S \quad (3)$$

Por lo tanto,

$$T_{Poincaré} \sim e^{e^S} \quad (4)$$

Para calcular la entropía del universo, consideramos un universo esférico de radio  $r$  dado por:  
radio del universo =

$$r = 10^{26} \text{ m} \quad (5)$$

Los cosmólogos han determinado la entropía  $S$  del universo, la cual, para un universo con  $N$  partículas y radio  $r$  está dada por<sup>15</sup>

$$S \sim \exp\left(\frac{r^2}{L_p^2}\right) \quad (6)$$

$$\text{Donde } L_p = 10^{-34} \text{ m} \quad (7)$$

se conoce como constante de longitud de Planck.

Sustituyendo (5) y (7) en (6)

$$S \sim e^{10^{120}}$$

que se aproxima al valor

$$S \sim 10^{10^{2.08}} \quad (8)$$

sustituyendo (8) en (4), obtenemos

$$T_{Poincaré} \sim e^{e^{10^{10^{2.08}}}}$$

En una simplificación donde aproximamos  $e \sim 10$  lo cual no modifica sustancialmente el resultado, obtenemos<sup>14</sup>

$$T_{\text{Poincaré}} \sim 10^{10^{10^{10^{2.08}}}} \text{ años.} \quad (9)$$

Un número incomprensiblemente grande pero finito. Este es el número más grande que se ha determinado en base a cantidades físicas. Se ha estimado un número  $N$  de partículas en el universo de  $N = 10^{80}$ .<sup>16</sup>

Para poner en un contexto más entendible los resultados obtenidos en la ecuación (9) es conveniente poner algunos ejemplos de grandes números.

Empecemos con el radio del universo que es de  $r = 10^{29}$  milímetros. Este número, escrito en notación desarrollada se escribe con un uno seguido de 29 ceros. Si lo escribimos sobre una línea recta, la cual dividimos en 30 casillas de un milímetro cada una donde colocamos un dígito en cada casilla, el número  $10^{29}$  escrito en forma desarrollada tendrá una longitud de 30 milímetros.

Consideremos ahora el número

$$10^{10^{29}} \quad (10)$$

Este número escrito en forma desarrollada sobre una línea recta, la cual dividimos como en el caso anterior en casillas de un milímetro, requerirá para escribirse una línea de una longitud igual al radio del universo. Además, si hacemos los cálculos, para escribirlo se requiere un tiempo que excede la edad del universo. Es decir, imposible de escribirlo. Aun así, el resultado obtenido en (9), es increíblemente mayor que el obtenido en (10).

Si pensamos ahora en el tiempo de recurrencia de Poincaré dado por la ecuación (9) concluimos que este número queda fuera de la comprensión humana. Este número es el valor más grande obtenido en un cálculo de física. Aun cuando desde el punto de vista de la física teórica es realizable, en la experiencia nadie observará este intervalo de tiempo.

El tiempo de recurrencia de Poincaré es tan grande que incluir las unidades (segundos o años) es completamente irrelevante. Aun cuando los matemáticos siempre pueden obtener números más y más grandes, el tiempo de recurrencia de Poincaré ha sido el número más grande calculado asociado con un proceso o suceso físico. En otros términos, más técnicos, el TRP no es una observable física, es decir, algo que se pueda comprobar.

## COMENTARIOS FINALES

Primeramente, se debe establecer que en un universo en expansión eterna los resultados obtenidos en este artículo no son aplicables. Esto se debe a que en un universo en expansión el número de microestados está aumentando continuamente debido a que un aumento en el volumen del universo genera nuevas formas de distribución de las partículas. Por otra parte, en un universo finito, aun cuando la expansión del universo genera nuevas configuraciones, estas siempre serán finitas en un universo acotado.

Los resultados expuestos aquí sobre la recurrencia del universo son matemática y físicamente correctos para un universo finito, que detiene su expansión e inicia un proceso de contracción. Debido a que la segunda ley de la termodinámica, que establece que todos los procesos espontáneos tienden a aumentar la entropía, está sustentada en cálculos probabilísticos, al considerar tiempos no acotados, se admite la violación de esta ley para tiempos muy grandes.

Por otra parte, ya se mencionó que la presencia de campos gravitacionales modifica la segunda ley de la termodinámica. Sin embargo, todavía no se establece una expresión clara para la entropía de un sistema termodinámico en presencia de campos gravitacionales. Por esta razón, el conflicto entre la segunda ley de la termodinámica y los procesos reversibles queda en duda.

La segunda ley de la termodinámica está basada en conceptos estadísticos, esto significa que no hay razón alguna para pensar que para tiempos extremadamente grandes ocurran procesos donde la

entropía disminuye. Son poco probables, pero pueden ocurrir. Cuando se tiene una probabilidad diferente de cero de ocurrencia de un fenómeno, este se presentará en algún momento para tiempos infinitos. Debido a que cualquier sistema termodinámico está sujeto a fluctuaciones, las cuales llevan al sistema lejos de su estado de equilibrio, tendremos que para tiempos muy grandes estas fluctuaciones ocurrían dando lugar a procesos donde la entropía disminuye.<sup>17</sup>

El valor del tiempo de recurrencia de Poincaré para el universo es un número tan increíblemente grande, que carece completamente de un valor práctico. Experimentalmente sale de las posibilidades de medirlo. Podemos calcularlo como lo hicimos aquí, pero queda fuera del campo experimental.

En un universo eterno, el fenómeno del eterno retorno se dará bajo las circunstancias mencionadas aquí pero no habrá quien lo pruebe. De hecho, de acuerdo con este concepto, ya estuvimos aquí en el pasado, pero no tenemos memoria de ello debido a que la memoria se construye mediante un ordenamiento o almacenamiento de la información en estructuras cerebrales mediante conexiones sinápticas entre las neuronas. Con la muerte del individuo estas desaparecen y en el proceso de recurrencia se reconstruyen, pero no están conectadas o relacionadas con las anteriores. Los seres humanos no tendrán memoria ni recuerdos porque estos se construirán en cada nuevo ciclo.

## REFERENCIAS

1. Hahm, D. E., *The Origins of Stoic Cosmology*, Ohio State University Press, (1977).
2. Borges, Jorge Luis, *El fin de la eternidad*, Libros Tauro (1953).
3. Hume, David, *Diálogos sobre religión natural*, Parte VIII P. 142, colección de textos clásicos de filosofía, El Colegio de México, (1942).
4. Nietzsche, Friedrich, *Así habló Zaratustra*, Grupo editorial Tomo, 3a edición, julio (2006).
5. R Dong, D Stojkovic, *Phys. Rev. D*94, 104058, Gravity can significantly modify classical and quantum Poincaré recurrence theorems (2016).
6. Schulman, L. S. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.18.2379>.
7. Dyson, L., Kleban, M. and Susskind, L., Disturbing Implications of a Cosmological Constant, DOI: 10.1088/1126-6708/2002/10/011, *JHEP* 10 (2002) 011 (2002).
8. Gödel, Kurt, "An Example of a New Type of Cosmological Solution of Einstein's Field Equations of Gravitation". *Rev. Mod. Phys.* 21 (3): 447–450. Bibcode:1949RvMP...21..447G. doi:10.1103/RevModPhys.21.447, (1949).
9. Huang, Kerson, *Introduction to Statistical Physics*, second edition, CRC Press, (2009).
10. Kestin, Joseph and Dorfman, J. R. *A course in statistical thermodynamics*, Academic Press, (1971).
11. Greiner, Walter, Neise, Ludwig and Stocker, Horst, *Thermodynamics and statistical Mechanics*, Springer, (2000).
12. Das, A. and Ferbel, T. *Introduction to Nuclear and Particle Physics*, World Scientific, (2006).
13. Uffink, Jos and Valente, Giovanni, Lanford's Theorem and the Emergence of Irreversibility, *Found Phys* (2015) 45:404–438 DOI 10.1007/s10701-015-9871-z.
14. Don N, Information loss in black holes and/or conscious beings? \* Don N. Page, <https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-th/9411193>.
15. Linde, Andrei, *Particle Physics and inflationary cosmology*, (2005). <https://arxiv.org/pdf/hep-th/0503203>.
16. Vopson M. "Estimation of the information contained in the visible matter of the universe". *AIP Advances* 11, 105317 (2021) <https://doi.org/10.1063/5.0064475>.
17. Gujrati, P. D., Poincaré Recurrence, Zermelo's Second Law Paradox, and Probabilistic Origin in Statistical Mechanics arXiv:0803.0983.

# Modelado del proceso de fusión selectiva por láser en aleaciones de aluminio

**Daniel García, Luis A. Reyes, Roberto Cabriales, Octavio García**

Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,  
Centro de Investigación e Innovación en Ingeniería Aeronáutica, Apodaca, N.L., México.  
correo electrónico autor de correspondencia: luis.reyessr@uanl.edu.mx

## **RESUMEN**

*La industria aeronáutica ha evolucionado en respuesta a la creciente demanda de diseños y materiales avanzados, buscando aeronaves más ligeras, rápidas, resistentes y con mayor autonomía. La técnica de fusión selectiva por láser (SLM, por sus siglas en inglés Selective Laser Melting) es una tecnología de manufactura aditiva que utiliza un láser de alta densidad de potencia para fundir polvos metálicos en capas delgadas sobre una plataforma de construcción. La estabilidad de la alberca de fusión es fundamental para definir la microestructura, las propiedades mecánicas y la resistencia a la corrosión de las piezas fabricadas mediante SLM. En esta investigación, se generó una evaluación experimental y numérica de la manufactura aditiva del AlSi10Mg mediante la técnica de fusión selectiva por láser. Se observó un buen acercamiento de los modelos numéricos con respecto los resultados experimentales. Las simulaciones de microestructura proporcionaron información detallada sobre el tamaño y la orientación de los granos, factores que afectan directamente las propiedades finales del material. La distribución de tamaños de grano posee una relación directa con las condiciones de fabricación y su desempeño mecánico. El presente estudio explora la fabricación y modelado de aleaciones ligeras a través de técnicas innovadoras de impresión aditiva.*

## **PALABRAS CLAVE**

AlSi10Mg, manufactura aditiva, microestructura.

## **ABSTRACT**

*The aerospace industry has evolved in response to the growing demand for advanced designs and materials, seeking lighter, faster, stronger and more autonomous aircraft. Selective Laser Melting (SLM) is an additive manufacturing technology that uses a high-power density laser to melt metal powders in thin layers on a build platform. The stability of the melting pool is critical in defining the microstructure, mechanical properties and corrosion resistance of parts fabricated using SLM. In this research, an experimental and numerical evaluation of the additive manufacturing of AlSi10Mg by selective laser melting technique was generated. A good approach of numerical models with respect to the experimental results was observed. The microstructure simulations provided detailed information on grain size and orientation, factors that directly affect the final material properties. The grain size distribution has a direct relationship with the manufacturing conditions and its mechanical performance. The present study explores the fabrication and modeling of light alloys through innovative additive printing techniques.*

## **KEYWORDS**

AlSi10Mg, additive manufacturing, microstructure.

## **INTRODUCCIÓN**

La industria aeronáutica ha evolucionado en respuesta a la creciente demanda de materiales de alto desempeño, buscando aeronaves más ligeras, rápidas, resistentes y con mayor autonomía. Esta evolución ha implicado el desarrollo de nuevos materiales, así como métodos de manufactura novedosos. La manufactura aditiva es un proceso que permite la construcción de

objetos mediante la adición de material capa por capa. Esta tecnología se ha incorporado a diversas industrias recontentamente, posibilitado la creación de piezas complejas para una amplia gama de aplicaciones.<sup>1</sup> Una de las principales ventajas de la manufactura aditiva radica en su capacidad de adaptación geométrica y la posibilidad de incluir distintos materiales.

La técnica de fusión selectiva por láser (SLM) es una tecnología de manufactura aditiva que utiliza un láser de alta potencia para fundir polvos metálicos en capas delgadas sobre una plataforma de construcción.<sup>2</sup> La sección transversal de la pieza 3D se forma al fundir selectivamente y solidificar los polvos metálicos en cada capa. El proceso SLM generalmente utiliza polvos con tamaños de partícula que van de 20  $\mu\text{m}$  a 50  $\mu\text{m}$  y espesores de capa de 20  $\mu\text{m}$  a 100  $\mu\text{m}$ .

Durante la manufactura aditiva de componentes metálicos, la estabilidad de la alberca de fusión es fundamental para definir la microestructura, las propiedades mecánicas y la resistencia a la corrosión de las piezas fabricadas. La alberca de fusión corresponde a la región de metal sobrecalentado y fundido que se forma cerca de la interfaz entre el láser y el material base, ver figura 1.

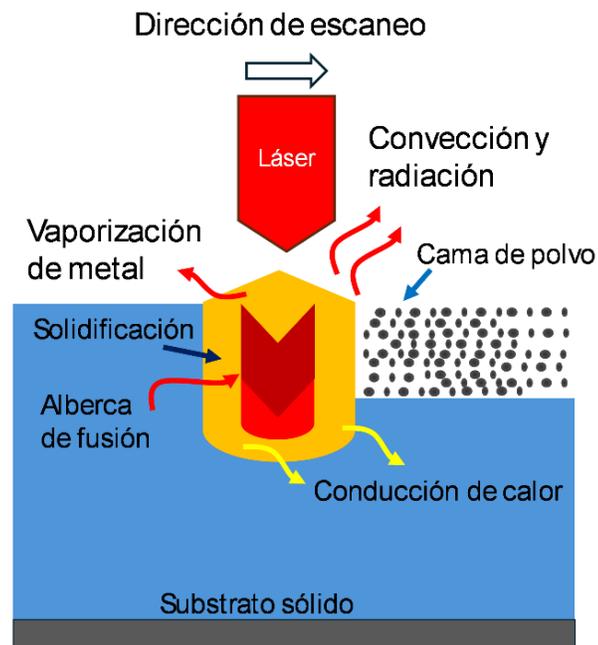


Fig. 1. Esquema de alberca de fusión durante el proceso SLM.

La alberca de fusión es termodinámicamente inestable, ya que su forma y energía interna cambian continuamente debido a la transferencia de calor y a la interacción líquido-sólido entre las paredes y el aporte del polvo metálico. Este polvo es suministrado en la alberca, mientras el láser proporciona la energía necesaria para mantenerla activa. La alberca de fusión constituye el punto inicial de formación de la parte sólida, su morfología, temperatura y comportamiento son esenciales para lograr un control de calidad eficiente.<sup>3</sup>

La implementación de modelos numéricos en SLM ha facilitado la predicción del procesamiento de materiales, reduciendo los tiempos de experimentación. ANSYS Additive es una plataforma de simulación diseñada específicamente para el campo de la manufactura aditiva de metales. Esta herramienta ofrece un entorno de exploración enfocado en identificar los parámetros de proceso óptimos para equipos y materiales. Se incluye la generación de estructuras de soporte optimizadas basadas en estados de esfuerzos, definiendo criterios como la ubicación y el grosor de los soportes.

La aleación AlSi10Mg es una aleación de aluminio utilizada principalmente en la industria automotriz y aeroespacial, se utiliza principalmente en sistemas de engranajes, carcasas y soportes sometidos a cargas elevadas. Recientemente, se han desarrollado investigaciones para evaluar su comportamiento térmico y mecánico durante el proceso SLM, por ejemplo,<sup>4</sup> realizaron pruebas del material AlSi10Mg fabricando muestras mediante fusión selectiva por láser en un equipo SLM 280 2.0, la manufactura capa por capa se realizó con una separación de láser de 150  $\mu\text{m}$ , un espesor de capa de 20  $\mu\text{m}$  y 30  $\mu\text{m}$ , considerando un diámetro del punto de láser de 100  $\mu\text{m}$ . La respuesta mecánica obtenida en las pruebas se comparó con pruebas de piezas obtenidas mediante métodos tradicionales.<sup>5</sup> realizaron un análisis de control de muestras con el objetivo de eliminar valores atípicos (observaciones inusuales) que pudieran influir de manera desproporcionada en los resultados de impresión, se presentan los valores de la densidad relativa obtenidos y los parámetros utilizados en cada experimento.

Manufacturó mediante SLM un compuesto de SiC/AlSi10Mg, se evaluaron diferentes parámetros de fabricación, así como la densidad de energía del láser.<sup>6</sup> Bajo estas condiciones el compuesto de AlSi10Mg/SiC obtuvo un incremento de resistencia entre 50% - 65% comparado con el material base. Las pruebas con mayor densidad de energía láser tuvieron un incremento del 28% comparado con las pruebas con baja densidad de energía láser.<sup>7</sup> realizó un modelo numérico para obtener los tamaños de las albercas de fusión, evaluando diferentes valores de impresión como la velocidad y potencia. En la presente investigación, se generó una evaluación experimental y numérica de la manufactura aditiva del AlSi10Mg mediante la técnica de fusión selectiva por láser. Se observó un buen acercamiento de modelos numéricos con respecto los resultados experimentales de las albercas de fusión. Así mismo, se logró validar la influencia de los parámetros de fabricación en la calidad de impresión. El presente estudio explora el desarrollo de nuevas metodologías de modelado en la impresión de aleaciones metálicas ligeras para su potencial aplicación en el sector aeronáutico.

## MATERIALES Y MÉTODOS

El proceso de fabricación del AlSi10Mg se desarrolló mediante un equipo SLM 280 HL, este equipo cuenta con un láser de onda continua Ytterbium IPG que opera a una longitud de 1064 nm, posee una potencia nominal de 400 W y un diámetro de haz de 70  $\mu\text{m}$ , garantizando alta precisión en la consolidación del material.<sup>8</sup> En la figura 2 se observa el equipo utilizado durante la impresión de muestras de AlSi10Mg.

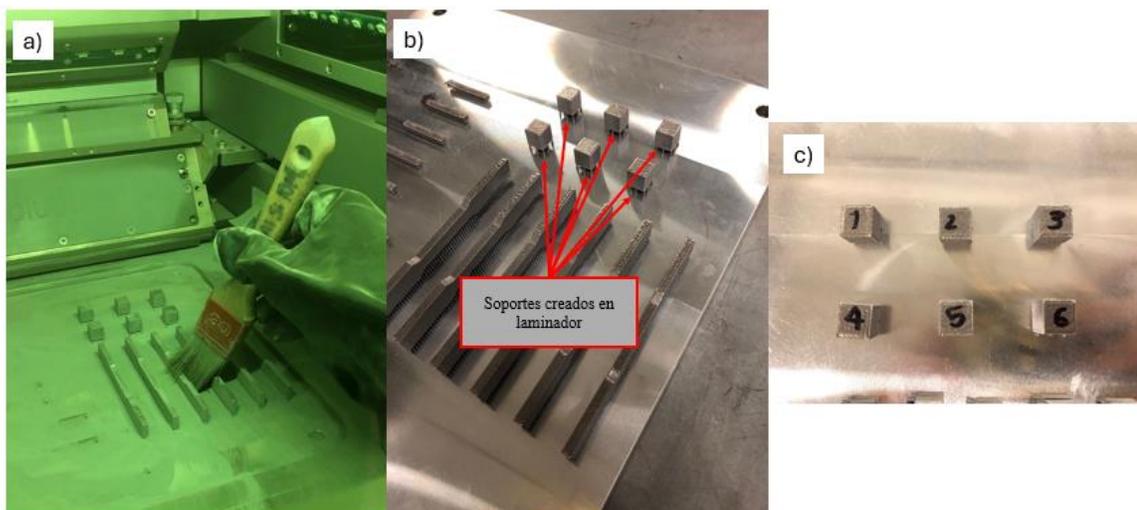


Fig. 2. Impresión mediante fusión selectiva por láser en SLM 280 HL (a) limpieza de polvo, (b) generación de soportes y (c) identificación de muestras.

El proceso de impresión incluye la creación de un modelo CAD, la generación del código G que la impresora seguirá para crear la pieza capa por capa, así como la transferencia de datos a la máquina de impresión, donde se ajusta el posicionamiento de la pieza con los parámetros de impresión y se inicia la fabricación. Los modelos CAD fueron diseñados utilizando el software Solidworks 2023. El procesamiento del archivo STL se realizó mediante el laminador Materialise, el cual permite generar el código G necesario para la fabricación de las piezas.

### Preparación de polvos

Durante el proceso de fabricación, se implementaron controles térmicos y atmosféricos, el polvo fue calentado a una temperatura constante de 200 °C, mientras que la cámara de fabricación se purgó con gas argón, asegurando una concentración de oxígeno inferior al 0.2%. Estas condiciones optimizadas minimizan las inclusiones de oxígeno, mejorando la calidad final de las piezas y la reducción de defectos asociados a la oxidación. La aleación AlSi10Mg con un tamaño promedio de partícula de 24.66  $\mu\text{m}$ , se sometió a un tratamiento de cribado mediante un sistema vibratorio con duración entre 20-40 minutos. El polvo procesado fue recolectado en un contenedor con capacidad para 5 kg, el cual se encuentra en la parte superior de la máquina SLM 280 HL, desde esta posición, el material se transfiere a una tolva con capacidad de 80 kg que suministra el polvo necesario para la fabricación durante el proceso de impresión, garantizando un flujo continuo y eficiente del material.

### Impresión de especímenes

Se generaron especímenes de AlSi10Mg cumpliendo con los requisitos establecidos en la norma ASTM E407. Para la evaluación de la microestructura se generaron cubos de 10 mm de lado. Se identificaron los factores más influyentes del proceso de impresión centrándose en la potencia del láser  $P$ , la velocidad de escaneo  $V$  y el plano focal del láser  $F$ , donde se identificaron los parámetros de potencia de 400 W, velocidad de 1800 mm/s y plano focal de 0 mm. Adicionalmente, se seleccionó un espesor de capa de 30  $\mu\text{m}$  y un ángulo de rotación de 67° entre cada capa durante la fabricación. Así mismo, la cama de fabricación se mantuvo a una temperatura constante de 200 °C para garantizar condiciones óptimas de impresión.

### Densidad relativa

Se realizó el cálculo de la densidad relativa de las piezas impresas utilizando los parámetros de fabricación mencionados anteriormente.

$$RD = 98.98 + 8.63 \times 10^{-4}P + 1.56 \times 10^{-4}V - 0.384 F \quad (1)$$

Donde el termino RD hace referencia a la densidad relativa obtenida. Esta comparación facilitará la evaluación de la correspondencia entre los resultados numéricos y experimentales, respaldando la validez de los parámetros seleccionados. Al sustituir estos valores en la ecuación 1, se obtiene un valor calculado de densidad relativa (RD) del 99.606%.<sup>9</sup>

La densidad relativa de los componentes manufacturados de AlSi10Mg mediante fusión selectiva por láser fue determinada siguiendo la prueba preliminar estándar ASTM B962, basada en el método de Arquímedes. Para las mediciones se utilizó una balanza OHAUS Discovery, con una resolución de  $1 \times 10^{-6}$  kg. Como medios auxiliares, se empleó aceite de silicona con una viscosidad entre 20 y 65 cSt, para la impregnación de la muestra y agua desionizada con un 0.1% en peso ( $\rho_x$ ) como fluido durante las mediciones de masa.

La densidad relativa experimental se determina utilizando la ecuación:

$$RD = \frac{A \rho_w}{\rho_r(A-B)} \quad (2)$$

Donde  $\rho_r$  es la densidad de referencia de la muestra, establecida en 2.67 g/cm<sup>3</sup>, que corresponde a la densidad teórica de la aleación AlSi10Mg en ausencia de porosidad. La densidad del agua  $\rho_w$  es la medida a la temperatura registrada durante el ensayo.  $A$  es la masa de la muestra pesada en aire y  $B$  es la masa de la muestra pesada en agua, considerando la tara del soporte utilizado.

Este enfoque es aplicable para componentes manufacturados con una porosidad inferior al 2%, donde se busca obtener mediciones precisas basadas únicamente en las propiedades intrínsecas del material bajo condiciones controladas.<sup>10</sup>

### Modelo numérico

El modelo numérico se desarrolló mediante la interfaz ANSYS Additive. Esta interfaz permite evaluar el comportamiento de la alberca de fusión durante el proceso SLM bajo condiciones de procesamiento seleccionadas. Se consideraron dos tipos de parámetros de entrada: parámetros constantes y variables paramétricas. Los parámetros constantes incluyeron valores como la temperatura de la placa base, el espesor de la capa y el diámetro del haz láser, los cuales permanecieron fijos a lo largo del análisis. Por otro lado, las variables paramétricas, como la potencia del láser y la velocidad de escaneo, fueron ajustadas dentro de un rango específico para evaluar su influencia en las características clave de la alberca de fusión. El desarrollo del modelo siguió un enfoque metódico, definiendo el dominio del problema, que incluye la geometría del material y la trayectoria del láser, se discretizó utilizando una malla regular refinada. Esto permitió simular el comportamiento dinámico de la alberca de fusión a lo largo del cordón generado por el láser. Durante la simulación, se analizaron diversas combinaciones de parámetros de potencia y velocidad, lo que permitió observar cómo estas variables influyen en las dimensiones y estabilidad de la alberca de fusión, tales como su profundidad, ancho y longitud. El modelo numérico consistió en la representación de un cordón único durante la fabricación SLM, considerando el ancho, la longitud y la profundidad de la alberca de fusión, ver figura 3.

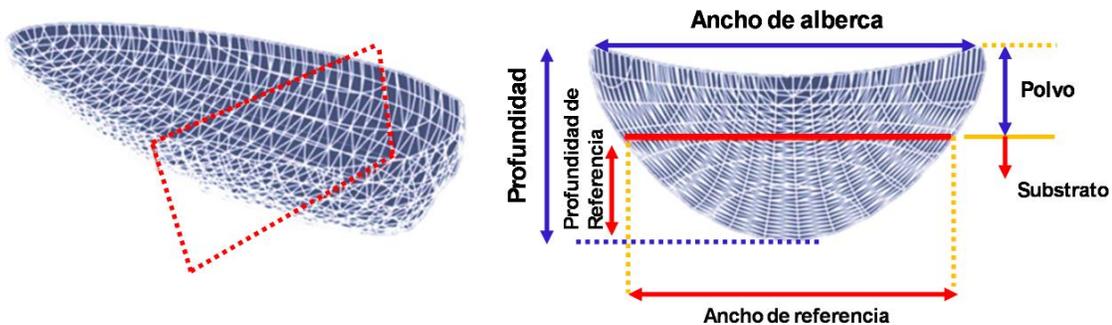


Fig. 3 Referencia geométrica de la alberca de fusión.

El espesor de la capa, en el contexto de una simulación de cordón único, representa la cantidad de material que se añade a cada capa durante el proceso de fabricación. Para comparar de manera adecuada los experimentos de cordón único con los resultados de la simulación, es esencial que el valor ingresado para el espesor de la capa refleje esta condición. Las dimensiones fueron promediadas a lo largo del cordón, generando datos de salida con la evolución detallada de las dimensiones de la alberca de fusión para cada juego de parámetros, como la potencia del láser y la velocidad de escaneo. La profundidad de referencia se define como la diferencia entre la profundidad total de la alberca de fusión y el espesor de la capa, es decir, la profundidad medida desde la base de la primera capa. El ancho de referencia, por su parte, se refiere al ancho medido en la base de la primera capa, donde comienza el polvo.

El modelo numérico microestructural del material AlSi10Mg considera las características de la alberca de fusión, las entradas térmicas y parámetros del proceso. La orientación de los granos del material se genera en tres planos (XY, XZ y YZ). Además, se proporciona la distribución del tamaño de grano y la distribución del ángulo de orientación en forma gráfica, utilizando el método de equivalencia de círculos para el tamaño de grano y un mapa de orientación para los planos evaluados. En el modelo se utilizó una función para generar el mismo patrón de nucleación bajo

un conjunto específico de condiciones del proceso. En el proceso SLM, debido a los ciclos repetidos de calentamiento, la microestructura resultante varía según los parámetros del proceso, lo que genera diferencias en las propiedades mecánicas.<sup>11</sup>

La figura 4 muestra la configuración geométrica para la simulación de microestructura. En la predicción microestructural, inicialmente se realiza una solución térmica de una geometría en forma de hexaedro para determinar la tasa de enfriamiento, el gradiente térmico y el tamaño de la alberca de fusión (ancho y profundidad) del material. Se definieron las dimensiones del hexaedro: ancho, largo y alto, con valores válidos entre 1 y 10 mm. Posteriormente, se generó la microestructura en un cubo más pequeño inscrito dentro del hexaedro. El cubo representa un conjunto de tres planos 2D con ancho y alto iguales a las dimensiones del sensor. Se utilizó un cubo con dimensiones de 10 mm con separación del borde de 0.25 mm desde los bordes de la superficie superior del hexaedro para garantizar que la microestructura de la alberca de fusión térmica haya alcanzado estado estable. La tasa de enfriamiento, gradiente térmico, ancho y profundidad de la alberca de fusión son utilizadas por el solucionador de microestructura como valores promediados.

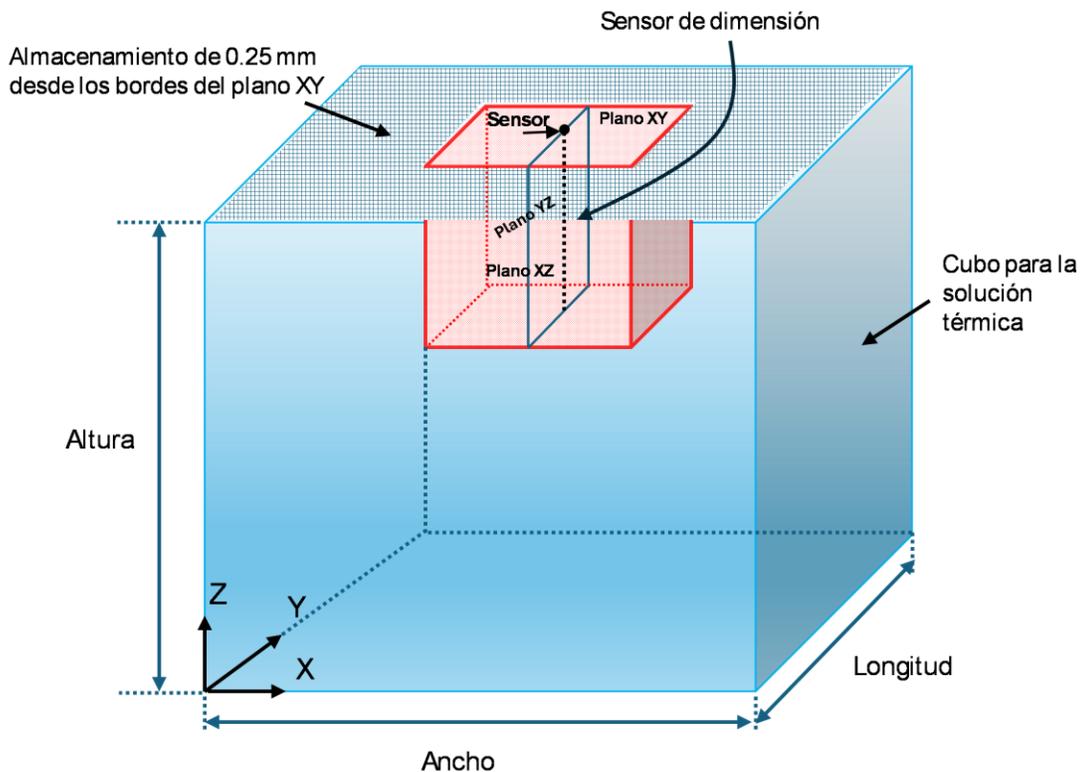


Fig. 4. Configuración geométrica para la simulación de microestructura.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los resultados del modelo numérico permiten predecir la evolución de la alberca de fusión del AlSi10Mg durante el proceso SLM. Para validar los resultados obtenidos en las simulaciones, se usaron imágenes de la alberca de fusión tomadas a resoluciones de 200  $\mu\text{m}$ , de las cuales se midieron el ancho y profundidad de la alberca, ver figura 5.

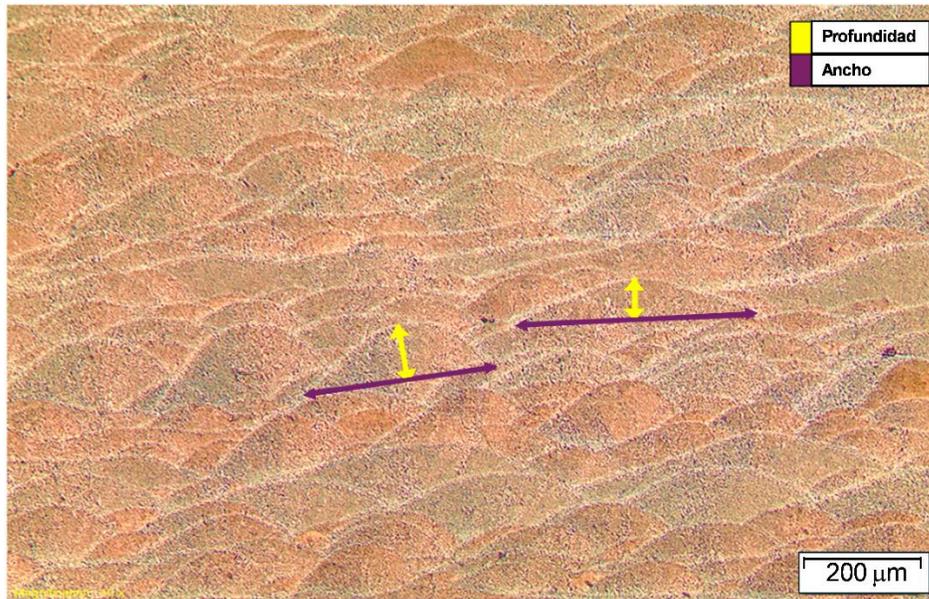


Fig. 5. Micrografía de las albercas de fusión después del proceso SLM.

La simulación se realizó en un cubo de 10 mm, donde se graficaron las dimensiones de la alberca de fusión a lo largo de este recorrido, ver figura 6.

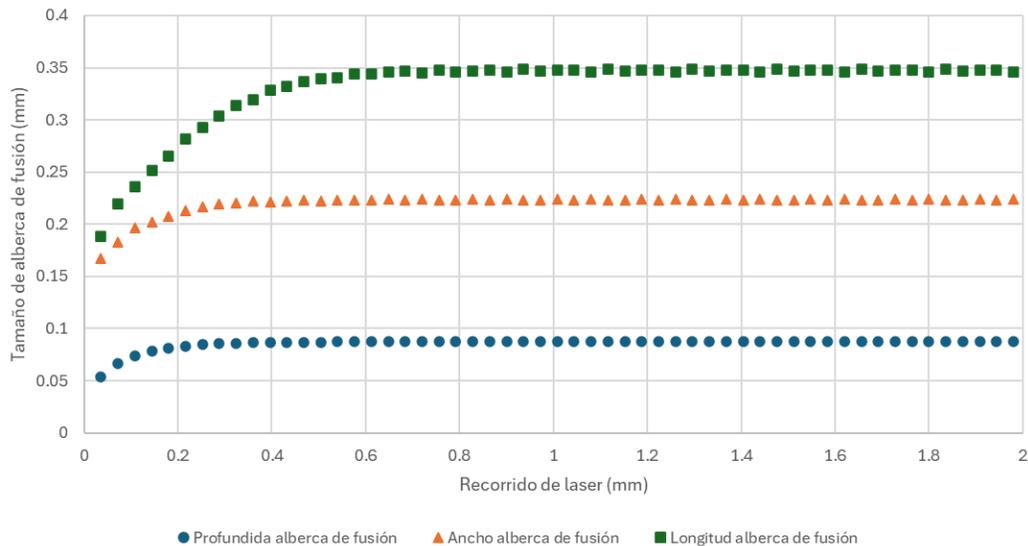


Fig. 6. Resultados numéricos de las dimensiones de la alberca de fusión.

El análisis de la evolución de la alberca de fusión en el escaneo de una sola trayectoria mostró que la alberca comienza a formarse después de que el haz del láser recorre una distancia corta. Las dimensiones de la alberca aumentan hasta alcanzar un estado estable. Se observó que la profundidad y el ancho alcanzan equilibrio antes que la longitud, ésta se desarrolla completamente alrededor de los 0.6 mm con los parámetros seleccionados. Esta información permitió identificar el punto en el que la alberca de fusión alcanza un estado estable y proporcionó una base para interpretar los efectos de las diferentes condiciones del proceso.

Los resultados experimentales fueron consistentes con las predicciones del modelo, lo que confirma que los parámetros de fabricación empleados son adecuados para alcanzar las

características deseadas en las piezas, especialmente en cuanto al tamaño de la alberca de fusión y la reducción de la porosidad. La tabla I presenta una comparativa de los resultados numéricos y experimentales utilizados durante el proceso SLM.

Tabla I Resultados numéricos y experimentales de mediciones de albercas de fusión.

Orientación	Tamaño de alberca de fusión ( $\mu\text{m}$ )	
	Experimental	Simulación
Ancho	243	250
Profundidad	71	90

La simulación de microestructura permitió evaluar la distribución de tamaño de grano y ángulo de orientación de los granos para los planos  $XY$ ,  $YZ$ , y  $XZ$ , ver figura 7.

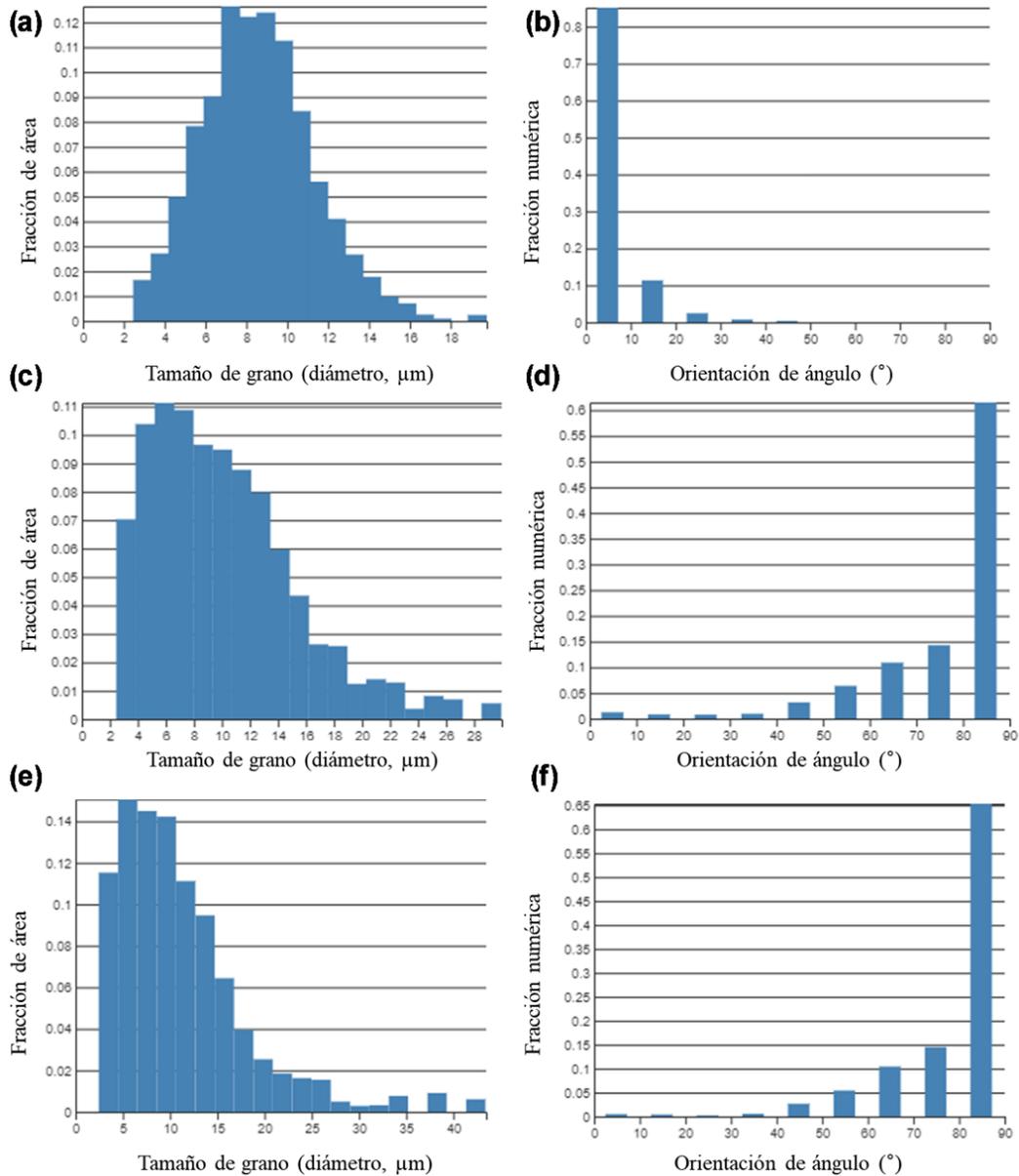


Fig. 7 Simulación de microestructura del AlSi10Mg durante el proceso SLM, (a) tamaño de grano en plano  $XY$  y (b) ángulo en plano  $XY$ , (c) tamaño de grano en plano  $YZ$  y (d) ángulo en plano  $YZ$ , (e) tamaño de grano en plano  $XZ$  y (f) ángulo en plano  $XZ$ .

En la sección (a) se generó una distribución de tamaños de los granos, facilitando la visualización a lo largo del plano XY, este resultado proporciona una comprensión clara del comportamiento de los granos bajo las condiciones procesamiento evaluadas. El tamaño de grano en el plano XY (vista superior) obtuvo un valor promedio de  $8.576 \mu\text{m}$ . En la sección (b) el ángulo de orientación se refiere a la dirección de crecimiento de los granos con respecto al eje horizontal del plano XY, éste es influenciado por la fuente de calor en movimiento. Es importante resaltar que las orientaciones de los granos simulados no representan las orientaciones cristalinas que se observan en mapas de difracción de electrones por retrodispersión. Sin embargo, los resultados de la simulación son adecuados para comparar la morfología de los granos, su tamaño y la dirección de crecimiento.

En la sección (d) se observa la distribución de tamaño de grano en el plano YZ, donde el tamaño de grano obtuvo un valor promedio de  $9.875 \mu\text{m}$ . La sección (e) muestra el ángulo de orientación para este mismo plano. La sección (f) registra un tamaño de grano promedio de  $10.947 \mu\text{m}$  y su respectivo ángulo de orientación se presenta en la sección (f).

Los resultados numéricos permitieron evaluar zonas con falta de fusión, ver figura 8. Este problema se identifica en las regiones donde la orientación es igual a 0, lo que indica material no fundido. En los mapas de orientación y número de granos, estas zonas aparecen como vacíos en regiones donde debería haber continuidad granular, confirmando la presencia de porosidad.

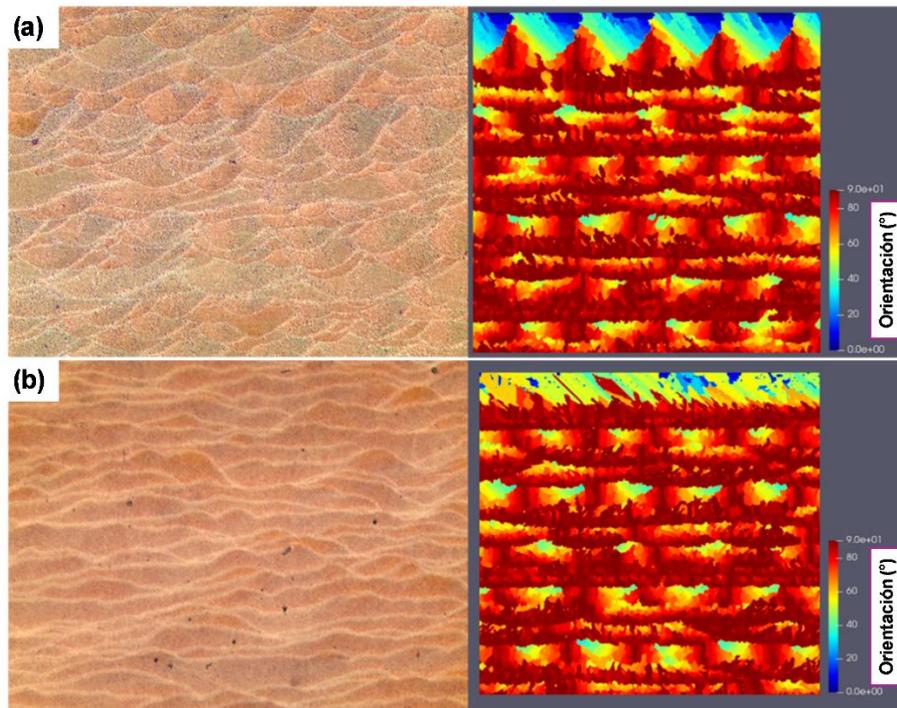


Fig. 8. Comparativa experimental y numérica de las albercas de fusión, (a) vista frontal de la muestra y (b) vista lateral de la muestra.

Para los planos YZ y XZ se comprobó que, bajo parámetros óptimos, no se observan poros entre las albercas de fusión, indicando que el material se fundió correctamente. Estos resultados destacan la importancia de calibrar adecuadamente los parámetros del proceso, ya que una fusión incompleta afecta negativamente tanto las propiedades mecánicas como la calidad final de las piezas. Ajustes precisos en la profundidad, el ancho y la longitud de las albercas de fusión son esenciales para garantizar las propiedades mecánicas y la calidad final de las piezas fabricadas.

## CONCLUSIONES

Se desarrolló un modelo numérico del AlSi10Mg mediante el método SLM, evaluando aspectos clave como las dimensiones de la alberca de fusión, la densidad relativa y la microestructura de las piezas fabricadas. El modelo numérico permitió observar la estabilización de las dimensiones de la alberca de fusión después de 0.75 mm de recorrido del láser. Esta estabilización es crucial para asegurar la uniformidad del proceso y minimizar defectos de fabricación, validando así la efectividad de las condiciones seleccionadas.

Las simulaciones de microestructura proporcionaron información detallada sobre el tamaño y la orientación de los granos, factores que afectan directamente las propiedades finales del material. Los gráficos de distribución de tamaños de grano mostraron una relación directa entre las condiciones de fabricación y la uniformidad de la microestructura, aportando datos valiosos para la optimización del proceso. Las simulaciones de porosidad demostraron que bajo condiciones óptimas, se genera una suficiente profundidad en la alberca de fusión permitiendo generar piezas consolidadas evidenciando el control efectivo del proceso bajo condiciones controladas.

## REFERENCIAS

1. Pérez, L. M. B., Sepúlveda, J. a. T., & Lozano, A. J. B. (2022). *Manufactura y gestión del ciclo de vida del producto (PLM)*. Instituto Tecnológico Metropolitano – ITM.
2. Xu, S., Zhai, W., Huang, R., Fu, J., Fu, M., & Feng, L. (2022). *Metal-Based 3D-Printed Micro Parts & Structures*. In Elsevier eBooks (pp. 448–461). <https://doi.org/10.1016/b978-0-12-819726-4.00009-0>.
3. Munir, K., Biesiekierski, A., Wen, C., & Li, Y. (2020). *Selective laser melting in biomedical manufacturing*. In Elsevier eBooks (pp. 235–269). <https://doi.org/10.1016/b978-0-08-102965-7.00007-2>.
4. Ashwath, P., Xavior, M. A., Batako, A., Jeyapandiarajan, P., & Joel, J. (2022). Selective laser melting of Al–Si–10Mg alloy: microstructural studies and mechanical properties assessment. *Journal of Materials Research and Technology*, 17, 2249–2258. <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2022.01.135>.
5. Taborda J., Zambrano P., (2023). *Process Parameters Effect and Porosity Reduction on AlSi10Mg Parts Manufactured by Selective Laser Melting*. Research Square (Research Square). <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-2876713/v1>.
6. Lu, Q., Ou, Y., Zhang, P., & Yan, H. (2022). Fatigue performance and material characteristics of SiC/AlSi10Mg composites by selective laser melting. *Materials Science and Engineering: A*, 858, 144163. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2022.144163>.
7. Bo, C., & Chou, K. (2015). Melt pool evolution study in selective laser melting. Conference: 26th Annual International Solid Freeform Fabrication Symposium - An Additive Manufacturing Conference At: Austin, TX, USA.
8. Teng, C., Gong, H., Szabo, A., Dilip, J. J. S., Ashby, K., Zhang, S., Patil, N., Pal, D., & Stucker, B. (2016). Simulating Melt Pool Shape and Lack of Fusion Porosity for Selective Laser Melting of Cobalt Chromium Components. *Journal Of Manufacturing Science and Engineering*, 139(1). <https://doi.org/10.1115/1.4034137>.
9. Arvieu, C., Galy, C., Guen, E. L., & Lacoste, E. (2020). Relative Density of SLM-Produced Aluminum Alloy Parts: Interpretation of Results. *Journal Of Manufacturing And Materials Processing*, 4(3), 83. <https://doi.org/10.3390/jmmp4030083>.
10. Nothomb, N., Rodriguez-Barber, I., Pérez-Prado, M. T., Mena, N. J., Pyka, G., & Simar, A. (2024). Understanding the effect of pre-sintering scanning strategy on the relative density of Zr-modified Al7075 processed by laser powder bed fusion. *Additive Manufacturing Letters*, 100253. <https://doi.org/10.1016/j.addlet.2024.100253>.
11. Akram, J., Chalavadi, P., Pal, D., & Stucker, B. (2018). Understanding grain evolution in additive manufacturing through modeling. *Additive Manufacturing*, 21, 255-268. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2018.03.021>.

# Estudio de la precipitación durante el proceso de laminación en caliente de un acero de alta aleación y resistencia

Laura Fátima Zúñiga Pineda<sup>A,B</sup>, Martha Patricia Guerrero Mata<sup>A</sup>,  
Omar García Rincón<sup>B</sup>

<sup>A</sup> Universidad Autónoma de Nuevo León; fatima.zunigapnd@uanl.edu.mx,  
martha.guerreromt@uanl.edu.mx.

<sup>B</sup> Ternium; ogarcia@ternium.com.mx

Correspondencia: martha.guerreromt@uanl.edu.mx

## RESUMEN

*En este artículo se aborda la precipitación durante la laminación en caliente de aceros de alta resistencia, especialmente grados API. Se analizan el proceso termomecánico ( $T$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\epsilon$ ), el producto de solubilidad ( $Ks$ ) y la cinética de precipitación inducida por deformación ( $Ps-Pf$ ). El objetivo es proponer las condiciones termomecánicas y químicas dadas por la presencia de Nb, Ti y V que favorecen la precipitación de carburos de estos elementos en aceros HSLA (High Strength Low Alloy) buscando la modificación de la microestructura y las propiedades mecánicas.*

## PALABRAS CLAVES

Proceso termomecánico, producto de solubilidad, cinética de precipitación, HSLA.

## ABSTRACT

*This paper addresses precipitation during hot rolling of high-strength steels, especially API grades. The thermomechanical process ( $T$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\epsilon$ ), the solubility product ( $Ks$ ), and the strain-induced precipitation kinetics ( $Ps-Pf$ ) are analyzed. The objective is to propose the thermomechanical and chemical conditions given by the presence of Nb, Ti, and V that favors precipitation of carbides of these elements in HSLA (High Strength Low Alloy) steels, seeking to modify the microstructure and mechanical properties.*

## KEYWORDS

Thermomechanical process, solubility product, precipitation kinetics, HSLA.

## INTRODUCCIÓN

El desarrollo de aceros de alta resistencia y baja aleación (HSLA, *High Strength Low Alloy*) ha sido impulsado por la necesidad de materiales con mayor capacidad mecánica y confiabilidad metalúrgica, especialmente en sectores como el automotriz y el energético. Se comenzó con la implementación del proceso termomecánico que permitió producir aceros con una alta capacidad mecánica y con menor necesidad de tratamientos térmicos posteriores.<sup>1,2</sup> El Instituto Americano del Petróleo (API por sus siglas en inglés) norma las mejores prácticas para la fabricación y diseño de las redes de tubería de conducción de hidrocarburos.<sup>3,4</sup> En este contexto, estos aceros han evolucionado mediante la incorporación de elementos microaleantes como niobio (Nb), titanio (Ti) y vanadio (V), para controlar la microestructura durante el proceso de laminación en caliente.<sup>5</sup> El grado API 5L, implementado para la fabricación de tubos de línea, de acuerdo con la norma API 5L 43<sup>a</sup>, establece dos niveles de especificación de producto <sup>6-9</sup>, *PSL1* y *PSL2* (o por sus siglas en inglés *Product Specification Level*). La combinación de los elementos anteriores variará dependiendo de la especificación del fabricante, en donde cada nivel está diseñado para una capacidad mecánica diferente. En la tabla I se muestra la composición característica de los grados API 5XL *PSL1* y *PSL2*. En el caso del nivel de especificación 1, cuenta con un alcance de límite elástico de 483 MPa (70000 Psi) y una resistencia de 565 MPa (82000 Psi). En el caso del nivel de especificación 2, cuenta con un rango en la capacidad mecánica que va desde los 565 MPa (82000 Psi) hasta 758 MPa (110000 Psi).<sup>10</sup>

Tabla I. Composición característica de los grados API por nivel de especificación.<sup>6, 7</sup>  
 Nivel de especificación 1.

Grado	Carbono	Manganeso	Fósforo	Azufre	Titanio	Otros
B	0.26	1.20	0.030	0.030	0.04	b, c, d
X42	0.26	1.40	0.030	0.030	0.04	c, d
X52	0.26	1.40	0.030	0.030	0.04	c, d
X60	0.26	1.40	0.030	0.030	0.04	c, d

Nivel de especificación 2.

Grado	Carbono	Manganeso	Fósforo	Azufre	Titanio	Otros
B	0.22	1.20	0.025	0.015	0.04	d, e
X42	0.22	1.30	0.025	0.015	0.04	c, d
X52	0.22	1.40	0.025	0.015	0.04	c, d
X60	0.22	1.40	0.025	0.015	0.04	c, d

Elementos otros: b) Niobio, c) Vanadio, d) Titanio y e) combinación de los elementos anteriores dependiendo de la especificación del fabricante.

Los API 5XL se caracterizan por tener microestructuras del tipo ferrita-perlita de grano fino. A partir del desarrollo e implementación del proceso termomecánico es posible la obtención de microestructuras del tipo ferrita, perlita y bainita dependiendo del procesamiento y el enfriamiento controlado que se presente durante la transformación del acero,<sup>6</sup> lo que impactará directamente en la capacidad mecánica, la capacidad para ser soldable, y la resistencia a la corrosión. La tendencia es aumentar la capacidad mecánica sin incrementar espesores de operación sólo a partir de la modificación de la composición química y la aplicación del proceso termomecánico. En la figura 1 se presenta la microestructura típica ferrítica perlítica del acero API, la cual está en función de la composición química y las condiciones de procesamiento, tales como el enfriamiento lento.<sup>11, 12</sup> Los incisos a) y b) muestran zonas más gruesas de perlita, con bandas de deformación, que en el inciso c) que muestra la degradación de la perlita por la disminución del contenido de carbono y la falta de deformación, y el inciso d) muestra la microestructura que resulta de la acumulación de deformación.

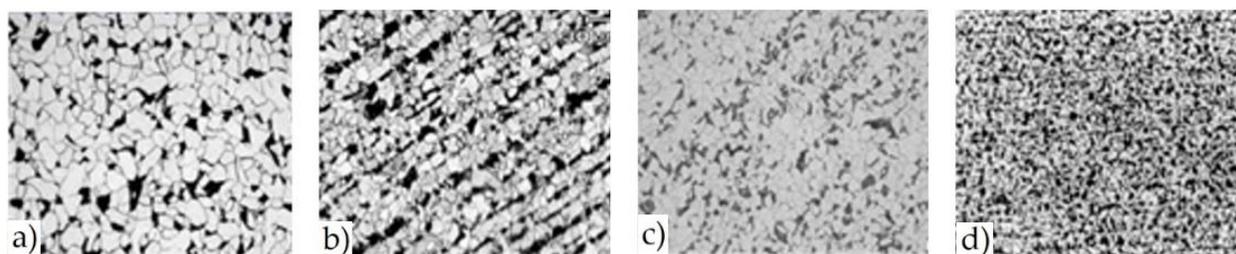


Fig. 1. Microestructura característica de aceros API 5XL PSL1 X70. Microestructura ferrita perlita a diferentes tamaño y morfología de grano fino dependiente del proceso termomecánico.<sup>13, 14</sup>

## MARCO TEÓRICO

### Aceros HSLA y microaleados

Los aceros HSLA (*HSLA (High Strength Low Alloy)*) se distinguen por su elevada resistencia mecánica y buena soldabilidad, resultado de su composición química y procesamiento termomecánico. La adición de microaleantes como niobio (Nb), titanio (Ti) y vanadio (V) favorece la formación de precipitados (carburos, nitruros y carbonitruros) que refinan el tamaño de grano y mejoran las propiedades mecánicas del acero. La diferencia entre aceros HSLA y microaleados radica en la cantidad y tipo de elementos aleantes, así

como en la microestructura obtenida. Los aceros HSLA presentan límites elásticos superiores a 275 MPa y contienen menos del 4% de microaleantes, mientras que los aceros microaleados contienen elementos en proporciones menores al 1%, con un máximo de 0.05% por elemento, y presentan microestructuras simples como ferrita o perlita.<sup>15</sup> Los aceros API, como el 5XL PSL2, son variantes HSLA diseñadas para cumplir con estrictas especificaciones técnicas en tuberías para hidrocarburos. Su desarrollo se basa en el control de la microestructura mediante procesos termomecánicos que incluyen recrystalización dinámica y precipitación de partículas finas.<sup>16, 17</sup> Desde el punto de vista normativo, los aceros aleados contienen hasta 1.5% de Mn y 0.5% de Si, mientras que los aceros de baja aleación contienen menos del 6% de elementos aleantes y se utilizan en aplicaciones estructurales. Aunque los HSLA no se consideran aleados según el AISI (*American Iron and Steel Institute*, Instituto Americano del hierro y el acero), su diseño químico está orientado a proporcionar alta resistencia mecánica y a la corrosión.<sup>18, 19</sup> El diseño de nuevos aceros de alta resistencia mediante laminación en caliente ha impulsado la investigación sobre el efecto de la composición química y los parámetros de proceso en la morfología del grano, promoviendo la transformación homogénea de microconstituyentes durante el enfriamiento controlado.<sup>20, 21</sup> Tanto los aceros HSLA como los microaleados se desarrollan bajo la influencia directa del proceso termomecánico, siendo éste fundamental para alcanzar las propiedades mecánicas deseadas.<sup>22, 23</sup>

### Proceso termomecánico

En la actualidad, no sólo se busca conformar geoméricamente el acero, sino optimizar el proceso de laminación en caliente a partir de controlar variables operacionales para obtener microestructuras que favorezcan al material según su aplicación industrial.<sup>24, 25</sup> El proceso termomecánico para la obtención de un acero laminado en caliente, no es más que el control del conjunto de variables de temperatura, deformación, velocidad de deformación y velocidades de enfriamiento, para la obtención de una microestructura que favorezca la transformación del acero.<sup>26, 27</sup> En la figura 2, se ilustran las estaciones que componen a un proceso de laminación en caliente. En cada etapa el material presenta cambios físicos y mecánicos que contribuyen a la obtención final del material deseado.

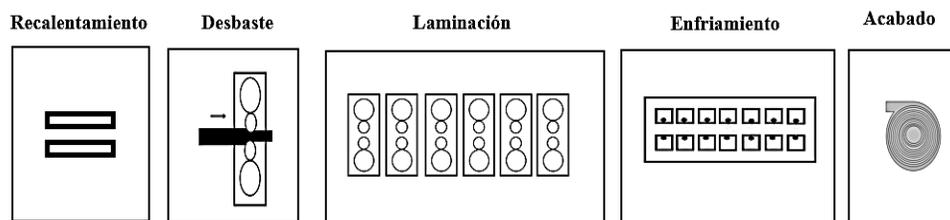


Fig. 2. Ilustración de la deformación aplicada a una barra de acero durante el proceso de laminación.

El acero se fabrica siguiendo la secuencia de proceso, que inicia con hornos recalentadores, castillos desbastadores, castillos de deformación final y una cama de enfriamiento donde se logra la transformación de la microestructura del acero. El proceso de deformación se realiza por encima de la temperatura crítica de transformación  $A_{c3}$ , que es la temperatura de cambio de fase, de ferrita a austenita ( $\alpha$ - $\gamma$ ), en la que se logra eliminar defectos del proceso de solidificación y homogeneizar la microestructura del grano austenítico antes de la deformación.<sup>28-30</sup> Los cambios microestructurales del acero que producen su ablandamiento y endurecimiento, se dan por efectos de la temperatura y la deformación, durante el tiempo que pasa el acero en el tren laminador hasta llegar a un enfriamiento controlado que finalmente favorecen a la microestructura del material.<sup>31, 32</sup> En el esquema de la figura 3, se ilustra el principio de la laminación, donde se muestra el proceso de deformación aplicando la fuerza con rodillos de trabajo (contemplando el ángulo de contacto ( $\alpha$ ) hacia la barra de acero, donde se genera la disminución del espesor ( $h_0$ ) del elemento de entrada en comparación al de salida ( $h_f$ ).<sup>33</sup>

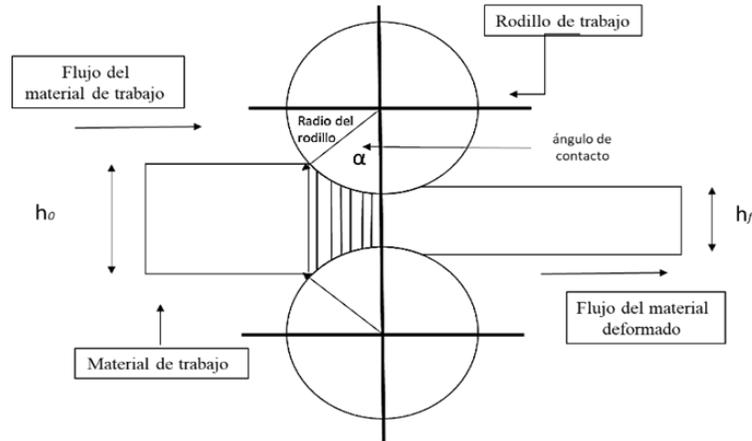


Fig. 3. Esquema del proceso de laminación en caliente. Ángulo de contacto ( $\alpha$ ), espesor de entrada ( $h_0$ ), espesor de salida ( $h_f$ ).

El proceso termomecánico ha sido implementado por su relevancia y características durante la laminación convencional para la fabricación de acero de alta resistencia. La laminación convencional, a diferencia del tratamiento termomecánico, requiere de un tratamiento térmico posterior a su fabricación.<sup>34</sup> En la figura 4, se muestra la comparación del proceso termomecánico y el tratamiento térmico normalizado.

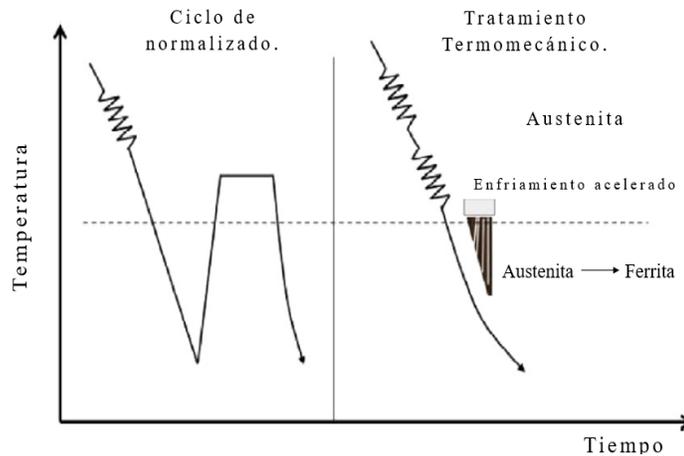


Fig. 4. Comparación del ciclo de normalizado y el proceso termomecánico.<sup>36</sup>

Los factores principales de los que depende la obtención de una microestructura específica diseñada para aplicaciones específicas son, la composición química, el proceso termomecánico con el cual se realice la secuencia de laminación en caliente, la temperatura de recalentamiento, homogenización de la temperatura antes de la laminación, velocidad de deformación y finalmente el tamaño de grano al final del tren laminador, el cual participa en la obtención de microconstituyentes durante el enfriamiento de transformación del acero.<sup>37, 38</sup> En los procesos industriales se aplican enfriamientos continuos para generar la transformación de fase que se desee, en función de las características del sistema de enfriamiento y la configuración establecida.

### Elementos en adición en la composición química de un acero de alta resistencia

Los elementos en adición modifican la microestructura del acero, optimizando sus propiedades mecánicas.<sup>36, 39, 40</sup> El acero es una solución hierro y carbono, pero la adición de elementos microaleantes en aceros de bajo carbono promueve mecanismos que afectan el crecimiento del grano austenítico y retrasan o inhiben la recristalización<sup>41</sup> durante el trabajo en caliente. Entre los elementos gamágenos (estabilizadores

de la fase  $\gamma$ ) se encuentran nitrógeno, cobre, oro, zinc, níquel, manganeso, cobalto y carbono.<sup>42</sup> En contraste, los elementos alfégenos (estabilizadores de la fase  $\alpha$ ) incluyen al cromo, molibdeno, aluminio, fósforo, titanio, estaño, vanadio y niobio.<sup>43, 44</sup> Estos elementos influyen en las temperaturas de transformación, e impactan en la microestructura promoviendo la formación de carburos y precipitados.<sup>45</sup> El nitrógeno, en proporciones entre 0.004% y 0.007% en peso, mejora la resistencia y el refinamiento de grano, y forma carbonitruros estables con titanio, contribuyendo a la resistencia mecánica y ductilidad del acero.<sup>46, 47</sup>

### **Mecanismos metalúrgicos durante el trabajo en caliente**

La obtención de microestructuras que mejoren las propiedades mecánicas del acero depende del aprovechamiento de los fenómenos metalúrgicos inducidos por la temperatura y las condiciones del laminado en caliente.<sup>48, 49</sup> Durante la deformación en caliente, ocurren mecanismos de ablandamiento y endurecimiento, como la recuperación y la recrystalización, tanto dinámica como estática, que afectan directamente la evolución del grano austenítico.<sup>50, 51</sup> Estos mecanismos actúan en función de la energía generada durante el proceso termomecánico, facilitando la nucleación y el crecimiento de nuevos granos. Para la producción de aceros de alta resistencia, como los aceros HSLA grado API, es esencial controlar variables como la temperatura, el grado y la velocidad de deformación, así como el enfriamiento controlado.<sup>51</sup> Este control permite obtener microconstituyentes optimizados que definen el rendimiento final del acero.

### **Recrystalización dinámica durante el proceso de laminación en caliente**

La recrystalización durante el trabajo en caliente es un proceso que regenera la microestructura, eliminando defectos originados en la solidificación. Este fenómeno ocurre dentro de un rango de temperatura que promueve el mecanismo de ablandamiento mediante la nucleación y el crecimiento de nuevos granos a partir de los deformados.<sup>52, 53</sup> Tanto la recrystalización dinámica como la estática se basan en este mismo mecanismo, a diferencia que la dinámica está bajo el efecto que genera la deformación. Durante el procesamiento termomecánico, la combinación de temperatura, deformación y velocidad de deformación crea condiciones energéticas para inducir la recrystalización dinámica en cada etapa del laminado, generando una microestructura recrystalizada.<sup>54</sup> Este proceso se manifiesta principalmente en los primeros pases de deformación industrial. En la recrystalización dinámica, los sitios de nucleación preferenciales se localizan en los límites de grano con alta densidad de dislocaciones, siendo las bandas de deformación zonas críticas para el inicio del nuevo crecimiento granular. Así, la temperatura, el grado de deformación y su velocidad son variables fundamentales que determinan este mecanismo de ablandamiento irreversible de la microestructura.<sup>54, 55</sup> Durante el trabajo en caliente, la microestructura austenítica equiaxial del acero se deforma generando granos alargados tipo “pancake”. Bajo la influencia de la temperatura, deformación y composición química, se forman núcleos de recrystalización que dan lugar a nuevos granos recrystalizados.<sup>56, 57</sup> Estos granos, a su vez, son nuevamente deformados durante el laminado, resultando en una microestructura homogénea característica de la recrystalización dinámica.<sup>58</sup> La intensidad de la recrystalización dinámica aumenta con el grado de deformación, produciendo una distribución uniforme de núcleos en los límites de grano.<sup>59</sup> Mientras el material esté sujeto a condiciones de temperatura y deformación adecuadas, la microestructura inicial se transforma en una estructura deformada, homogénea y recrystalizada.<sup>60</sup> Este fenómeno puede ser evaluado mediante ensayos termomecánicos que generan curvas esfuerzo-deformación verdadera, reflejando el comportamiento del material en función de variables como temperatura, deformación y velocidad de deformación. Estas curvas evidencian los mecanismos de ablandamiento, restauración y recrystalización dinámica, como la mostrada en la figura 5.<sup>61, 62</sup> El análisis de las curvas de fluencia, a bajas deformaciones y velocidad constante, muestra un pico simple o un comportamiento cíclico, indicando la naturaleza del grano: un pico simple se asocia con grano fino, mientras que el comportamiento cíclico sugiere crecimiento granular.<sup>63, 64</sup>

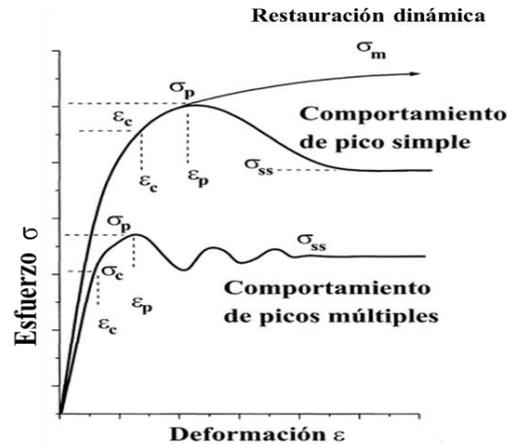


Fig. 5. Curva de fluencia en condiciones de conformado en caliente y a velocidad de deformación constante para el caso de restauración y recristalización dinámica.<sup>62</sup>

Las curvas esfuerzo-deformación permiten analizar el comportamiento del acero durante la deformación. Inicialmente, se observa un aumento del esfuerzo debido a la restauración del material. La segunda zona, donde se alcanza el esfuerzo máximo, corresponde al ablandamiento continuo generado por la recristalización dinámica. En la tercera zona, el material estabiliza su esfuerzo gracias a la formación de una microestructura equiaxial homogénea resultante de una recristalización dinámica simple.<sup>59-62</sup> Las curvas de recristalización en pico se presentan a temperaturas bajas y altas deformaciones, mientras que las curvas cíclicas ocurren a temperaturas elevadas y bajas velocidades de deformación. Altas velocidades de deformación combinadas con temperaturas muy bajas pueden inhibir la recristalización dinámica, favoreciendo mecanismos alternativos como la recuperación y la restauración dinámica.<sup>63, 64</sup> El mecanismo de recristalización dinámica se visualiza en la evolución de la microestructura austenítica durante el procesamiento termomecánico: desde la estructura inicial tras el recalentamiento, pasando por la nucleación en los límites de grano, hasta la formación de una estructura tipo “collar” o “necklace”, que evidencia la formación y crecimiento de nuevos granos recristalizados, como el ejemplo ilustrado en la figura 6.<sup>62</sup>

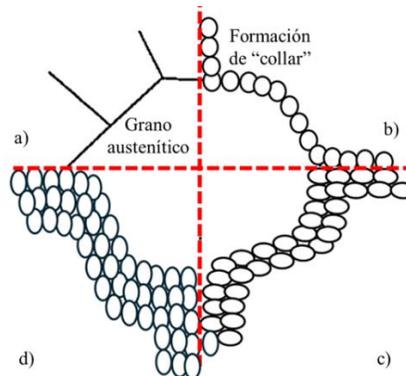


Fig. 6. Representación de la formación del collar (necklace) por efectos de la nucleación en los límites de grano durante la recristalización de la microestructura. a) grano inicial. b) inicio de nucleación. c) progreso de nucleación. d) collares de recristalización.<sup>65</sup>

La recristalización, además de ser afectada por la deformación que modifica su cinética, también está influenciada por la presencia de elementos microaleantes en la composición del acero.<sup>65</sup> Estos elementos forman compuestos complejos que retrasan el inicio de la recristalización, además de aquellos que permanecen en solución sólida. En aceros con alta concentración de microaleantes, es fundamental estudiar la interacción entre los mecanismos de ablandamiento y endurecimiento para optimizar las propiedades mecánicas finales del material.<sup>66, 67</sup>

### Temperatura de no recrystalización

La temperatura de no recrystalización ( $T_{nr}$ ) es un parámetro en el proceso termomecánico que se utiliza como indicador del límite térmico donde comienza la eliminación de defectos microestructurales generados durante la solidificación, permitiendo la homogeneización del grano austenítico.<sup>68-70</sup> Por encima de la  $T_{nr}$ , se favorece la recrystalización completa, mientras que por debajo de esta temperatura la microestructura conserva granos alargados que pueden perjudicar las propiedades mecánicas finales.<sup>71-73</sup> Esta temperatura se sitúa típicamente entre la temperatura crítica de transformación  $A_{c3}$  y el punto de fusión del acero, ubicándose aproximadamente 50 °C por encima de  $A_{c3}$  o un 30% por debajo del punto de fusión. La  $T_{nr}$  puede determinarse experimentalmente mediante ensayos termomecánicos con deformación y velocidad constantes, o estimarse mediante modelos matemáticos.<sup>74, 75</sup> Diversos autores, como Bai, Flecher y Boratto,<sup>76</sup> han desarrollado ecuaciones para calcular la  $T_{nr}$  basadas en la composición química microaleada y, en algunos casos, considerando la deformación. Por ejemplo, Flecher propuso una fórmula que excluye el efecto de la deformación en caliente. Estas ecuaciones son herramientas fundamentales para predecir la recrystalización y controlar el proceso de laminación en caliente según la aleación específica.<sup>77</sup>

Flecher –  $T_{nr}$ . (1)

$$T_{nr} = 203 - 310C - 149\sqrt{V} + 657\sqrt{Nb} + 683e^{-0.36\varepsilon}$$

Bai –  $T_{nr}$ . (2)

$$T_{nr} = 174 \log \left[ Nb \left( C + \frac{12}{14}N \right) \right] + 1444$$

Boratto -  $T_{nr}$ . (3)

$$T_{nr} = 887 + 464C + (6445Nb - 644\sqrt{Nb}) + (732V - 230\sqrt{V}) + 880Ti + 363Al - 357Si$$

Flecher –  $T_{nr}$ , despreciando la deformación. (4)

$$T_{nr} = 849 - 349C + 676\sqrt{Nb} + 337V \quad (R^2 = 0.72)$$

La temperatura de no recrystalización debe calcularse para determinar la temperatura en la que se va a propiciar el fenómeno de ablandamiento en cada nuevo grado de acero. En el esquema de la figura 7 se puede observar el cambio de la microestructura por debajo y encima de la  $T_{nr}$  durante el proceso de deformación.

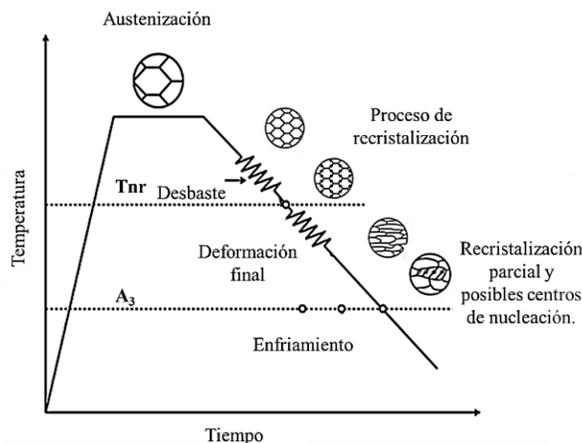


Fig. 7. Esquema representativo del comportamiento de la microestructura ante temperatura.

La  $T_{nr}$  está fuertemente condicionada por la composición química del acero. Los elementos de aleación pueden incrementar, retrasar o inhibir la recrystalización, lo que afecta la eliminación de defectos y la formación de una microestructura refinada y homogénea.<sup>78</sup> Lo que fomenta el interés sobre cómo los

elementos de aleación influyen en los mecanismos de ablandamiento durante el laminado en caliente para obtener aceros de alta resistencia.

### Efecto de los elementos de aleación en la composición química de un acero de alta resistencia

En el diseño de aceros microaleados para aplicaciones específicas, la incorporación de elementos como titanio, vanadio, niobio y cobre juega un papel crucial en la mejora de las propiedades mecánicas finales, especialmente durante el proceso termomecánico.<sup>79, 80</sup> El titanio, por ejemplo, incrementa el límite elástico y la tensión última mediante mecanismos de precipitación.<sup>81, 82</sup> Durante el calentamiento, estos elementos afectan el volumen y la velocidad de formación de la austenita, así como los mecanismos de ablandamiento como la recristalización austenítica. Su presencia influye directamente en la evolución microestructural y en las propiedades mecánicas, incluyendo el endurecimiento por deformación y el comportamiento durante el templeado. En el enfriamiento, la microaleación modifica las temperaturas críticas de transformación, favoreciendo o inhibiendo la formación de fases bainíticas o martensíticas, lo que incide en la resistencia y tenacidad del acero. Estos efectos están detallados en tablas específicas que muestran el efecto de cada elemento durante las etapas térmicas del proceso.<sup>83, 84</sup> En la tabla II se presenta el efecto que generan alguno de los elementos en la composición química de un acero microaleado durante el calentamiento, para la formación de la austenita, y en la tabla III el desglose durante el enfriamiento, para lograr la transformación.

Durante el enfriamiento, la velocidad de transformación del acero depende tanto del ritmo de enfriamiento como del efecto previo de la microaleación en la formación de austenita durante el calentamiento.<sup>86-87</sup> Esta influencia se refleja directamente en las temperaturas críticas  $Ar_1$  y  $Ar_3$ . En aceros de alta resistencia, se incorporan intencionalmente elementos microaleantes como titanio, vanadio y niobio, los cuales fortalecen el material mediante precipitación, ya sea en solución sólida o inducida por deformación. El niobio, uno de los primeros microaleantes utilizados, ha demostrado un efecto significativo en el incremento del límite elástico y en la resistencia al efecto, alcanzando propiedades de hasta 445 MPa de límite elástico, elongaciones del 34–43%, y energías de efecto entre 27 y 40 J en aceros laminados en caliente. Se ha comprobado que el niobio refina el grano ferrítico, especialmente en aceros con aproximadamente 0.16% de carbono, 0.7% de manganeso y entre 0.02–0.03% de niobio.<sup>88, 89</sup> Además, su presencia modifica las temperaturas críticas de transformación y mejora las propiedades mecánicas tras el laminado en caliente, especialmente cuando se encuentra en concentraciones de 0.01–0.05%.<sup>90</sup>

Tabla II. Efecto de los elementos de aleación durante el proceso de calentamiento de un acero de alta aleación y resistencia.<sup>85</sup>

Durante el calentamiento		
Formación de austenita	Formación austenita	Recristalización
<b>C, Mn</b> Reducen rango intercrítico	<b>Mn</b> Baja $Ac_1$	<b>Mn, Si, V, Nb</b> Expanden rango de $T_{nr}$
<b>Si, Al</b> Expanden rango intercrítico Aumentan difusión de C	<b>Si, Al</b> Suben $Ac_1$ y $Ac_3$	<b>B</b> Aumenta inicio y fin de $T_{nr}$
<b>Cr, Mo, V, Nb</b> No afectan velocidad de austenización, pero sí inhiben difusión de C.	<b>B</b> Sube punto eutectoide	<b>Nb, Cr, Mo</b> Retardan recristalización
Aumentan la sensibilidad a la velocidad de calentamiento	<b>Mo, Cr</b> Reducen movilidad de interfaz $\alpha+\gamma$	

Por tanto, el control preciso del proceso termomecánico es esencial para evitar tratamientos térmicos posteriores que puedan interferir con los fenómenos metalúrgicos y alterar negativamente la microestructura final del acero, la cual depende directamente de su composición y ruta de procesamiento.

Tabla II. Efecto de los elementos de aleación durante el proceso de enfriamiento de un acero de alta aleación y resistencia.<sup>87, 88</sup>

Regiones de transformación	Durante el enfriamiento	
	Velocidad de enfriamiento	Temperatura de transformación
<b>Mn</b> Recorre el rango de transformación ferrítica y bainítica a menores temperaturas y velocidades de enfriamiento	<b>Mo, Cr, Mn, Cu, Ni</b> Reducen velocidad de enfriamiento crítica	
<b>Al</b> Mueve el rango de transformación bainítica hacia menores velocidades de enfriamiento	<b>Si</b> Depende de la cantidad de Mn. A mayor Mn, Si reduce la velocidad de enfriamiento crítica	<b>Mn</b> Reduce Ms
<b>Mo, Cr</b> Mueve la transformación ferrítica a menores velocidades de enfriamiento	<b>B</b> Reduce la sensibilidad de la microestructura y de las propiedades a la velocidad de enfriamiento	<b>Mo, Cr</b> Reducen temperatura Bs
<b>B</b> Desplaza transformación ferrítica a menores velocidades de enfriamiento	<b>V, Nb, Ti</b> Aumentan velocidad de enfriamiento crítica	<b>B</b> Reduce temperatura Bs
<b>V, Nb, Ti</b> Inhiben transformación ferrítica		

La implementación del proceso termomecánico, diseñado para eliminar los postratamientos térmicos, influye directamente en el acero debido al efecto de los fenómenos metalúrgicos que ocurren durante el proceso de laminación en caliente. Y que es al nivel de desarrollo en el que se encuentra el sector industrial, de poder entender los mecanismos y el efecto que se genera en aceros de alta aleación y resistencia.<sup>91</sup>

### Endurecimiento por precipitación en aceros microaleados

El endurecimiento por precipitación es un mecanismo clave para mejorar la resistencia y la tenacidad en aceros microaleados. Este efecto se logra mediante la formación de partículas precipitantes durante la fabricación del acero, las cuales actúan como obstáculos al movimiento de dislocaciones, elevando así la resistencia mecánica del material. Durante el diseño de aceros de alta resistencia, se promueve la formación de compuestos como V (C, N), Nb (C, N), NbC y TiC.<sup>92, 93</sup> La solubilidad de estas fases a altas temperaturas depende de parámetros como el tiempo, la temperatura, la deformación y el contenido en peso de los elementos de aleación, lo cual influye en la distribución, tamaño e interfaz de los precipitados. La cantidad de carbono y nitrógeno disponible en la austenita también determina si estos compuestos se forman en fase austenítica o ferrítica, y si son carbonitruros simples o complejos.<sup>94, 95</sup> Estudios indican que el carburo de vanadio (VC) es el precipitado más soluble, por lo que su formación se limita a la fase ferrítica durante el enfriamiento. Además, el refinamiento de grano, otro mecanismo de endurecimiento incrementa la resistencia y la elongación sin comprometer la ductilidad, en línea con la relación de Hall-Petch, expresada en la ecuación 5.<sup>96, 97</sup>

Hall- Petch.

$$\sigma_0 = \sigma_t + k_0 \cdot d^{-\frac{1}{2}} \quad (5)$$

Dónde  $\sigma_0$  es el límite elástico,  $\sigma_t$  el límite elástico en un solo cristal,  $k_0$  el factor de Hall-Petch, que representa la constante del efecto de bloqueo de los límites de grano durante el movimiento de dislocaciones en estado inicial durante la deformación plástica, y  $d$  tamaño de grano. En la figura 8 se muestra el efecto del tamaño de grano en las propiedades de un acero microaleado.<sup>98-101</sup> La precipitación que contribuye al refinamiento del grano en aceros microaleados puede ocurrir en tres escenarios principales: primero, cuando

partículas pequeñas no se disuelven y fijan los límites de grano de la austenita durante el recalentamiento en el proceso termomecánico; segundo, cuando partículas que sí se disuelven en esta etapa, pero vuelven a precipitar en la austenita durante la deformación en caliente, retrasando o inhibiendo la recrystalización y el crecimiento del grano; y finalmente, cuando las partículas precipitan tras la deformación, durante la transformación de la austenita, típicamente siendo compuestos de titanio, vanadio o niobio.

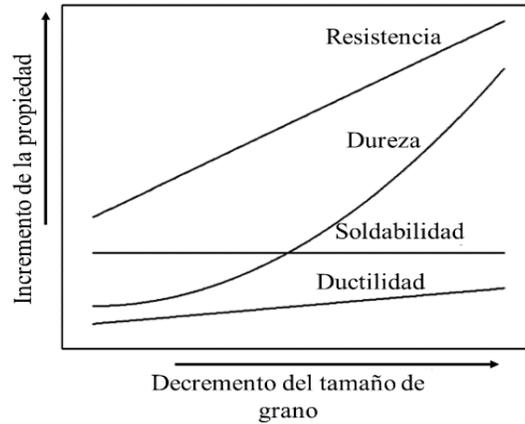


Fig. 8. Efecto del tamaño de grano sobre las propiedades de un acero microaleado.<sup>98</sup>

El estudio de la precipitación en aceros microaleados considera la relación entre el tamaño de grano, la fracción volumétrica y el tamaño de los precipitados. Basado en los trabajos de Zener,<sup>99, 100</sup> se describe cómo las partículas de segunda fase inhiben el crecimiento del grano, estabilizando su tamaño en función de la fracción volumétrica y el tamaño de dichas partículas. Además, se analiza la cinética de precipitación, enfocándose en el crecimiento selectivo de partículas que, al aumentar, pierden efectividad para el endurecimiento del acero.<sup>101</sup> Un ejemplo notable es el nitruro de titanio (TiN), cuya estabilidad termodinámica y baja solubilidad a altas temperaturas permite una fijación efectiva de los límites de grano. Para caracterizar los precipitados se consideran tres parámetros clave: la fracción volumétrica ( $Fv$ ), el tamaño promedio del precipitado ( $\bar{r}$ ) y la distancia entre partículas ( $L$ ).<sup>102, 103</sup>

Fracción volumétrica de precipitación. (6)

$$L = 2\bar{r} \left( \frac{\pi}{4Fv} \right)^{1/2}$$

Y es que la composición química fija la fracción volumétrica de precipitación y por lo tanto la efectividad metalúrgica que estos presenten por la distribución y el tamaño que presenten en el acero.

### Solubilidad de los elementos en adición en la composición química de un acero de alta resistencia

Para el diseño y desarrollo de aceros microaleados se lleva a cabo el análisis cómo cada elemento interactúa con la temperatura y las variables del proceso termomecánico. Esto implica identificar los productos de solubilidad y compuestos que favorezcan la microestructura. Los elementos típicos en aceros endurecidos por precipitación, como Ti, V, Mn, B, Nb, Mo y Si, forman compuestos mediante solución sólida o precipitación, dependiendo de su solubilidad en la aleación.<sup>104</sup> La figura 9 ilustra las posibles formaciones de nitruros, sulfuros, carburos y óxidos que cada elemento puede generar.

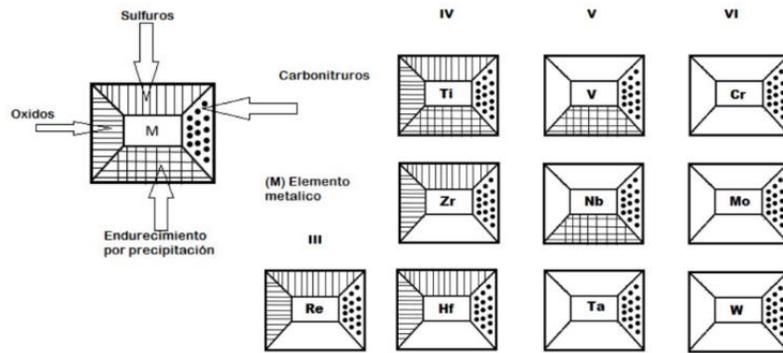


Fig. 9. Esquema representativo de los diferentes elementos y su capacidad para favorecer el endurecimiento por precipitación de un acero.<sup>97</sup>

La solubilidad de estos compuestos está definida por el producto de solubilidad  $K_s$ , que es la inversa del constante en equilibrio y normalmente es expresada con la ecuación 7.<sup>97-100</sup>

$K_s$  - Producto de solubilidad. (7)

$$\log K_s = \log_{10}[M][X] = A - \frac{B}{T}$$

Donde, es el producto de los elementos de microaleación [M] y el intersticial [X] que son carbono (C) o nitrógeno (N) en porcentaje en peso, A y B son constantes y T es la temperatura absoluta<sup>99</sup> En el siguiente apartado, se presentan las ecuaciones para el producto de solubilidad en austenita para los diferentes precipitados que se pueden formar. Las ecuaciones para el cálculo del producto de solubilidad de austenita para diferentes compuestos de interés en un acero microaleado son las siguientes:<sup>102-105</sup>

### Carburos

Carburo de Titanio TiC. (8)

$$\log Ti [C] = -\frac{7480}{T} + 3.21$$

Carburo de Niobio NbC. (9)

$$\log Nb [C] = -\frac{6770}{T} + 2.26$$

Carburo de Vanadio VC. (10)

$$\log V [C] = -\frac{9500}{T} + 6.72$$

### Nitruros

Nitruro de Titanio TiN. (11)

$$\log TiN = -15790T + 5.40$$

Nitruro de Niobio NbN. (12)

$$\log NbN = -10150T + 3.79$$

Nitruro de Vanadio VN. (13)

$$\log V [N] = -\frac{7700}{T} + 2.86$$

### Nitruros de niobio (NbN)

En la búsqueda de incrementar el endurecimiento en el material, la adición de elementos como el niobio pueden generar carburos o nitruros como se mostró en la figura 8. Ya que el niobio es un elemento que ha sido implementado como aditivo en la composición química en los aceros, ya que favorece el aumento significativo de la resistencia de los aceros, así como también se utiliza como estabilizador, junto con el

titanio para disminuir la cantidad de carbono libre en solución.<sup>106</sup> El  $K_s$  que presenta el NbN en austenita ( $\gamma$ ) es de  $1.17 \times 10^{-3}$  a  $1250^\circ\text{C}$ , significando esto que en comparación del TiN, estos presentan una mayor solubilidad para las mismas temperaturas en austenita.<sup>93</sup> Por otro lado, el  $K_s$  del NbN en ferrita ( $\alpha$ ) es de  $8.9 \times 10^{-9}$  a  $600^\circ\text{C}$  aproximadamente, así que la solubilidad en ferrita es menor que la obtenida en austenita, favoreciendo la precipitación del NbN en ferrita ( $\alpha$ ) propiciando el refinamiento del grano.<sup>105-107</sup>

### Carburos de niobio (NbC)

En el caso del carbonitruro de (NbC) presenta solubilidad en austenita en rangos de temperatura de entre  $900$  y  $1350^\circ\text{C}$ . Siendo que el en austenita para el NbC es de  $1.7 \times 10^{-2}$  a  $1250^\circ\text{C}$ . Para la solubilidad en ferrita es de  $1.6 \times 10^{-6}$  propiciando la precipitación de estos carburos a  $700^\circ\text{C}$ . por lo que a partir de los datos del producto de solubilidad dado el NbC es más soluble en austenita ( $\gamma$ ) que en ferrita ( $\alpha$ ).<sup>108</sup>

### Carbonitruros

Los carbonitruros, con tamaños entre  $1$  y  $2$  nm, contribuyen al endurecimiento por precipitación y se forman durante la transformación de austenita a ferrita. Su nucleación depende de la saturación de la aleación, que aumenta a bajas temperaturas debido a la energía de activación y difusión.<sup>109</sup> En particular, los carbonitruros de niobio son usados para fijar límites de grano de austenita, y cuando se dispersan finamente a bajas temperaturas, retrasan la recrystalización y refinan el grano. El niobio, ya sea en solución sólida o como Nb (C, N), incrementa la resistencia del acero. Estudios muestran que precipitados inducidos por deformación termomecánica, como Nb (C, N) de alrededor de  $20$  nm, tienen un efecto significativo en el endurecimiento por precipitación.<sup>110, 111</sup> En general, los precipitados formados a bajas temperaturas son más pequeños y mejoran la resistencia.<sup>112</sup> La figura 10 presenta la relación entre carbonitruros de Ti y Nb y el esfuerzo en función del porcentaje de elemento disuelto en la austenita.

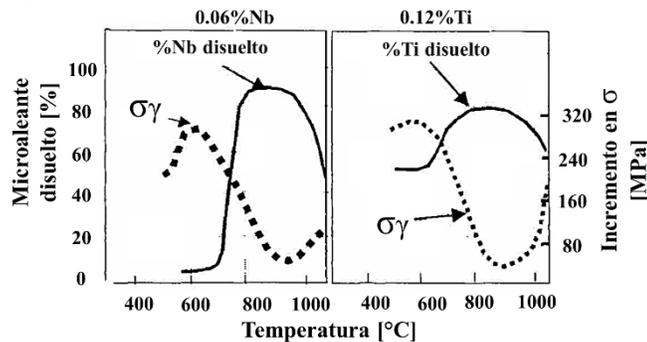


Fig. 10. Comportamiento de los carbonitruros de niobio y de titanio sobre las propiedades en un acero microaleado.<sup>99-103</sup>

En el caso del niobio se tiene comprobado el efecto en la microestructura del acero, en el refinamiento de granos de la microestructura final, a partir de la precipitación de carbonitruros a alta temperatura. En la figura 11 se muestra el comportamiento del Ti, Nb, V.

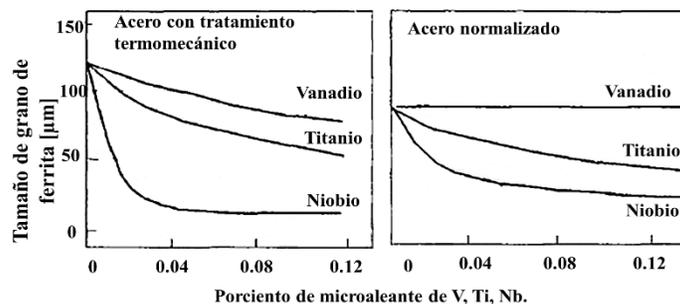


Fig. 11. Efecto de los precipitados de Ti, V, Nb en el refinamiento de grano en un acero microaleado.<sup>103</sup>

### Precipitación inducida durante el proceso de laminación en caliente

Durante el proceso de laminación en caliente, en función de las variables de proceso y la composición se promueve la precipitación, que es la formación de un compuesto a partir de la disolución, en donde la disolución es la mezcla que resulta de un sólido en el líquido que, finalmente el precipitado es el sólido insoluble que se forma por una reacción en disolución, que es la reacción que ocurre en una solución líquida y al que se le llama precipitado y que beneficia las propiedades finales del acero.<sup>108, 109</sup> El endurecimiento del acero se puede obtener a partir de elementos que se encuentren en solución o formen partículas de segunda fase. Por solución sólida se puede obtener a partir de aleaciones con carbono (C), manganeso (Mn), silicio (Si) y boro (B). Las partículas de segunda fase son partículas que se añaden como tipo impurezas en el acero, elementos como el titanio (Ti), vanadio (V), niobio (Nb), y aluminio (Al), que pueden presentarse en precipitados del tipo carburos, nitruros o carbonitruros. Durante el proceso termomecánico estos compuestos pueden presentarse en la zona austenítica, durante la transición de la austenita a la ferrita o directamente en la fase ferrítica, lo que dependerá de los productos de solubilidad, el tamaño de radio de cada elemento, el tiempo y la cantidad de cada elemento en aleación,<sup>110, 113</sup> propiciando mecanismos de endurecimiento y ablandamiento, que por efecto de la temperatura, la deformación y la velocidad de deformación, compiten entre sí. En el caso del mecanismo de endurecimiento se busca que se presente antes del mecanismo de ablandamiento para favorecer la resistencia y la tenacidad a partir de la inhibición o retraso de la recrystalización. Donde primeramente se va a tener la precipitación en las zonas de alta energía, límites de grano austenítico, y posteriormente migraran hacia la zona de la matriz, de acuerdo con la cinética de precipitación característica de la aleación.<sup>114</sup>

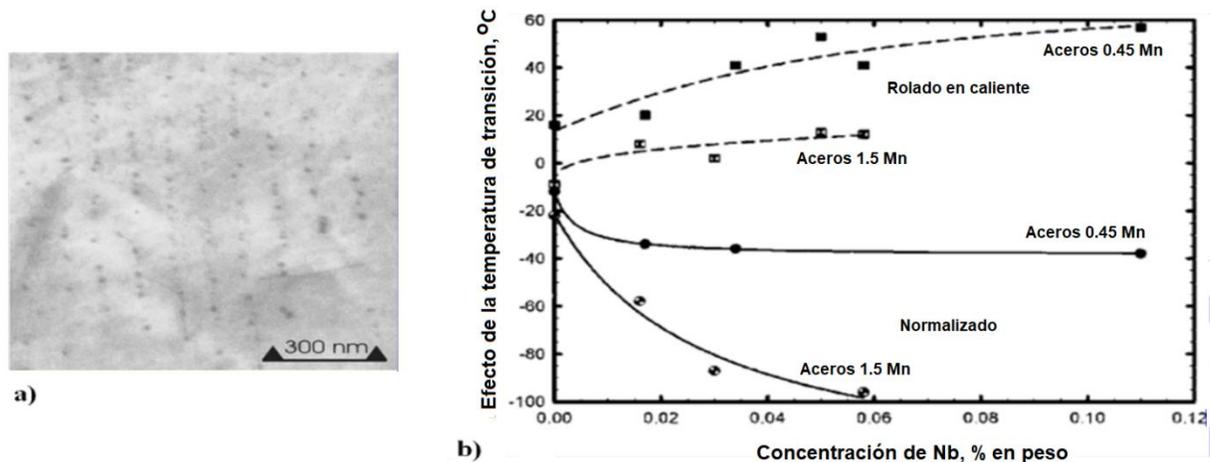


Fig.12. a) Precipitados en forma de filas en una solución de niobio tratado. b) Efecto del niobio en la temperatura de transición de 20 J de aceros de laboratorio normalizados y laminados en caliente M (Modificado).<sup>114</sup>

Se ha reportado el efecto que se genera a partir de la precipitación de carbonitruros de niobio en la matriz del acero,<sup>113, 114</sup> durante un proceso de deformación en caliente, los cuales generan una interfaz con respecto a la matriz, como la mostrada en la figura 12, que impacta directamente en las temperaturas críticas de transformación y el fortalecimiento de la matriz por el efecto que genera en el refinamiento de grano de aceros microaleados. Otros investigadores como Okamoto R., Borgenstam A., y Agren J.,<sup>115</sup> reportaron que la interfaz de tipo no planar de carbonitruros de niobio generan un acomodo preferencial para favorecer la resistencia y la tenacidad del acero, como las mostradas en la figura 13. Que finalmente para promover la formación de fases de tipo particionadas, que son la combinación de bainita y martensita por efectos del enfriamiento acelerado, donde los precipitados se van a encontrar alojados en las lajas de martensita por la migración que se presenta a partir de la transformación característica de la martensita desde los límites de grano, mostrada en la figura 14.

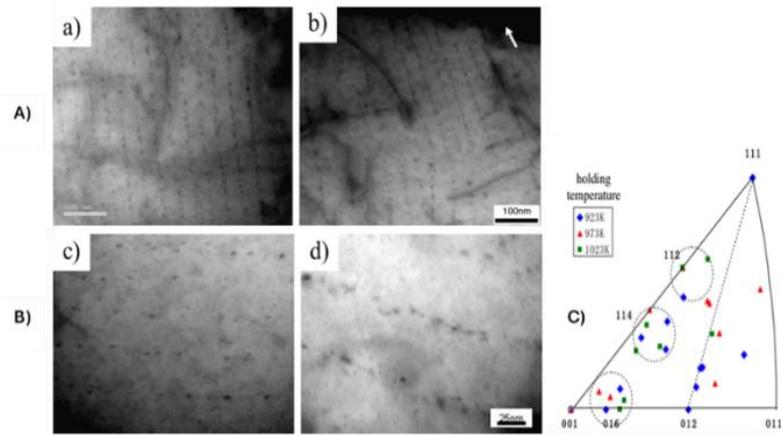


Fig. 13. Imágenes de campo claro en STEM de los carbonitruros de niobio (NbC) y la interfase; A) a) tipo planar a 923 K por 10 s, (b) no planar a 1023K por 10s. La flecha indica el límite de grano. B).

Imagen de alta magnificación STEM de campo claro de la precipitación interfase (a) A 923k por 10s, (b) A 1023K por 10s. C) Las direcciones de la normal de las placas de precipitados en ferrita trazadas en la figura del polo inverso.<sup>115</sup> (M) Modificado.

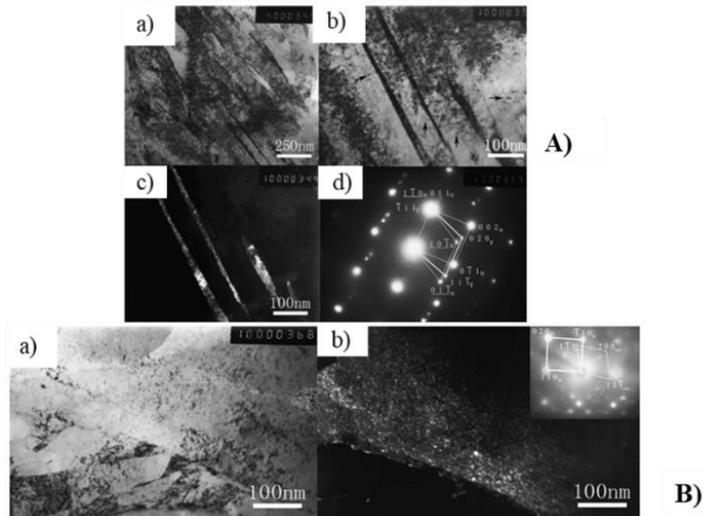


Fig. 14. A) Muestra templada y particionada a 40s: (a) Imagen de campo claro, (b) campo claro de la figura (a), mostrando la austenita retenida entrelazada. (c) Imagen central de campo oscuro de la austenita retenida,  $g = (020)$ , y (d) Patrón de difracción de área selecta de (b). B) Carburos de niobio precipitados en la matriz martensítica de la muestra templada- particionada por 40s: (a) Campo claro, (b) Campo oscuro con el patrón de difracción de área selecta insertado.<sup>116</sup> M (Modificado).

La precipitación inducida por deformación en aceros microaleados, como los carbonitruros de niobio y vanadio (V-Nb C, N) y nitruros de aluminio (AlN), ocurre bajo condiciones específicas de deformación, velocidad de deformación y temperatura, que favorecen la solubilidad y la energía de activación en el acero.<sup>116, 117-119</sup> Este proceso, conocido como precipitación dinámica, se genera rápidamente debido a la energía liberada por la deformación y el ajuste de la matriz. En aceros API y HSLA, durante la deformación en la zona austenítica, los precipitados tienden a formarse en los límites de grano, creando zonas libres de precipitados adyacentes. Esto puede inducir la formación de ferrita por deformación a temperaturas por encima de  $A_{r3}$ , lo cual no es deseable para obtener alta resistencia, ya que provoca microcavidades y descohesión en la interfaz entre precipitados y matriz, afectando la integridad del material.<sup>120-122</sup> Este

fenómeno se manifiesta como capas delgadas de ferrita (entre 5 y 20  $\mu\text{m}$ ) en los límites de grano. La figura 15 ilustra ejemplos de la precipitación localizada y zonas en las que se promueve la formación de la ferrita alotriomórfica que provocan la coalescencia intergranular y la formación de microcavidades, lo que finalmente puede causar la pérdida de cohesión de la microestructura debido a la concentración de esfuerzos en los límites de grano.<sup>123, 124</sup>

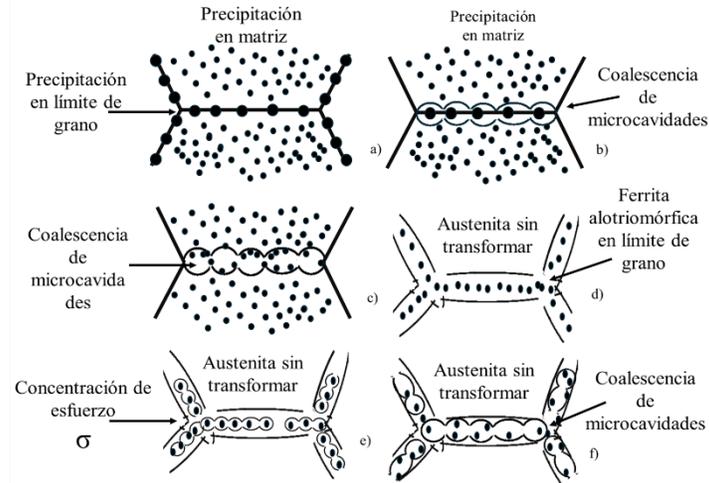


Fig. 15. Esquema representativo de diferentes condiciones en las que se presenta la precipitación en límite de grano y en la matriz en zona austenítica en un acero microaleado.<sup>116-124</sup>

En el inciso a) se muestra el inicio de la precipitación en los límites de grano, donde, debido a la cinética de precipitación, estos precipitados crecen y comienzan a formar microcavidades (inciso b). El inciso c) ilustra la formación de pequeñas agrupaciones en el límite de grano que generan cavidades. En el inciso d) se observa la precipitación junto con la nucleación de ferrita inducida por deformación en zonas libres de precipitados. Esta precipitación en los límites de grano puede causar cavidades en la ferrita y llevar a la pérdida de cohesión de la microestructura debido a la concentración de esfuerzos, como se muestra en los incisos e) y f).

### Cinética de precipitación: tiempo temperatura y precipitación (PTT)

En los aceros microaleados, la precipitación puede ocurrir tanto en solución sólida como inducida por deformación, lo que es clave para mantener sus propiedades mecánicas. Elementos como titanio (Ti), niobio (Nb) y vanadio (V) son típicos en estos procesos, destacando que el vanadio precipita preferentemente en fase ferrítica. Durante la laminación en caliente, la interacción entre la recrystalización y la precipitación afecta la microestructura, retrasando o inhibiendo la recrystalización debido a la temperatura y la deformación.<sup>55-57</sup> Para entender este fenómeno, se utilizan las curvas PTT (Precipitation, Time, Temperature), que representan la cinética de precipitación con una forma característica en “C”. Estas curvas reflejan cómo la energía de activación y la difusión atómica controlan la formación de la segunda fase.<sup>55, 115</sup> La composición química del acero influye en la cinética de precipitación, ya que más elementos de aleación pueden alterar la saturación, la difusividad y la actividad química durante el procesamiento en caliente.<sup>125, 126</sup> En general, a temperaturas altas, cerca del punto de fusión de los elementos, la precipitación es baja debido a la disolución de precipitados. Al bajar la temperatura, aumenta la fuerza motriz por sobresaturación química, favoreciendo la precipitación, pero si la temperatura desciende demasiado, la difusión se vuelve limitada y la precipitación se ralentiza o detiene, a pesar de la sobresaturación.<sup>127</sup> En la Figura 16 se muestra el ejemplo de curvas PTT de un acero HSLA. La forma tipo “C” de las curvas PTT depende de los elementos aleantes y de la temperatura, que condiciona la nucleación y el crecimiento de precipitados complejos.<sup>128</sup> Para estudiar la cinética de precipitación en aceros durante procesos termomecánicos, algunos autores proponen ensayos de compresión uniaxial.<sup>129-131</sup> Estos permiten simular condiciones de laminación en caliente y observar con mayor claridad el inicio y el fin de la precipitación,

algo difícil de identificar en pruebas termomecánicas convencionales debido a la deformación simultánea.<sup>132</sup> En estas pruebas, se analiza la curva de ablandamiento, la cual refleja la evolución de la recristalización bajo ciertas condiciones de deformación, velocidad y temperatura.<sup>54, 56, 130</sup>

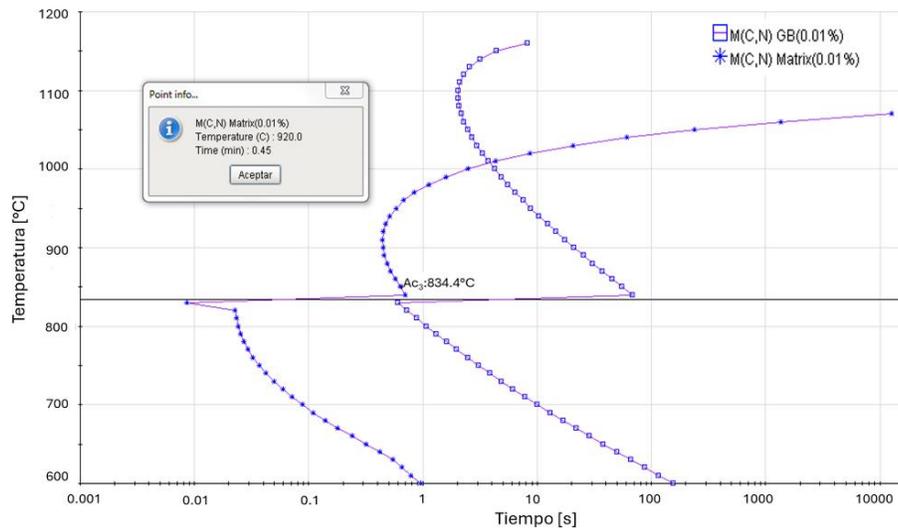


Fig. 16. Ejemplo de la curva representativa de un acero para estudio de la cinética de precipitación (curvas PTT) obtenidas con el simulador JMatPro V14.<sup>130</sup>

Cuando se aplica compresión a una probeta cilíndrica y luego se permite una etapa de relajación, se puede detectar la precipitación observando una meseta en la curva. Esta meseta, mostrada en la figura 17 indica el inicio ( $P_s$ ) y el fin ( $P_f$ ) de la precipitación, evidenciado por una pérdida de linealidad en la pendiente de la curva de ablandamiento.<sup>123, 132</sup>

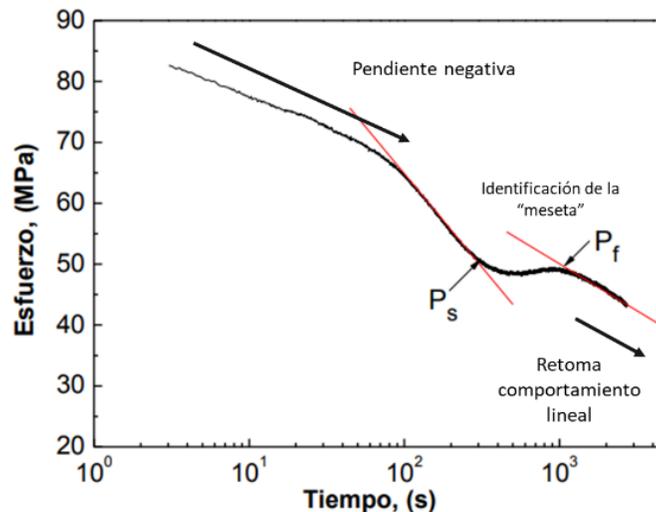


Fig. 17. Esquema representativo del análisis de la curva de relajación obtenida por la prueba de compresión en caliente.<sup>56, 61</sup>

La construcción de las curvas de cinética de precipitación, con forma característica de tipo “C”, depende de diversos factores como la concentración del elemento a precipitar, la presencia de elementos que alteran la difusividad (por ejemplo, el Mn que retrasa la precipitación de Nb (C, N)) y el bajo contenido de carbono y nitrógeno en la aleación, lo que retrasa la precipitación dinámica. Durante el trabajo en caliente, ocurren

simultáneamente fenómenos de ablandamiento y endurecimiento; la deformación genera dislocaciones que saturan el material, favoreciendo la formación de nuevos granos y estructuras. Por ello, para comprender la cinética de precipitación en aceros microaleados, es fundamental analizar la interacción entre estos mecanismos de ablandamiento y endurecimiento.

### Interacción entre la recrystalización y la precipitación durante el proceso termomecánico (RPTT)

Para evaluar la precipitación durante el proceso termomecánico, es esencial considerar que puede ocurrir en la fase austenítica, durante su transformación a ferrita o directamente en la fase ferrítica, ya sea por solución sólida a alta temperatura o inducida por deformación. Esta precipitación ayuda a controlar el crecimiento del grano al anclarse en sus límites, generando compuestos de entre 20 y 50 nm, dependiendo de la temperatura y solubilidad de los elementos.<sup>95, 124, 125</sup> El niobio (Nb) es especialmente relevante, ya que retrasa la recrystalización durante el trabajo en caliente.<sup>126</sup> El endurecimiento del material se relaciona con el tamaño, la distribución y la fracción volumétrica de los precipitados, alcanzando su máximo con carburos de 3–5 nm coherentes con la matriz.<sup>72, 133, 134</sup> Además, durante la deformación, se pueden formar precipitados tan pequeños como de 5 nm, y el refinamiento del grano se ve favorecido por la precipitación que actúa como barrera. Todo esto implica interacciones complejas entre precipitación, restauración, recrystalización, orientación cristalina y dislocaciones durante el trabajo en caliente, como se presenta en la figura 18 en el que se puede observar el retraso de la recrystalización por efecto de la precipitación inducida por deformación.<sup>135, 136</sup>

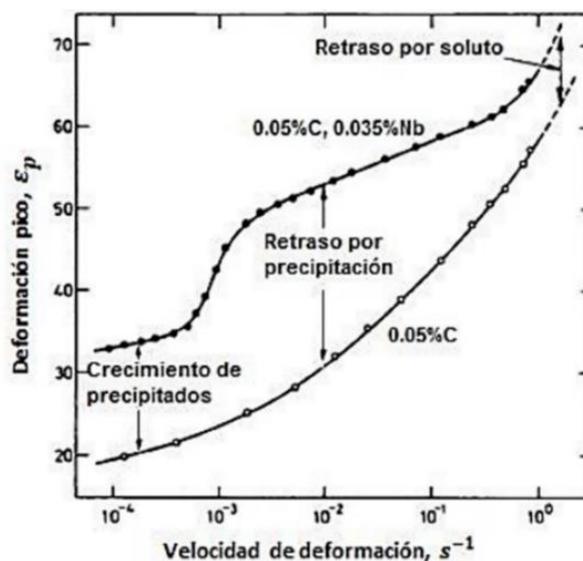


Fig. 18. Influencia de los elementos microaleantes en solución sólida en el retraso de la recrystalización dinámica.<sup>133</sup>

La interacción dinámica entre recrystalización y precipitación durante la deformación en caliente es clave para entender la cinética de endurecimiento y ablandamiento del acero.<sup>137</sup> Existen varias rutas de procesamiento en el rolado en caliente que afectan la microestructura según las necesidades del material, como se presenta en la figura 19:<sup>138, 139</sup> (i) el proceso termomecánico controlado, que regula la recrystalización y ablandamiento, especialmente para aceros bainíticos y martensíticos; (ii) el proceso de laminación convencional controlado, aplicado a aceros ferríticos y ferrítico-perlíticos, que limita el crecimiento del grano austenítico y favorece la formación de microestructura fina mediante bandas de deformación; (iii) la laminación en dos fases, una modificación del proceso convencional; (iv) la laminación controlada por recrystalización dinámica; y (v) el proceso convencional seguido de enfriamiento acelerado. Cada uno de estos procesos influye en la microestructura final del acero y su rendimiento.

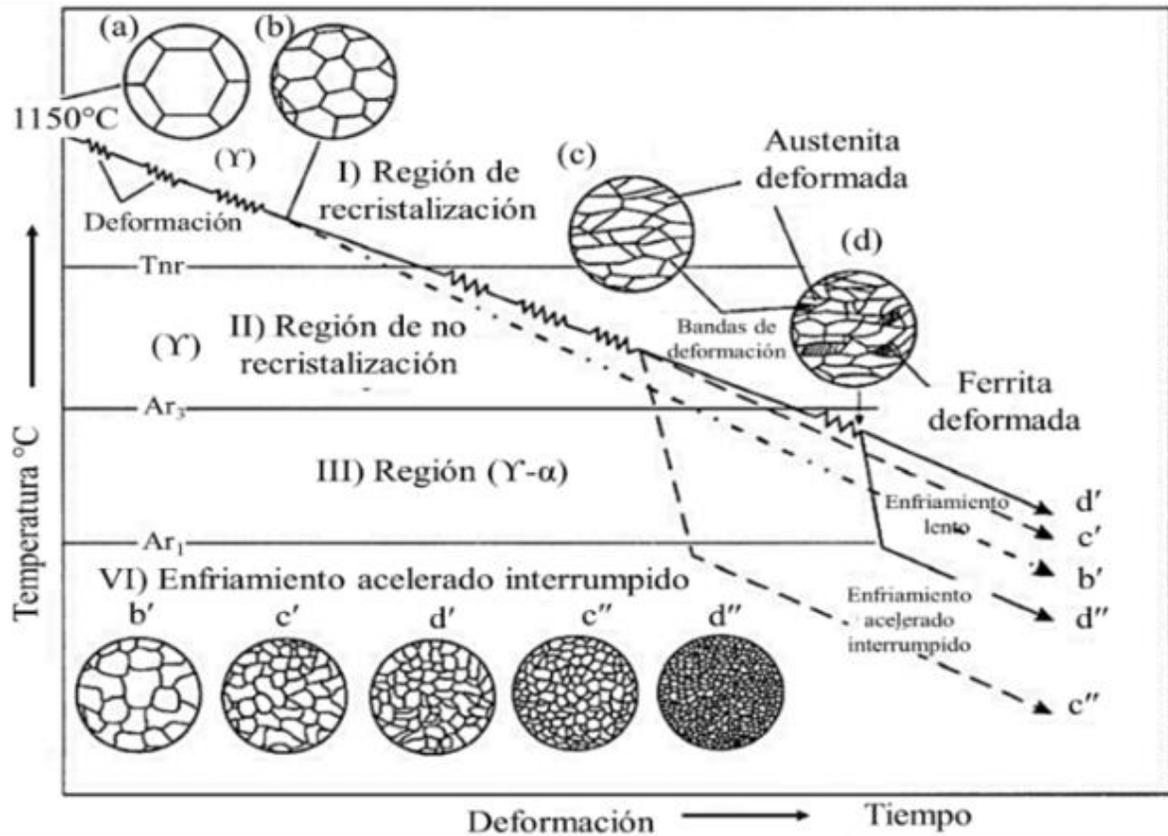


Fig. 19. Efecto del control del proceso de laminación en caliente en la microestructura de un acero microaleado con bajo contenido de carbono.<sup>99, 140</sup>

### Mecanismo de precipitación en un acero microaleado de alta resistencia

El retraso de la recristalización debido a la precipitación se estudia a partir de la fracción volumétrica, la interfaz y la identificación de precipitados que actúan como anclaje en los límites de grano austenítico durante el proceso termomecánico. Zener<sup>144</sup> fue el primero en proponer que las partículas en los límites de grano reducen la energía efectiva de estos límites, dificultando su movimiento y retardando la recristalización.<sup>145</sup> Sin embargo, modelos iniciales no lograban predecir completamente este comportamiento hasta que técnicas de microscopía de alta resolución demostraron que una alta fracción de precipitados nanométricos, con espacios reducidos entre ellos, genera una fuerte fijación de los límites de grano. Estas observaciones llevaron a nuevas hipótesis y modelos que consideran distribuciones no uniformes de partículas, abriendo la puerta a una mejor comprensión del efecto de la precipitación en la microestructura de aceros microaleados.<sup>141-143</sup>

### Mecanismo de precipitación en austenita con distribución uniforme

Para que se lleve a cabo el retraso o inhibición de la recristalización en los aceros microaleados es necesario que se tenga una fuerza de anclaje considerable para poder evitar el crecimiento de los granos de austenita, y promover estructuras de grano fino. El caso del modelo de precipitación uniforme se representa en el esquema de la figura 20, en donde se tiene un límite de subgrano de austenita a temperatura por debajo en el que inicia la precipitación. En donde inicialmente se tiene en solución los elementos formadores de precipitados, que para este caso es el carbono (C), nitrógeno (N), y niobio (Nb), que son característicos de precipitados de tipo carbonitruro.<sup>56, 62, 119, 139, 143</sup> Que, a baja temperatura, y después de un tiempo durante la

deformación en caliente, la precipitación de estos compuestos puede ocurrir. En donde sí se considera que existe una distribución uniforme, la fracción de volumen de precipitados en la subestructura del límite de grano de austenita, podría ser igual a la fracción de volumen en toda la matriz del acero. Considerando que la precipitación en el límite de grano sería la ubicación más efectiva en el retraso de la recrystalización. La ecuación 14 representa el modelo de precipitación con distribución uniforme en un acero microaleado, en el que la fracción de volumen en la matriz es igual a la fracción de volumen precipitada en el límite de subgrano.<sup>144</sup>

Fracción de volumen de precipitación en austenita con distribución uniforme.<sup>145-146</sup>

$$f_v \overset{\text{Nb (C, N)}}{\text{en el LSG}} = f_v \overset{\text{Nb (C, N)}}{\text{en la matriz}} \quad (14)$$

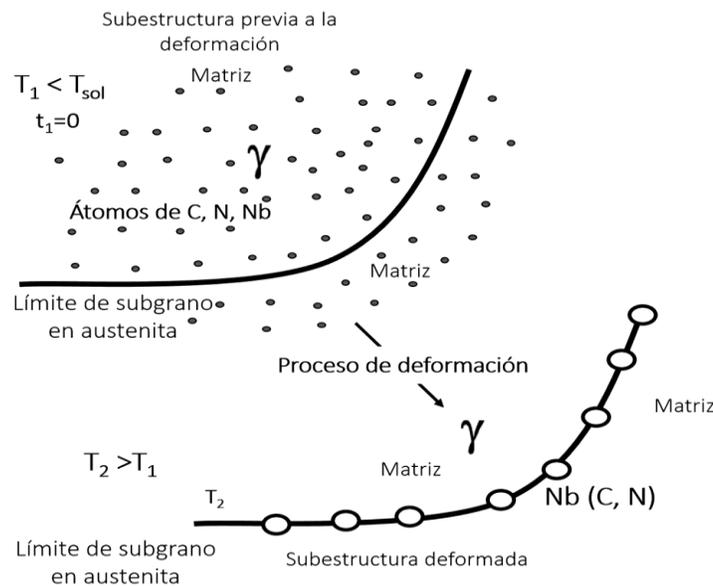


Fig. 20. Mecanismo de precipitación con distribución uniforme en austenita en la microestructura de un acero microaleado Nb.<sup>146</sup>

### Mecanismo de precipitación en austenita con distribución localizada

De las hipótesis generadas del mecanismo de precipitación con distribución uniforme, diferentes investigadores presentaron en sus trabajos de estudio de la precipitación del carbonitruro de niobio Nb (C, N) que la precipitación no se presenta de forma uniforme, sino que la precipitación aparece una zona localizada, que es la zona de la subestructura deformada de la austenita. En donde se tenía un mayor volumen de partículas precipitadas en lo que parecía ser el límite del grano austenítico previo a la deformación, en las bandas de deformación, que en general es toda la subestructura del acero durante el proceso termomecánico.<sup>138-143</sup> Donde el mecanismo de precipitación con distribución localizada está representado por la ecuación 15, en donde la fracción volumétrica de partículas precipitadas en el límite de grano es igual a la sumatoria de la fracción de los átomos de solutos segregados y la fracción de volumen de partículas precipitadas y se encuentra representado en la figura 21.<sup>144</sup>

Fracción volumétrica de precipitación en austenita con distribución localizada.<sup>145</sup>

$$f_v \overset{\text{Nb (C, N)}}{\text{en el LSG}} = f_v \overset{\text{Nb (C, N)}}{\text{en la matriz}} + f_v \overset{\text{Nb (C, N)}}{\text{segregada}} \quad (15)$$

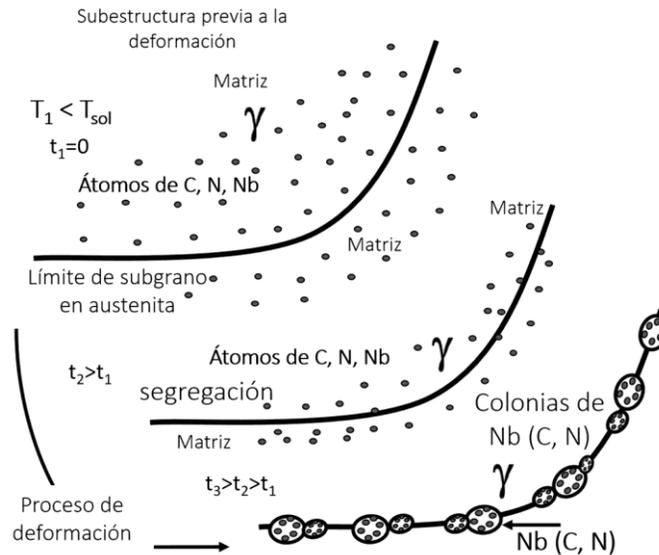


Fig.21. Mecanismo de precipitación con distribución localizada en austenita en la microestructura de un acero microaleados Nb.<sup>145</sup>

## COMENTARIO FINAL

Este estudio muestra la estrecha relación que existe entre la composición química de los aceros HSLA y microaleados y el tratamiento termomecánico. La presencia de elementos tales como Nb, Ti y V favorece la precipitación de partículas finas y la recrystalización dinámica, lo que refina el tamaño de grano con su consecuente efecto sobre la resistencia y tenacidad del material. Se presentaron los mecanismos que explican la formación de la microestructura tomando en cuenta la temperatura, la composición química y el trabajo mecánico. El desarrollo de aceros API, como los grados 5XL PSL2L para el transporte de hidrocarburos, es evidencia de la valoración y aplicación de estos principios en la industria. Sin embargo, a pesar del éxito de estas aleaciones, queda pendiente determinar cuantitativamente la interacción entre los diferentes fenómenos de forma que se puedan diseñar el proceso termomecánico que corresponda a cada composición química, es decir calcular de forma teórica las combinaciones composición – tratamiento que proporcionen las propiedades que las aplicaciones, como es el caso de transporte de hidrocarburos, requieran.

## REFERENCIAS

1. Baker, T. N. (2016). Microalloyed steels. *Ironmaking & Steelmaking*, 43(4), 264-307. <https://doi.org/10.1179/1743281215Y.0000000006>.
2. Villalobos, J. C., Del-Pozo, A., Campillo, B., Mayen, J., & Serna, S. (2018). Microalloyed steels through history until 2018: Review of chemical composition, processing and hydrogen service. *Metals*, 8(5), 351. <https://doi.org/10.3390/met8050351>.
3. Mohammadjoo, M., Collins, L., Henein, H., & Ivey, D. G. (2018). Canadian HSLA steel pipelines: History and technology developments. ERA. <https://doi.org/10.7939/r3-wvqv-qg18>.
4. Xu, Z.-W., Liu, X.-M., & Zhang, K. (2019). Mechanical properties prediction for hot rolled alloy steel using convolutional neural network. *IEEE Access*, 7, 1-10. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2909586>.
5. Šimeček, P., & Hajduk, D. (2006). Prediction of mechanical properties of hot rolled steel products. ITA Ltd.
6. Keeler, S. (2017). Advance high-strength steels application guidelines (Versión 6.0). WorldAutoSteel, World Steels Association.

7. American Petroleum Institute (API). (2004). API Specification 5L: Specification for line pipe (43<sup>a</sup> ed.). API Publishing Services. Available online: API 5L: Specification for Line Pipe.
8. American Petroleum Institute (API). (2012). API Specification 5L: Specification for line pipe (45<sup>a</sup> ed.). API Publishing Services.
9. American Petroleum Institute (API). (2018). API Specification 5L: Specification for line pipe (46<sup>a</sup> ed.). API Publishing Services.
10. Octal Steel. (2024). API 5L Pipe Specification (46th Edition Updated on 2024). Recuperado de <https://www.octalsteel.com/api-5l-pipe-specification>.
11. Padrón Domínguez, O. (2017). Efecto del desplazamiento del electrodo en soldadura circunferencial por arco sumergido en tubería de acero API-5L-X70.
12. Altos Hornos de México (AHMSA). (2019). Manual de especificaciones y garantías AHMSA (MEGA 04, 1<sup>a</sup> ed.).
13. Bhattacharya, D. (2014). Microalloyed steels for the automotive industry. *Tecnol. Metal. Mater. Miner.*, 11(4), 371-383.
14. Schmitt, J.-H., & Jung, T. (2018). New developments of advanced high-strength steels for automotive applications. *Comptes Rendus Physique*, 19(6), 414-430. <https://doi.org/10.1016/j.crhy.2018.11.004>.
15. Matlock, D. K., & Speer, J. G. (s.f.). Processing opportunities for new advanced high-strength sheet steels. Colorado School of Mines.
16. Branco, R., & Berto, F. (2021). High-strength low-alloy steels. *Metals*, 11(1000). <https://doi.org/10.3390/met1107100>.
17. Materials Science and Technology. (2009). On the strength of microalloyed steels - An interpretive review. *Materials Science and Technology*. <https://doi.org/10.1179/174328409X455233>.
18. Billur, E., & Altan, T. (s.f.). Challenges in forming advanced high-strength steels. Engineering Research Center for Net Shape Manufacturing (ERC/NSM).
19. Téllez López, D. M. R. (s.f.). Caracterización de aceros avanzados y estudio de su resistencia mecánica y conformabilidad.
20. American Institute of Steel Construction (AISC). (2016). Especificación para construcciones de acero (ANSI/AISC 360-16).
21. Uranga, P. (2019). Advances in microalloyed steels. *Metals*, 9(279). <https://doi.org/10.3390/met9030279>.
22. Procesos. (2020). Effect of the chemical composition on the structural state and mechanical properties of complex microalloyed steels of the ferritic class. *Processes*, 8(646). <https://doi.org/10.3390/pr8060646>.
23. Ashby, M., Shercliff, H., & Cebon, D. (2007). *Materials engineering, science, processing and design*. Elsevier.
24. Guo, C., Chi, H., Zhou, J., Gu, J., Ma, D., & Dong, L. (2025). Evolution of microstructure and mechanical properties of ultra-high-strength heat-resistant bearing steel during long-term aging at 500°C. *Materials*, 18(639). <https://doi.org/10.3390/ma18030639>.
25. Uranga, P., & Rodríguez-Ibabe, J. M. (2020). Thermomechanical processing of steels. *Metals*, 10(641). <https://doi.org/10.3390/met1005064>.
26. Felker, C. A., Speer, J. G., De Moor, E., & Findley, K. O. (2020). Hot strip mill processing simulations on a Ti-Mo microalloyed steel using hot torsion testing. *Metals*, 10(334). <https://doi.org/10.3390/met10030334>.
27. Poliak, E. I., Pottore, N. S., Skolly, R. M., Umlauf, W. P., & Brannbacka, J. C. (2009). Thermomechanical processing of advanced high-strength steels in production hot strip rolling. *La Metallurgia Italiana*.
28. Marmulev, A. V., Kaputkina, L. M., Herman, G., & Poliak, E. I. (2014). Effects of thermomechanical processing on uniformity of microstructure and properties of AHSS. *Materials Science Forum*, 783-786, 967-972. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.783-786.967>.
29. Błoniarz, R., Majta, J., Rutkowski, B., Korpała, G., Prahł, U., Janiszewski, J., & Lisiecka-Graca, P. (2021). How the thermomechanical processing can modify the high strain rate mechanical response of a microalloyed steel. *Materials*, 14(6062). <https://doi.org/10.3390/ma14206062>.
30. Auto/Steel Partnership Joining Project. (2020). Advanced high-strength steel (AHSS) weld performance study for autobody structural components.

31. Sulzbach, G. A. S., Rodrigues, M. V. G., Rodrigues, S. F., Lima, M. N. S., Loureiro, R. C. P., Sá, D. F. S., & Abreu, H. F. G. (2022). Optimization of thermomechanical processing under double-pass hot compression tests of a high Nb and N-bearing austenitic stainless-steel biomaterial using artificial neural networks. *Metals*, 12(1783). <https://doi.org/10.3390/met12111783>.
32. Hanoglu, U., & Šarler, B. (2019). Hot rolling simulation system for steel based on advanced meshless solution. *Metals*, 9(788).
33. Lu, Z., Zhou, D., Yu, D., & Xiao, H. (2024). Research on dynamic modelling, characteristics and vibration reduction application of hot rolling mills considering the rolling process. *Machines*, 12(629). <https://doi.org/10.3390/machines12090629>.
34. Montemayor de la Garza, K. (2022). Diseño de pases de laminación en caliente para la producción de postes a partir del reciclado de riel de ferrocarril de acero 1075 (Tesis de licenciatura). Universidad Autónoma de Nuevo León.
35. Markulik, S., Nagyova, A., Turisova, R., & Villinsky, T. (2021). Improving quality in the process of hot rolling of steel sheets. *Applied Sciences*, 11(5451). <https://doi.org/10.3390/app11125451>.
36. Endo, S., & Nakata, N. (2015). Development of thermo-mechanical control process (TMCP) and high-performance steel in JFE Steel. JFE Technical Report, 20.
37. de Oliveira Abreu, L. G., de Faria, G. L., de Faria, R. J., Matsubara, D. B., & Porcaro, R. R. (2024). Optimizing rolling strategies for API 5L X80 steel heavy plates produced by thermomechanical processing in a reversible single-stand mill. *Metals*, 14(746). <https://doi.org/10.3390/met14070746>.
38. Zúñiga Pineda, L. F. (s.f.). (2020), Efecto del proceso termomecánico en la microestructura de un acero de fase compleja (CP), Universidad Autónoma de Nuevo León.
39. Illescas Fernández, S. (2007). Estudio del efecto de los elementos microaleantes en un acero HSLA (Tesis de maestría), Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona - Enginyeria de Materials.
40. Hou, Y., & Kadoi, K. (2024). Effect of Ti, Al, and Mg addition on microstructure evolution in weld metal of stainless steel solidified with F and FA modes and the tensile property. *Materials Science and Engineering A*. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2024.147190>.
41. Villalobos, J. C., Del-Pozo, A., Campillo, B., Jan Mayen, & Serna, S. (2018). Microalloyed steels through history until 2018: Review of chemical composition, processing and hydrogen service. *Metals*, 8(5), 351. <https://doi.org/10.3390/met8050351>.
42. Zaitsev, A., Arutyunyan, N., & Koldaev, A. (2023). Hot ductility, homogeneity of the composition, structure, and properties of high strength microalloyed steels: A critical review. *Metals*, 13(6), 1066. <https://doi.org/10.3390/met13061066>.
43. García Jacobo, R. (2019). Efecto de la potencia láser del proceso HLAW en uniones de aceros HSLA 550 sobre la microestructura y propiedades mecánicas. Corporación Mexicana de Investigación en Materiales.
44. Callister, W. D., Jr. (s.f.). *Introducción a la ciencia e ingeniería de los materiales* (Vol. 1, Edición e-book). ISBN: 978-84-291-9560-6.
45. Zhang, Y., & Ma, Y. (2025). Research progress on titanium–niobium micro-alloyed high-strength steel. *Materials*, 18(2), 325. <https://doi.org/10.3390/ma18020325>.
46. Kong, D., Zhou, J., Dong, W., Cai, L., & Qu, C. (2024). Effect of initial intergranular ferrite size on induction hardening microstructure of microalloyed steel 38MnVS6. *Crystals*, 14(9), 827. <https://doi.org/10.3390/cryst14090827>.
47. Chatterjee, D. (2017). Behind the development of advanced high strength steel (AHSS) including stainless steel for automotive and structural applications - An overview. *Materials Science and Metallurgy Engineering*, 4(1), 1-15. <https://doi.org/10.12691/msme-4-1-1>.
48. Prazmowski, M., Paul, H., Rozumek, D., & Marcisz, E. (2014). Influence of the microstructure near the interface on the fatigue life of explosively welded carbon steel/Zr clads. *Key Engineering Materials*, 592–593, 704–707.
49. Blazéj T. Skoczén (PhD, DSc), (2004), CERN, European Organization for Nuclear Research, Department of Accelerator Technologies, CH-1211 Geneva 23, Switzerland and Cracow University of Technology, Institute of Applied Mechanics, Al. Jana Pawla II 37, PL-31-864 Kraków, Poland. ISBN 978-642-06066-3, <http://doi10.1007/978-3-662-06305-7>.

50. Skoblik, R., Rydz, D., & Stradomski, G. (2010). Analysis of asymmetrical rolling process of multilayer plates. In *Solid State Phenomena* (Vol. 165, pp. 348–352). Trans Tech Publications Ltd.
51. Stradomski, G., Rydz, D., Garstka, T., Pałega, M., Dyl, T., Szarek, A., Szarek, J. Ł., & Dembiczak, T. (2022). Influence of asymmetric rolling process on the microstructure properties of bimetallic sheet metals. *Materials*, 15(6), 2013. <https://doi.org/10.3390/ma15062013>.
52. Alaneme, K. K., & Okotete, E. A. (2019). Recrystallization mechanisms and microstructure development in emerging metallic materials: A review. *Journal of Science: Advanced Materials and Devices*.
53. Sakai, T., Belyakov, A., Kaibyshev, R., Miura, H., & Jonas, J. J. (2013). Dynamic and post-dynamic recrystallization under hot, cold and severe plastic deformation conditions. *Progress in Materials Science*. <https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2013.09.002>.
54. Tang, S., Li, X., Li, J., Liu, Z., & Wang, G. (2022). Role of microalloying elements on recrystallization kinetics of cold-rolled high strength low alloy steels. *Metals*, 12(10), 1741. <https://doi.org/10.3390/met12101741>.
55. Akbari, Z., Mirzadeh, H., & Cabrera, J.-M. (2014). A simple constitutive model for predicting flow stress of medium carbon microalloyed steel during hot deformation. *Materials and Design*. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2015.04.005>.
56. Cabrera, J. M., Al Omar, A., & Prack, J. M. (s.f.). (1997), Simulación de la fluencia en caliente de un acero microaleado con un contenido medio de carbono - II parte. Recristalización dinámica: inicio y cinética. Consejo Superior de Investigaciones Científicas.
57. Alcelay, I., Peña, E., & Al Omar, A. (s.f.), (2016), Estudio del comportamiento termo-mecánico de un acero microaleado de medio carbono durante un proceso de conformado en caliente usando una red neuronal artificial. Departamento de Ingeniería Mecánica, EPSEM, Universidad Politécnica de Cataluña.
58. Kostryzhev, A., Killmore, C., & Pereloma, E. (2021). Effect of processing parameters on interphase precipitation and mechanical properties in novel Cr, V, Nb microalloyed steel. *Metals*, 11(107). <https://doi.org/10.3390/met11010107>.
59. Dutta, B., & Palmiere, E. J. (2003). Effect of prestrain and deformation temperature on the recrystallization behavior of steels microalloyed with niobium. *Metallurgical and Materials Transactions A*.
60. Al Omar, A. (1996). Caracterización dinámica de dos aceros microaleados de medio carbono mediante ensayos de compresión a alta temperatura. Aplicación de mapas de procesado. Tesis doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya.
61. Altamirano Guerrero, G. (2014). Estudio de la deformación plástica en caliente de aceros avanzados de ultra-alta resistencia (AUHSS) microaleados con boro. Tesis doctoral, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.
62. Cabrera Marrero, J. M. (1995). Caracterización mecánico-metalúrgica de la conformación en caliente del acero microaleado de medio carbono 38MnSiV5S5. Tesis doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya.
63. Zhang, Z.-H., Liu, Y.-N., Liang, X.-K., & She, Y. (2008). The effect of Nb on recrystallization behavior of a Nb micro-alloyed steel. *Materials Science and Engineering A*, 474, 254–260. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2007.04.062>.
64. Perrard, F., & Scott, C. (2007). Vanadium precipitation during intercritical annealing in cold rolled TRIP steels. Automotive Research Center, Arcelor Research S.A.
65. Mondy, P. R., Sarma, V. S., & Sankaran, S. (2011). Development of ultra-fine grained dual phase microalloyed steels through severe cold rolling and intercritical annealing. *Indian Institute of Technology Madras*, 64, 89-92.
66. Papa Rao, M., Subramanya Sarma, V., & Sankaran, S. (2016). Microstructure and mechanical properties of V-Nb microalloyed ultrafine-grained dual-phase steels processed through severe cold rolling and intercritical annealing. *Metallurgical and Materials Transactions A*.
67. Akhtar, M. N., Khan, M., Khan, S. A., Afzal, A., Subbiah, R., Ahmad, S. N., Husain, M., Butt, M. M., Othman, A. R., & Bakar, E. A. (2021). Determination of non-recrystallization temperature for niobium microalloyed steel. *Materials*, 14(2639). <https://doi.org/10.3390/ma14102639>.
68. Kreyca, J., Kahlenberg, R., Jacob, A., Kozeschnik, E., & Povoden-Karadeniz, E. (2023). Analysis of recrystallization kinetics concerning the experimental, computational, and empirical evaluation of critical

- temperatures for static recrystallization in Nb, Ti, and V microalloyed steels. *Metals*, 13(884). <https://doi.org/10.3390/met13050884>.
69. Zhang, Q., Huo, X., Li, L., Chen, S., & Lu, C. (2022). Correlation between precipitation and recrystallisation during stress relaxation in titanium microalloyed steel. *Metals*, 12(1920). <https://doi.org/10.3390/met12111920>.
70. Zhao, Y., Zheng, J., Chen, L., & Liu, X. (2022). Static recrystallization behavior of low-carbon Nb-V-microalloyed forging steel. *Metals*, 12(1745). <https://doi.org/10.3390/met12101745>.
71. Kaikkonen, P. M., Somani, M. C., Karjalainen, L. P., & Kömi, J. I. (2021). Flow stress behaviour and static recrystallization characteristics of hot deformed austenite in microalloyed medium-carbon bainitic steels. *Metals*, 11(138). <https://doi.org/10.3390/met11010138>.
72. Mayo, U., Isasti, N., Rodríguez-Ibabe, J. M., & Uranga, P. (2019). Interaction between microalloying additions and phase transformation during intercritical deformation in low carbon steels. *Metals*, 9(10), 1049. <https://doi.org/10.3390/met9101049>.
73. Klančnik, G., Foder, J., Bradaškja, B., Kralj, M., Klančnik, U., Lalley, P., & Stalheim, D. (2022). Hot deformation behavior of C-Mn steel with incomplete recrystallization during roughing phase with and without Nb addition. *Metals*, 12(10), 1597. <https://doi.org/10.3390/met12101597>.
74. Xue, H., Yuan, H., Guo, K., Zhang, Z., & Zhang, M. (2021). Microstructure evolution and recrystallization temperature change of cold-rolled Fe–19Mn–0.6C twinning-induced plasticity steel during annealing. *Metals*, 11(8), 1181. <https://doi.org/10.3390/met11081181>.
75. Krbat'a, M., Eckert, M., Križan, D., Barényi, I., & Mikušová, I. (2019). Hot deformation process analysis and modelling of X153CrMoV12 steel. *Metals*, 9(10), 1125. <https://doi.org/10.3390/met9101125>.
76. Sobotka, E., Kreyca, J., Kahlenberg, R., Jacob, A., Kozeschnik, E., & Povoden-Karadeniz, E. (2023). Analysis of recrystallization kinetics concerning the experimental, computational, and empirical evaluation of critical temperatures for static recrystallization in Nb, Ti, and V microalloyed steels. *Metals*, 13(5), 884. <https://doi.org/10.3390/met13050884>.
77. Homsher, C. N., & Van Tyne, C. J. (2013). Empirical equations for the no-recrystallization temperature in hot rolled steel plates. *Materials Science and Technology (MS&T) 2013*, October 27-31, Montreal, Quebec, Canada.
78. Park, M., Kang, M. S., Park, G. W., Choi, E. Y., Kim, H. C., Moon, H. S., Jeon, J. B., Kim, H., Kwon, S. H., & Kim, B. J. (2019). The effects of recrystallization on strength and impact toughness of cold-worked high-Mn austenitic steels. *Metals*, 9(9), 948. <https://doi.org/10.3390/met9090948>.
79. Sharifi, S. S., Bakhtiari, S., Shahryari, E., Sommitsch, C., & Poletti, M. C. (2024). The influence of thermomechanical conditions on the hot ductility of continuously cast microalloyed steels. *Materials*, 17(18), 4551. <https://doi.org/10.3390/ma17184551>.
80. Sauer, M., Fabík, R., Schindler, I., Kawulok, P., Opěla, P., Kawulok, R., Vodárek, V., & Rusz, S. (2023). Analysis of the microstructure development of Nb-microalloyed steel during rolling on a heavy-section mill. *Materials*, 16(1), 288. <https://doi.org/10.3390/ma16010288>.
81. Luo, L., Zhang, J., Fu, H., Chen, F., Qin, J., & Li, Y. (2024). Effects of partially replacing Mo with Nb on the microstructure and properties of high-strength low-alloy steel during reverse austenization. *Metals*, 14(8), 896. <https://doi.org/10.3390/met14080896>.
82. Mohrbacher, H. (2019). Metallurgical effects of niobium and molybdenum on heat-affected zone toughness in low-carbon steel. *Applied Sciences*, 9(9), 1847. <https://doi.org/10.3390/app9091847>.
83. Zaitsev, A., Koldaev, A., Arutyunyan, N., Dunaev, S., & D'yakonov, D. (2020). Effect of the chemical composition on the structural state and mechanical properties of complex microalloyed steels of the ferritic class. *Processes*, 8(6), 646. <https://doi.org/10.3390/pr8060646>.
84. Zurutuza, I., Isasti, N., Detemple, E., Schwinn, V., Mohrbacher, H., & Uranga, P. (2021). Effect of Nb and Mo additions in the microstructure/tensile property relationship in high-strength quenched and quenched and tempered boron steels. *Metals*, 11(1), 29. <https://doi.org/10.3390/met11010029>.
85. Xing, J., Zhu, G., Wu, B., Ding, H., & Pan, H. (2022). Effect of Ti addition on the precipitation mechanism and precipitate size in Nb-microalloyed steels. *Metals*, 12(2), 245. <https://doi.org/10.3390/met12020245>.

86. Ghanaei, A., Edris, H., Monajati, H., & Hamawandi, B. (2023). The effect of adding V and Nb microalloy elements on the bake hardening properties of ULC steel before and after annealing. *Materials*, 16(4), 1716. <https://doi.org/10.3390/ma16041716>.
87. Han, R., Yang, G., Xu, D., Jiang, L., Fu, Z., & Zhao, G. (2022). Effect of V on the precipitation behavior of Ti-Mo microalloyed high-strength steel. *Materials*, 15(17), 5965. <https://doi.org/10.3390/ma15175965>.
88. Cong, T., Jiang, B., Zou, Q., & Yao, S. (2023). Influence of microalloying on the microstructures and properties of spalling-resistant wheel steel. *Materials*, 16(5), 1972. <https://doi.org/10.3390/ma16051972>.
89. Villalobos, J. C., Del-Pozo, A., Campillo, B., Mayen, J., & Serna, S. (2018). Microalloyed steels through history until 2018: Review of chemical composition, processing and hydrogen service. *Metals*, 8(5), 351. <https://doi.org/10.3390/met8050351>.
90. Oja, O., Saastamoinen, A., Patnamsetty, M., Honkanen, M., Peura, P., & Järvenpää, M. (2019). Microstructure and mechanical properties of Nb and V microalloyed TRIP-assisted steels. *Metals*, 9(8), 887. <https://doi.org/10.3390/met9080887>.
91. Zhao, T., Hao, X., Wang, Y., Chen, C., & Wang, T. (2023). Influence of thermo-mechanical process and Nb-V microalloying on microstructure and mechanical properties of Fe-Mn-Al-C austenitic steel. *Coatings*, 13(9), 1513. <https://doi.org/10.3390/coatings13091513>.
91. Zaitsev, A., & Arutyunyan, N. (2021). Low-carbon Ti-Mo microalloyed hot rolled steels: Special features of the formation of the structural state and mechanical properties. *Metals*, 11(10), 1584. <https://doi.org/10.3390/met11101584>.
92. Politecnico di Torino. (2020-2021). Niobium-alloyed steels for automotive transmission and powertrain applications (master's thesis). DIMEAS – Department of Mechanical and Aerospace Engineering.
93. Louchet, F., Weiss, J., & Richeton, T. (2006). Hall-Petch law revisited in terms of collective dislocation dynamics. *Physical Review Letters*, 97, 075504. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.075504>.
94. Rodríguez Baracaldo, R., Cabrera Marrero, J. M., & Benito Páramo, J. A. (s.f.). Estudio de la relación Hall-Petch en aceros (0,6% C) submicrométricos.
95. Armstrong, R. W. (2014). 60 Years of Hall-Petch: Past to Present Nano-Scale Connections. *Materials Transactions*, 55(1), 2-12. <https://doi.org/10.2320/matertrans.55.2>.
96. de las Cuevas, F., Ferraiuolo, A., Karjalainen, L. P., & Gil Sevillano, J. (2014). Propiedades mecánicas a tracción y mecanismos de endurecimiento de un acero TWIP a altas velocidades de deformación: relación de Hall-Petch. *Revista de Metalurgia*, 50(4), e031. <https://doi.org/10.3989/revmetalm.031>.
97. Kato, M. (2014). Hall-Petch Relationship and Dislocation Model for Deformation of Ultrafine-Grained and Nanocrystalline Metals. *Materials Transactions*, 55(1), 19-24. <https://doi.org/10.2320/matertrans.55.19>.
98. Moreno Gómez, F. J. (2016). Procesos termomecánicos y precipitación en un acero HSLA. Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.
99. Akpan, E. I., & Haruna, I. A. (s.f.). Structural evolution and properties of hot rolled steel alloys. Department of Materials and Production Engineering, Ambrose Alli University, Ekpoma, Edo State, Nigeria.
100. Altuna, M. A., Iza-Mendia, A., & Gutiérrez, I. (2012). Precipitation of Nb in ferrite after austenite conditioning. Part II: Strengthening contribution in high-strength low-alloy (HSLA) steels. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 43, 4054-4066. <https://doi.org/10.1007/s11661-012-1270-x>.
101. García-Sesma, L., López, B., & Pereda, B. (2020). Effect of high Ti contents on austenite microstructural evolution during hot deformation in low carbon Nb microalloyed steels. *Metals*, 10(165). <https://doi.org/10.3390/met10020165>.
102. Yan, Y., Xue, Y., Liu, K., Yu, W., Shi, J., & Wang, M. (2024). Unified solid solution product of [Nb][C] in Nb-microalloyed steels with various carbon contents. *Materials*, 17(3369). <https://doi.org/10.3390/ma17133369>.
103. Kayron Lima Silva, Samuel Filgueiras Rodrigues, Glaucia Maria Evangelista Macedo, Bruno Leonardy Sousa Lopes, Clodualdo Aranas, Fulvio Siciliano, Gedeon Silva Reis, Eden Santos Silva, (2021) Solubility product of a Nb-N bearing austenitic stainless-steel biomaterial, *Journal of Materials Research and Technology*, Volume 15, pp 5864-5879, ISSN 2238-7854, <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2021.11.033>.

104. Huo, L., Gao, J., Li, Y., Xu, P., Wei, X., & Ma, T. (2025). Effect of Nb alloying and solution treatment on the mechanical properties of cold-rolled Fe-Mn-Al-C low-density steel. *Metals*, 15(102). <https://doi.org/10.3390/met15020102>.
105. Dikić, S., Glišić, D., Fadel, A., Jovanović, G., & Radović, N. (2021). Structure and strength of isothermally heat-treated medium carbon Ti-V microalloyed steel. *Metals*, 11(1011). <https://doi.org/10.3390/met11071011>.
106. Larzabal, G., Isasti, N., Rodriguez-Ibabe, J. M., & Uranga, P. (2017). Evaluating strengthening and impact toughness mechanisms for ferritic and bainitic microstructures in Nb, Nb-Mo and Ti-Mo microalloyed steels. *Metals*, 7(65). <https://doi.org/10.3390/met7020065>.
107. Liu, H., Yang, B., Chen, Y., Li, C., & Liu, C. (2022). Precipitation law of vanadium in microalloyed steel and its performance influencing factors. *Materials*, 15(8146). <https://doi.org/10.3390/ma15228146>.
108. Ma, G., Chen, Y., Wu, G., Wang, S., Li, T., Liu, W., Wu, H., Gao, J., Zhao, H., Zhang, C., et al. (2023). The effects of microalloying on the precipitation behavior and strength mechanisms of X80 high-strength pipeline steel under different processes. *Crystals*, 13(714). <https://doi.org/10.3390/cryst13050714>.
109. Maetz, J.-Y., Militzer, M., Wen Chen, Y., Yang, J.-R., Goo, N. H., Kim, S. J., Jian, B., & Mohrbacher, H. (2018). Modeling of precipitation hardening during coiling of Nb-Mo steels. *Metals*, 8(758). <https://doi.org/10.3390/met8100758>.
110. Li, K., Shao, J., Yao, C., Jia, P., Xie, S., Chen, D., & Xiao, M. (2024). Effect of Nb-Ti microalloyed steel precipitation behavior on hot rolling strip shape and FEM simulation. *Materials*, 17(651). <https://doi.org/10.3390/ma17030651>.
111. Cui, P., Xing, G., Nong, Z., Chen, L., Lai, Z., Liu, Y., & Zhu, J. (2022). Recent advances on composition-microstructure-properties relationships of precipitation hardening stainless steel. *Materials*, 15(8443). <https://doi.org/10.3390/ma15238443>.
112. Zhang, Z., Wang, Z., Li, Z., & Sun, X. (2023). Microstructure evolution and precipitation behavior in Nb and Nb-Mo microalloyed fire-resistant steels. *Metals*, 13(112). <https://doi.org/10.3390/met13010112>.
113. Morrison, W. B. (2009). Microalloy steels – the beginning. *Journal of Physical Metallurgy of Steel*, 25, 1-15.
114. Okamoto, R. & Borgenstam, Annika & Ågren, John. (2010). Interphase precipitation in niobium-microalloyed steels. *Acta Materialia - ACTA MATER.* 58. 4783-4790. <http://doi:10.1016/j.actamat.2010.05.014>.
115. Zhong, N., Wang, X. D., Wang, L., & Rong, Y. H. (2009). Enhancement of the mechanical properties of a Nb-microalloyed advanced high-strength steel treated by quenching-partitioning-tempering process. *Material Science and Engineering A*.
116. Cong, J., Li, J., Fan, J., Liu, P., Misra, R. D. K., Shang, C., & Wang, X. (2020). The impact of interphase precipitation on the mechanical behavior of fire-resistant steels at an elevated temperature. *Materials*, 13(4294). <https://doi.org/10.3390/ma13194294>.
117. Klinkenberg, Christian & Hulka, Klaus & Bleck, Wolfgang. (2004). Niobium Carbide Precipitation in Microalloyed Steel. *Steel Research International*. 75. 744-752. <http://doi10.1002/srin.200405837>.
118. Jeong, J.-Y., Hong, D.-G., & Yim, C.-H. (2022). Deep learning to predict deterioration region of hot ductility in high-Mn steel by using the relationship between RA behavior and time-temperature-precipitation. *Metals*, 12(1689). <https://doi.org/10.3390/met12101689>.
119. Song, S., Tian, J., Xiao, J., Fan, L., Yang, Y., Yuan, Q., Gan, X., & Xu, G. (2022). Effect of vanadium and strain rate on hot ductility of low carbon microalloyed steels. *Metals*, 12(14). <https://doi.org/10.3390/met12010014>.
120. Salas-Reyes, A. E., Altamirano-Guerrero, G., Deaquino, R., Salinas, A., Lara-Rodriguez, G., Figueroa, I. A., González-Parra, J. R., & Mintz, B. (2023). The hot ductility, microstructures, mechanical properties and corrosion resistance in an advanced boron-containing complex phase steel heat-treated using the quenching and partitioning (Q&P) process. *Metals*, 13(257). <https://doi.org/10.3390/met13020257>.
121. Mintz, B.; Qaban, A. The Influence of Precipitation, High Levels of Al, Si, P, and a Small B Addition on the Hot Ductility of TWIP and TRIP Assisted Steels: A Critical Review. *Metals* 2022, 12, 502. <https://doi.org/10.3390/met12030502>.

122. Wang, Z.; Wang, Y.; Wang, C. Grain Size Effect on the Hot Ductility of High-Nitrogen Austenitic Stainless Steel in the Presence of Precipitates. *Materials* 2018, 11, 1026. <https://doi.org/10.3390/ma11061026>.
123. Abdelhalim, A.; Guedri, A.; Darsoun, L.; Belyamna, M. A. Fracture Mechanisms of Micro-Alloy Steel at Elevated Temperature. *International Journal of Membrane Science and Technology* 2023, 10(5), 14–23.
124. Grajcar, A.; Morawiec, M.; Zalecki, W. Austenite Decomposition and Precipitation Behavior of Plastically Deformed Low-Si Microalloyed Steel. *Metals* 2018, 8, 1028. <https://doi.org/10.3390/met8121028>.
125. Quispe, A. B.; Medina, S. F. Diagrama de Recristalización-Precipitación-Tiempo-Temperatura (RPTT) de un acero microaleado al vanadio. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Licencia Creative Commons 3.0 España (BY-NC).
126. Yang, L.; Li, Y.; Xue, Z.; Cheng, C. Effect of Different Thermal Schedules on Ductility of Microalloyed Steel Slabs during Continuous Casting. *Metals* 2019, 9, 37. <https://doi.org/10.3390/met9010037>.
127. Liu, H.; Yang, B.; Chen, Y.; Li, C.; Liu, C. Precipitation Law of Vanadium in Microalloyed Steel and Its Performance Influencing Factors. *Materials* 2022, 15, 8146. <https://doi.org/10.3390/ma15228146>.
128. Claesson, E.; Magnusson, H.; Kohlbrecher, J.; Thuvander, M.; Lindberg, F.; Andersson, M.; Hedström, P. Carbide Precipitation during Processing of Two Low-Alloyed Martensitic Tool Steels with 0.11 and 0.17 V/Mo Ratios Studied by Neutron Scattering, Electron Microscopy and Atom Probe. *Metals* 2022, 12, 758. <https://doi.org/10.3390/met12050758>.
129. Wang, X., Li, Z., Zhou, S., Chen, R., Da, G., Yong, Q., Yang, Z., Shen, J., Shang, C., & Liu, Q. (2021). The influence of temperature on the microstructure and properties of Nb-V-Ti-Mo complex microalloyed high-strength fire-resistant steel. *Metals*, 11(11), 1670. <https://doi.org/10.3390/met11111670>.
130. Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia. (2011). JMat–Herramienta remota de cálculo y multiusuario para el aprendizaje basado en problemas usando Matlab. *Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia*, (59), 158-169.
131. Valencia Morales, E. (Ed.). (2011). *Alloy Steel – Properties and Use* Edited, Published by InTech, Janeza Trdine 9, 51000 Rijeka, Croatia. ISBN: 978-953-307-484-9.
132. Abad, R., Fernández, A. I., López, B., & Rodríguez-Ibabe, J. M. (1999). Interaction between recrystallization and precipitation during multipass rolling in a low carbon niobium microalloyed steel. CEIT and ESI (University of Navarra), Donostia-San Sebastián, Basque Country, Spain.
133. Yang, Y., Zhao, X. M., Dong, C. Y., & Zhao, X. Y. (2020). Influence of hot deformation and precipitates on the recrystallization of Nb-V-Ti free-cutting steel. *Metals*, 10(12), 1587. <https://doi.org/10.3390/met10121587>.
134. He, C., Wang, J., Chen, Y., Yu, W., & Tang, D. (2020). Effects of Sn and Sb on the hot ductility of Nb+Ti microalloyed steels. *Metals*, 10(12), 1679. <https://doi.org/10.3390/met10121679>.
135. Rešković, S., Slokar Benić, L., & Lovrenić-Jugov, M. (2020). The interdependence of the degree of precipitation and dislocation density during the thermomechanical treatment of microalloyed niobium steel. *Metals*, 10(2), 294. <https://doi.org/10.3390/met10020294>.
136. Chen, S., Li, L., Xia, J., Peng, Z., Gao, J., & Sun, H. (2020). Recrystallization–precipitation interaction of a Ti microalloyed steel with controlled rolling process. *Journal of Physics: Conference Series*, 1676(1), 012036. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1676/1/012036>.
137. Medina, S. F., Ouispe, A., Valles, P., & Baños, J. L. (1999). Recrystallization-precipitation interaction in carbon niobium microalloyed steels. *ISIJ International*, 39(9), 913-921. <https://doi.org/10.2355/isijinternational.39.913>.
138. Scharifi, E., Shoshmina, D., Biegler, S., Weidig, U., & Steinhoff, K. (2021). Influence of hot deformation on the precipitation hardening of high-strength aluminum AA7075 during thermo-mechanical processing. *Metals*, 11(5), 681. <https://doi.org/10.3390/met11050681>.

139. Tao, K., Xu, J., Zhang, D., Zhang, A., Su, G., & Zhang, J. (2023). Effect of final thermomechanical treatment on the mechanical properties and microstructure of T phase hardened Al-5.8Mg-4.5Zn-0.5Cu alloy. *Materials*, 16(8), 3062. <https://doi.org/10.3390/ma16083062>.
140. Zener, C. (1949). Private communication to C. S. Smith. *Transactions of the American Institute of Mining and Metallurgical Engineers*, 175(15), 15–51, pp. 15–51, by C.S. Smith.
141. Lu, J. (2009). Quantitative microstructural characterization of microalloyed steels (Doctoral dissertation, University of Alberta). <https://doi.org/10.7939/R37425>.
142. Scharifi, E., Nietsch, J. A., Quadfasel, A., Weidig, U., & Steinhoff, K. (2022). Effect of thermo-mechanically activated precipitation on the hot deformation behavior of high-strength aluminum alloy AA7075. *Metals*, 12(10), 1609. <https://doi.org/10.3390/met12101609>.
143. Zuo, J., Hou, L., Shu, X., Peng, W., Yin, A., & Zhang, J. (2020). Effect of deformation on precipitation and the microstructure evolution during multistep thermomechanical processing of Al-Zn-Mg-Cu alloy. *Metals*, 10(11), 1409. <https://doi.org/10.3390/met10111409>.
144. Dölling, J., Kuglstatter, M., Prahl, U., Höppel, H. W., Ortner, P., Ott, B., Kracun, S. F., Fehlbier, M., & Zilly, A. (2024). Analyzing the precipitation effects in low-alloyed copper alloys containing hafnium and chromium. *Metals*, 14(3), 258. <https://doi.org/10.3390/met14030258>.
145. Palmier, E. J., García, C. I., & DeArdo, A. J. (1992). Static recrystallization and precipitation during the hot deformation of austenite. Basic Metals Processing Research Institute, Department of Materials Science and Engineering, University of Pittsburgh.

# Colaboradores

## **Alcorta García, Efraín**

Es Ingeniero y Maestro en Ciencias por la Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL), y el grado de Dr.-Ing. en Ingeniería Eléctrica de la Universidad Gerhard Mercator de Duisburg, Alemania, 1999. Desde 1999 es profesor en control en la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León. Sus áreas de interés incluyen el control automático, diagnóstico de fallas y control con tolerancia a fallas.

## **Cabriales Gómez, Roberto Carlos**

Ingeniero Mecánico Electricista, Maestro en Ciencias de la Ingeniería Mecánica con especialidad en Materiales y Doctor en Ingeniería de Materiales por la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León. Profesor Investigador de la FIME-UANL. Experto en materiales así como en electromovilidad con amplios conocimientos en diseño mecánico y transferencia de calor.

## **Chavarría Martínez, José Misael**

Egresado de Ingeniería Química por la FCQ-UANL y de la Maestría en Ciencias de la Ingeniería con orientación en Materiales por la FIME-UANL. Cursó el Doctorado en Ingeniería de Materiales en la FIME-UANL. Actualmente se desempeña como docente en la UANL.

## **García-Gutierrez, Diana Fabiola**

Es profesora e investigadora de la FIME-UANL, pertenece al SNII Nivel I. Sus líneas de investigación se centran en la síntesis, caracterización y aplicación de nanopartículas

semiconductoras en dispositivos optoelectrónicos, en particular las nanopartículas de perovskitas inorgánicas.

## **García-Gutierrez, Domingo Ixcóatl**

Es profesor e investigador de la FIME-UANL, pertenece al SNI Nivel III. Sus líneas de investigación se enfocan en la síntesis, caracterización y aplicación de materiales híbridos nanoestructurados, basados en nanopartículas semiconductoras y materiales derivados del grafeno, para aplicaciones optoelectrónicas. En el año 2014 recibió el premio de investigación de la UANL en el área de Ingeniería y Tecnología.

## **García Macias, Daniel**

Ingeniero en Aeronáutica por la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León. Ingeniero en Manufactura en la empresa Polaris Inc. Experiencia profesional en el diseño e ingeniería en el sector automotriz. Habilidades de análisis mediante elemento finito, análisis de falla y modelado de aleaciones ligeras.

## **García Rincón, Omar**

Experto en el sector industrial en laminación en caliente, actualmente desempeñándose como R&D Manager y anteriormente fue Product Technologist. Desde 2013 es profesor adjunto en la Universidad Autónoma de Nuevo León, impartiendo materias de Metalurgia Física y Tratamiento Térmico. Coorganizador del Simposio de Acero en el 3er Congreso Panamericano de Materiales, con contribuciones en publicaciones especializadas internacionales.

**García Salazar, Octavio**

Ingeniero Electrónico y de Maestro en Ciencias en Ingeniería Eléctrica con especialidad en Robótica del Instituto Tecnológico de La Laguna. Obtuvo un Doctorado en Ciencias en Control de Sistemas de la Universidad Tecnológica de Compiègne, Francia, en 2009. Sus intereses de investigación son el diseño, desarrollo, guiado, navegación y control de drones, sistemas aéreos no tripulados, dinámica de vuelo, robótica, e instrumentación.

**Guerrero Mata, Martha Patricia**

Experta en materiales metálicos, simulación y soldadura. Investigadora de la UANL desde 1999, ha sido profesora invitada internacional, dirigido 78 tesis, publicado 60 artículos y participado en más de 150 congresos. Lidera proyectos científicos y colabora con reconocidas instituciones globales.

**Morones Ibarra, José Rubén**

Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas por la Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL). Obtuvo el Doctorado en Física en el área de Física Nuclear Teórica, por la University of South Carolina, USA. Actualmente es profesor investigador de tiempo completo en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la UANL. Pertenece al Sistema Nacional de Investigadores con Nivel I y es Miembro Regular de la Academia Mexicana de Ciencias.

**Muñoz Pacheco, Jesús Manuel**

Doctor en ciencias por INAOE 2009. Es profesor-investigador en la BUAP. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores desde 2011. Ha sido incluido en la lista Stanford-Elsevier del 2% de los mejores científicos del mundo desde 2020. Actualmente es editor asociado en revistas JCR. Sus intereses son la ciberseguridad y las redes neuronales usando caos.

**Lara Hernández, Elizabeth Guadalupe**

Maestra en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con especialidad en Control por la Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL). Actualmente se desempeña como profesora de tiempo completo en el área de Control y Automatización, además de ocupar el cargo de jefa de la Academia de

Electrónica de Potencia e Instrumentación en la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la UANL.

**Platas Garza, Miguel Ángel**

Ingeniero en Electrónica y Automatización por la Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL). Posteriormente, en esta misma institución recibió el grado de Maestría en Ciencias y de Doctorado en Ingeniería Eléctrica en 2008 y 2011, respectivamente. Actualmente trabaja en la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la UANL como profesor titular y jefe del programa educativo Licenciatura en Ingeniería en Automatización y Sistemas Inteligentes. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores, de la IEEE instrumentation and measurement society, y de la Asociación Mexicana de Sistemas Dinámicos y Complejidad.

**Reyes Osorio, Luis Arturo**

Ingeniero Mecánico Administrador, Maestro en Ciencias de la Ingeniería Mecánica con especialidad en Materiales y Doctor en Ingeniería de Materiales por la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León. Profesor Investigador de la FIME-UANL. Experiencia profesional en el estudio y modelado de estructuras, manufactura avanzada y procesos mecánicos.

**Zambrano Serrano, Ernesto**

Doctor por el IPICYT, México, en 2017. Ha sido investigador postdoctoral en BUAP y UANL, y asistente de investigación en City University of Hong Kong. Actualmente es Profesor en FIME-UANL, miembro del SNI y de AMESDYC. Sus líneas de investigación incluyen caos, redes complejas y sistemas fraccionarios.

**Zúñiga Pineda, Laura Fátima**

Estudiante de doctorado en la UANL, posee una maestría en Ingeniería Automotriz y una licenciatura en Ingeniería Electromecánica. Su investigación se centra en el análisis metalúrgico, la simulación térmica y termomecánica, y el diseño avanzado de aceros mediante pruebas Gleeble, orientados a materiales para aplicaciones automotrices y ductos de transporte de hidrocarburos.



Se invita a estudiantes, docentes, investigadores, profesionistas y demás interesados en difundir sus trabajos científicos y tecnológicos, a colaborar con sus artículos en la revista Ingenierías.

## LINEAMIENTOS EDITORIALES

Es requisito que las colaboraciones sean producto del trabajo directo de los autores, estableciendo claramente su contribución, y que estén escritas en un lenguaje claro y accesible. Se sugiere que las contribuciones no estén redactadas en primera persona. El número máximo de autores por artículo es cinco.

Todos los artículos recibidos estarán sujetos a arbitraje de tipo doble ciego, siendo el dictamen inapelable. Los criterios aplicables a la selección y dictaminación de textos serán: originalidad, rigor científico, exactitud de la información y la claridad en el lenguaje.

La publicación de artículos en la revista Ingenierías implica ceder los derechos de autor a la UANL. Asimismo, los artículos aprobados estarán sujetos a revisión de estilo.

## CRITERIOS EDITORIALES

Los autores de artículos de revisión o divulgación deberán presentar trabajos que ofrezcan una panorámica del campo temático, separar las dimensiones del tema y presentar una conclusión que se derive del material presentado.

Las contribuciones sobre modelación y simulación deberán estar científicamente validadas dentro del propio trabajo.

No se consideran para publicación protocolos de investigación, manuales, proyectos, propuestas o trabajos inconclusos.

Los artículos extensos y divididos en partes deberán enviarse en su totalidad, pues se arbitrarán como un solo manuscrito.

## INSTRUCCIONES DE ENVÍO

La propuesta de publicación consistirá en lo siguiente: 1) manuscrito del artículo con autores (.docx y .pdf), 2) manuscrito del artículo sin autores (.docx), 3) material gráfico en alta resolución (300 dpi y 15 cm en su lado más corto, .tif, .eps, .jpg o .bmp) y 4) fichas biográficas de cada autor con un máximo de 150 palabras (.docx). Estos archivos se deberán enviar a través de la plataforma digital de la revista (<https://ingenierias.uanl.mx/index.php/i>). Adicionalmente, se deberán llenar los campos de información que se soliciten en la plataforma.

La extensión de los artículos no deberá exceder de 15 cuartillas tamaño carta (incluyendo material gráfico) en tipografía Times New Roman de 11 puntos en interlineado sencillo.

Los artículos deberán incluir un resumen tanto en español como en inglés, de no más de 150 palabras, así como un máximo de 5 palabras clave, tanto en español como en inglés.

Las referencias deberán ir numeradas en el orden de citado en el texto. La bibliografía deberá seguir el formato de citación APA 7ª ed.

El material gráfico, además de estar incluido en el artículo, deberá enviarse en archivos individuales.

## CONTACTO

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
Universidad Autónoma de Nuevo León,  
Edificio 7, primer piso, ala norte.

Tel.: 8329-4000 Ext. 5854

E-mail: [revistaingenierias@uanl.mx](mailto:revistaingenierias@uanl.mx)

## **Autores**

### *Criterio de autoría o coautoría*

Se considera autor o coautor a quien haya contribuido significativamente a la conceptualización, desarrollo, ejecución, análisis, discusión o redacción del trabajo.

Los autores deben:

Presentar un manuscrito inédito que contenga una narración concisa y exacta del trabajo desarrollado, así como una discusión objetiva de su significado intelectual y científico.

Incluir detalles suficientes y referencias a fuentes de información públicas que cumplan con las condiciones necesarias para la confirmación o falsación científica del trabajo por terceros.

Citar aquellas publicaciones que son antecedentes esenciales para comprender el trabajo.

Incluir a los coautores fallecidos, asentando la fecha de su muerte.

Incluir a los coautores que hayan cambiado de afiliación durante el proceso de preparación y publicación del documento, señalando el evento en una nota.

Reconocer mediante una nota de agradecimiento el apoyo de las instituciones y organismos que hayan contribuido significativamente al desarrollo del trabajo, así como a colaboradores que hayan contribuido de manera importante, incluyendo a fallecidos o a quienes hayan cambiado de afiliación, pero sin que hayan llegado a cumplir con el criterio de coautoría, si los hubiera.

Responsabilizarse del material que presentan en su manuscrito.

Atender puntualmente las críticas y observaciones emitidas por los revisores como parte del proceso de evaluación.

Los autores deben abstenerse de:

Ofrecer manuscritos que se encuentren en consideración por otras publicaciones.

Presentar críticas personales en sus trabajos.

Incluir información que hayan obtenido mediante comunicación privada que no se localice en publicaciones.

Incluir información que hayan obtenido de manera confidencial sin el permiso explícito correspondiente.

Incluir información obtenida en el proceso de servicios confidenciales, tales como documentación para concursos o solicitudes de becas.

Citar publicaciones que no se relacionen o que sólo se relacionen remotamente con la materia.

Incluir como autores a terceros que no cumplan con el criterio de coautoría.

Utilizar nombres ficticios o pseudónimos.

## **Revisores**

### *Deberes*

Los revisores deben:

Evaluar el manuscrito enviado para su consideración, y emitir su fallo correspondiente en tiempo y forma.

Declinar cualquier invitación para evaluar un manuscrito si no se consideran calificados, carecen de tiempo para juzgar o se les presenta algún conflicto de intereses, tal como encontrarse vinculados estrechamente a los autores o al trabajo a evaluar.

Manifestar al editor cualquier conflicto de intereses que detecten.

Considerar un manuscrito enviado para revisión como un documento confidencial.

Explicar y apoyar sus juicios de manera suficiente para que el editor, los miembros de cuerpo editorial y los autores comprendan el fundamento de sus observaciones y sugerencias.

Considerar en su revisión posibles errores o fallas de los autores al citar el trabajo relevante de otros.

Informar al editor si encontraran alguna semejanza substancial entre el manuscrito y cualquier otro trabajo.

#### *Restricciones*

Los revisores deben abstenerse de:

Conservar, difundir o utilizar información, argumentos o interpretaciones no publicados contenidos en el manuscrito posteriormente al proceso de evaluación.

Contactar a los autores, si hubieran inferido su identidad, previamente a haber emitido su fallo.

Expresar críticas personales.

### **Editor**

#### *Deberes*

El editor debe:

Dar consideración justa e imparcial a todos los manuscritos ofrecidos para su publicación, juzgando cada uno de sus méritos científicos o tecnológicos, sin prejuicios de raza, género, religión, creencia, origen étnico, ciudadanía, posicionamiento filosófico o político de los autores.

Considerar un manuscrito enviado para revisión como un documento confidencial.

Explicar y apoyar su juicio final para que los autores comprendan el fundamento de sus observaciones.

Respetar la independencia intelectual de los autores.

Procesar los manuscritos con diligencia.

Ejercer su responsabilidad y la autoridad para aceptar o rechazar un artículo enviado para su publicación.

Delegar en los miembros del consejo editorial o comité técnico la autoridad para aceptar o rechazar un manuscrito enviado para su publicación en casos en que se presente algún conflicto de intereses con él.

Delegar la responsabilidad y autoridad editorial en alguno de los miembros de los consejos editoriales cuando él sea autor o coautor de un manuscrito sometido a consideración de la revista.

#### *Restricciones*

El editor debe abstenerse de:

Utilizar la información, argumentos o interpretaciones no publicados desplegados en un manuscrito sometido, excepto cuando cuente con el permiso de los autores.

Compartir información sobre un manuscrito en proceso de revisión o publicación a ninguna persona fuera de aquellos a quienes se les solicite consejo profesional.

Expresar críticas personales.

### **Cuerpo Editorial**

#### **(Consejos Editoriales y Comité Técnico)**

#### *Deberes*

Los miembros del cuerpo editorial deben:

Estar dispuestos a otorgar consejo al editor en las situaciones requeridas.

Declinar cualquier invitación para brindar consejo si se les presenta algún conflicto de intereses, tal como encontrarse vinculados estrechamente con los autores o con el trabajo a evaluar.

Manifestar al editor cualquier conflicto de intereses que detecten.

Considerar un manuscrito enviado para revisión como un documento confidencial.

Explicar y apoyar sus juicios de manera suficiente para que el editor, los miembros de cuerpo editorial y los autores comprendan el fundamento de sus observaciones.

Respetar la independencia intelectual de los autores.

#### **Restricciones**

Los miembros del cuerpo editorial deben abstenerse de:

Utilizar la información, argumentos o interpretaciones no publicados desplegados en un manuscrito sometido, excepto cuando se cuente con el permiso de los autores.

Compartir información sobre un manuscrito en proceso de revisión o publicación a ninguna persona fuera de aquellos a quienes se les solicite consejo profesional.

Expresar críticas personales.

Aug. 28, 1962

M. L. HEILIG

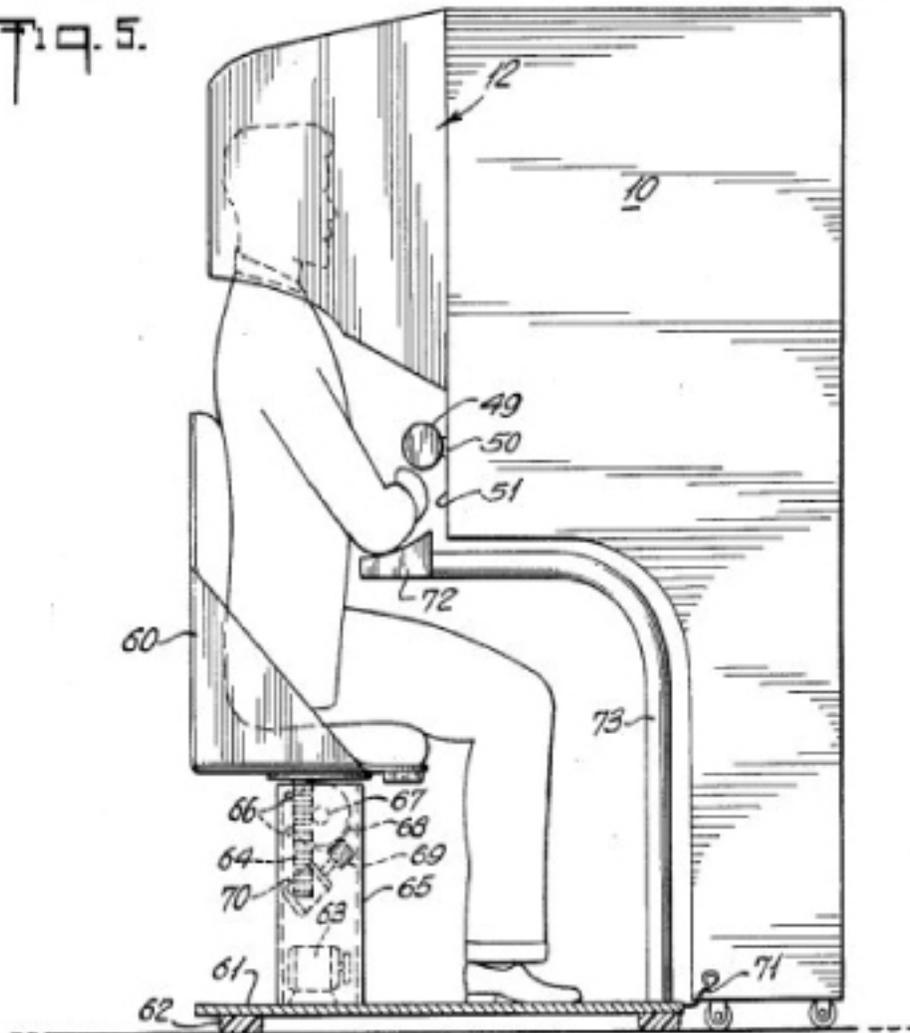
3,050,870

SENSORAMA SIMULATOR

Filed Jan. 10, 1961

8 Sheets-Sheet 3

Fig. 5.



SENSORAMA

En 1957, Morton Heilig desarrolló el "Sensorama", parecida a una maquina "arcade", pero incluía un visor, el cual incorporaba una pantalla estereoscópica en color que mostraba imágenes tridimensionales, generando en el espectador la sensación de estar dentro de la escena.

Yúbal Fernández. El primer simulador VR de la historia. Xataka. 2018



Ilustración: "Don Quijote a 400 años de Cervantes", Aida Emart, Mixta s/papel, 76.5 x 56 cm  
Colección de la Biblioteca General del Congreso de la Unión



Ingenierías  
<http://ingenierias.uanl.mx/>

