

Ingenierías

ISSN 1405-0676

94

a)

20 μm

NAC

Sustrato



- 3 Realización electrónica de sistemas caóticos:
Parte 3, en sistemas digitales**
Francisco Antonio Rodríguez Cruz, César de Jesús Chacón Rendón,
Angel Rodríguez-Liñan
- 18 Respuesta en frecuencia para sistemas en espacio
de estados**
Efraín Alcorta García, David Alejandro Díaz Romero,
Rodolfo Castillo Martínez, Luis Humberto Rodríguez Alfaro
- 25 Evaluación dimensional del proceso de digitalización 3D
por fotogrametría de un patrón de calibración propio**
Fco. Eugenio López G., Francisco Ramírez Cruz,
Sergio Alberto Cardona Ortiz, Moisés Rivera Rocha
- 42 Las geometrías no-euclidianas**
José Rubén Morones Ibarra
- 59 Augmented reality to guide pedestrian evacuation
in earthquake events**
Diego F. Rivera-Hernández, Julián A. Durand-González,
Clara E. Isaza¹, Mauricio Cabrera-Ríos
- 64 Colaboradores**
- 66 Información para colaboradores**
- 67 Código de ética**



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



FIME

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



Ingenierías

Ingenierías, Volumen 26, N° 94, enero-junio 2023. Es una publicación semestral, editada por la Universidad Autónoma de Nuevo León, a través de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. Domicilio de la Publicación: Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Pedro de Alba S/N, Edificio 7, San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México, C.P. 66450. Teléfono: +52 (81) 83294020 Ext. 5854, Fax +52 81 83320904. Editor responsable: Dr. Juan Antonio Aguilar Garib. Reserva de derechos al uso exclusivo No. 04-2011-101411064600-102, ISSN: 1405-0676. Número de certificado de licitud de título y contenido: 15,525, otorgado por la Comisión Calificadora de Publicaciones y Revistas Ilustradas de la Secretaría de Gobernación. Registro de marca ante el Instituto Mexicano de la Propiedad Industrial: En trámite. Impresa por: Desarrollo Litográfico S.A. de C.V., M. del Llano 924 Ote., Centro, Monterrey, Nuevo León, México, C.P. 64000. Fecha de terminación de impresión: 30 de enero de 2023. Tiraje: 800 ejemplares. Distribuido por: Universidad Autónoma de Nuevo León, a través de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Pedro de Alba S/N, Edificio 7, San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México, C.P. 66455.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación.

Prohibida su reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización del Editor.

Impreso en México
Todos los derechos reservados
© Copyright 2022
revistaingenierias@uanl.mx

DIRECTORIO

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Dr. Med. Santos Guzmán López
Rector

Dr. Juan Paura García
Secretario General

Mtra. Emilia Edith Vásquez Farías
Secretario Académico

Dr. José Javier Villarreal Tostado
Secretario de Extensión y Cultura

Lic. Antonio Ramos Revillas
Director de Editorial Universitaria

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

Dr. Arnulfo Treviño Cubero
Director

Dr. Fernando Banda Muñoz
Subdirector académico

Dr. Juan Antonio Aguilar Garib
Editor responsable

M.C. Cyntia Ocañas Galván
Dr. Jesús G. Puente Córdova
Redacción

Gregoria Torres Garay
Tipografía y formación

Ing. Cosme D. Cavazos Martínez
Webmaster

René de la Fuente Franco
Impresor

Ana Belén Guzmán Palafox, Cynthia Maribel Carrizales Molina,
Christian Eduardo Chávez Márquez, Ero Edgar Saldaña,
Julio Cesar Puente Casas, Leonardo Martínez Alvarado,
Maria Gabriela Florez Castillo
Auxiliares

CONSEJO EDITORIAL INTERNACIONAL

Dr. Mauricio Cabrera Ríos, Puerto Rico. UPRM / Dra. Ruth Kiminami, Brasil. UFSC, San Pablo / Dr. Juan Jorge Martínez Vega, Francia. Universidad de Toulouse III / Dr. Juan Miguel Sánchez, USA. UT-Austin / Dr. Zarel Valdez Nava, Francia. UPS-INPT-LAPLACE-CNRS.

CONSEJO EDITORIAL MÉXICO

Dr. Benjamín Limón Rodríguez, FIC-UANL / Dr. José Rubén Morones Ibarra, FCFM-UANL / Dr. Ubaldo Ortiz Méndez, FIME-UANL / Dr. Félix Sánchez De Jesús, ICBI-UAEH / Dr. Ernesto Vázquez Martínez, FIME-UANL.

COMITÉ TÉCNICO

Dr. Efraín Alcorta García, FIME-UANL / Dr. Rafael Colás Ortiz, FIME-UANL / Dr. Jesús De León Morales, FIME-UANL / Dr. Virgilio Ángel González González, FIME-UANL / Dr. Carlos Alberto Guerrero Salazar, FIME-UANL / Dra. Oxana Vasilevna Karissova, FCFM-UANL / Dr. Francisco Eugenio López Guerrero, FIME-UANL / Dr. Martín Edgar Reyes Melo, FIME-UANL / Dr. Roger Z. Ríos Mercado, FIME-UANL / Dr. Juan Ángel Rodríguez Liñán, FIME-UANL.

Realización electrónica de sistemas caóticos: Parte 3, en sistemas digitales

Francisco Antonio Rodríguez Cruz, César de Jesús Chacón Rendón,
Angel Rodriguez-Liñan

Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,
Ave. Universidad S/N, Cd. Universitaria, San Nicolás de los Garza, N.L., México.
franciscoantoniordez@hotmail.com, ces.chre98@gmail.com, angel.rodriguezln@uanl.edu.mx

RESUMEN

En las primeras partes de este trabajo, se mostró la realización electrónica con circuitos analógicos de algunos sistemas caóticos continuos cuadráticos y lineales por tramos, mediante circuitos con amplificadores operacionales y otros componentes, así como la equivalencia de sus variables electrónicas con los modelos matemáticos establecidos. En esta tercera parte, se aplica discretización de sistemas dinámicos para la implementación de estos sistemas caóticos en la plataforma de código abierto Arduino, ofreciendo así simplicidad y versatilidad para aplicaciones digitales. Finalmente, se ilustran resultados de su comportamiento caótico y equivalencia numérica con los modelos matemáticos continuos.

PALABRAS CLAVE

Sistemas caóticos, discretización de Euler, arduino.

ABSTRACT

In the first parts of this work, the electronic realization with analog circuits of some continuous quadratic and piecewise linear chaotic systems was shown, using circuits with operational amplifiers and other components, as well as the equivalence of their electronic variables with the established mathematical models. In this third part, discretization of dynamic systems is applied for the implementation of these chaotic systems in the Arduino open-source platform, thus offering simplicity and versatility for digital applications. Finally, results of its chaotic behavior and numerical equivalence with continuous mathematical models are illustrated.

KEYWORDS

Chaotic systems, Euler's discretization, arduino.

INTRODUCCIÓN

En las primeras partes de este trabajo, se abordó la realización electrónica de sistemas no lineales con términos cuadráticos y lineales por tramos que exhiben comportamiento caótico, mediante circuitos analógicos con amplificadores operacionales y otros componentes, así como la equivalencia de sus variables electrónicas con los modelos matemáticos establecidos. Sin embargo, también es posible la implementación de sistemas caóticos en dispositivos digitales, como microcontroladores, procesadores de señales digitales (DSP, por sus siglas en inglés), FPGA (del inglés *field-programmable gate array*) u otros¹, sus implementaciones y aplicaciones han ido aumentando debido al auge actual de las redes digitales y los sistemas embebidos, como en telecomunicaciones²⁻⁵.

En esta tercera parte, se aplica discretización de sistemas dinámicos para su implementación digital en la plataforma de código abierto Arduino, ofreciendo así simplicidad y versatilidad para aplicaciones digitales. Particularmente, se utiliza el método de discretización de Euler en la siguiente sección para ilustrar la discretización en el tiempo de los sistemas dinámicos, por ser uno de los métodos más simples mediante los cuales se obtiene su modelo en ecuaciones en diferencias. En la sección posterior, se muestran sencillos códigos de programación en Arduino con los cuales se puede implementar los sistemas caóticos, cuya salida son digitales. Luego, se presenta la adquisición de datos con la extensión PLX-DAQ, que permite exportar los datos de Arduino al paquete Microsoft Excel, generando archivos de datos fáciles de manipular y procesar con muchas aplicaciones y dispositivos digitales. Se ilustran resultados de su comportamiento caótico y equivalencia numérica con los modelos matemáticos continuos. Finalmente, se presentan algunas conclusiones.

DISCRETIZACIÓN DE SISTEMAS CAÓTICOS

Además de la realización con electrónica analógica, como se ha mostrado en las primeras partes de este trabajo, los sistemas caóticos también pueden embeberse en dispositivos digitales. Para ello, es necesaria la discretización en el tiempo de las ecuaciones dinámicas. Uno de los métodos de discretización más sencillos y conocidos es el método de Euler^{1,4}, el cual brinda la posibilidad a los dispositivos digitales de realizar las operaciones con menor complejidad. Aunque hay métodos más estables y precisos, resulta conveniente utilizarlo cuando no se necesita mucha exactitud de los valores calculados y se quiere reducir el esfuerzo computacional⁴.

El método de discretización de Euler se explica de forma resumida a continuación:

Sea el modelo dinámico de un sistema caótico escrito como la función $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))$, donde x es el vector de variables de estado. Puesto que por definición $\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$, si $t = k\Delta t$ con $k=0,1,2,\dots,N$ y Δt un pequeño incremento constante de tiempo, es fácil deducir que $x(k+1) \approx x(k) + \Delta t \cdot f(x(k))$.

De esta manera, es posible calcular el valor en tiempo discreto de $x(k+1)$ a partir de su valor actual $x(k)$ y del modelo $f(x(k))$. Iniciando en $k=0$ y repitiendo iterativamente este proceso hasta la cantidad N de muestras de tiempo que se deseen, se reproduce la trayectoria de los estados $x(k)$ en tiempo discreto del sistema dinámico.

Entonces, la forma discreta del sistema Lorenz adimensional⁶ resulta en

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + \Delta t[\sigma(x_2(k) - x_1(k))] \\ x_2(k+1) = x_2(k) + \Delta t[\rho x_1(k) - x_2(k) - x_1(k)x_3(k)] \\ x_3(k+1) = x_3(k) + \Delta t[x_1(k)x_2(k) - \beta x_3(k)] \end{cases} \quad (1)$$

El sistema Lü adimensional⁷ discretizado resulta:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + \Delta t[a(x_2(k) - x_1(k))] \\ x_2(k+1) = x_2(k) + \Delta t[-x_1(k)x_3(k) + cx_2(k)] \\ x_3(k+1) = x_3(k) + \Delta t[x_1(k)x_2(k) - bx_3(k)] \end{cases} \quad (2)$$

El sistema Chen adimensional⁸ discretizado resulta:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + \Delta t[a(x_2(k) - x_1(k))] \\ x_2(k+1) = x_2(k) + \Delta t[(c-a)x_1(k) - x_1(k)x_3(k) + cx_2(k)] \\ x_3(k+1) = x_3(k) + \Delta t[x_1(k)x_2(k) - bx_3(k)] \end{cases} \quad (3)$$

El sistema Rössler adimensional⁹ discretizado resulta:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + \Delta t[-x_2(k) - x_3(k)] \\ x_2(k+1) = x_2(k) + \Delta t[x_1(k) + ax_2(k)] \\ x_3(k+1) = x_3(k) + \Delta t[b + x_3(k)[x_1(k) - c]] \end{cases} \quad (4)$$

El sistema Liu-Chen adimensional¹⁰ discretizado resulta:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + \Delta t[ax_1(k) - x_2(k)x_3(k)] \\ x_2(k+1) = x_2(k) + \Delta t[-bx_2(k) + x_1(k)x_3(k)] \\ x_3(k+1) = x_3(k) + \Delta t[-cx_3(k) + x_1(k)x_2(k)] \end{cases} \quad (5)$$

El sistema de Malasoma adimensional¹¹ discretizado resulta:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + \Delta t[x_2(k)] \\ x_2(k+1) = x_2(k) + \Delta t[x_3(k)] \\ x_3(k+1) = x_3(k) + \Delta t[-\alpha x_3(k) - x_1(k) + x_1(k)x_2(k)] \end{cases} \quad (6)$$

El sistema MACM adimensional³ discretizado resulta:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + \Delta t[-ax_1(k) - bx_2(k)x_3(k)] \\ x_2(k+1) = x_2(k) + \Delta t[-x_1(k) + cx_2(k)] \\ x_3(k+1) = x_3(k) + \Delta t[d - x_2^2(k) - x_3(k)] \end{cases} \quad (7)$$

El sistema afín a Rössler adimensional¹² discretizado resulta:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + \Delta t[-\alpha x_1(k) - \beta x_2(k) - \lambda x_3(k)] \\ x_2(k+1) = x_2(k) + \Delta t[x_1(k) + \gamma x_2(k)] \\ x_3(k+1) = x_3(k) + \Delta t[-\eta(x_1(k)) - x_3(k)] \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{con } \eta(x_1(k)) = \begin{cases} 0, & x_1(k) \leq 3 \\ -\mu(x_1(k) - 3), & x_1(k) > 3 \end{cases}$$

El sistema de Chua adimensional¹³ discretizado resulta:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + \Delta t \cdot \alpha[x_2(k) - x_1(k) - \eta(k)] \\ x_2(k+1) = x_2(k) + \Delta t[x_1(k) - x_2(k) + x_3(k)] \\ x_3(k+1) = x_3(k) + \Delta t[-\beta x_2(k) - \gamma x_3(k)] \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{con } \eta(k) = \begin{cases} bx_1(k) - a + b, & x(k) < -1 \\ ax_1(k), & -1 \leq x(k) \leq 1 \\ bx_1(k) + a - b, & x(k) > 1 \end{cases}$$

El circuito de Sprott adimensional¹⁴ discretizado resulta:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + \Delta t[x_2(k)] \\ x_2(k+1) = x_2(k) + \Delta t[x_3(k)] \\ x_3(k+1) = x_3(k) + \Delta t[ax_3(k) - x_2(k) + \eta(x_1(k))] \end{cases} \quad (10)$$

con sus diferentes funciones como **a)** $\eta(x_1(k)) = b|x_1(k)| - c$, **b)** $\eta(x_1(k)) = -b\max(x_1(k), 0) + c$, **c)** $\eta(x_1(k)) = bx_1(k) - c\text{signo}(x_1(k))$ y **d)** $\eta(x_1(k)) = -bx_1(k) + c\text{signo}(x_1(k))$.

En esta parte del trabajo, se propone la implementación de estos sistemas caóticos discretizados en el dispositivo Arduino, ya que es una plataforma muy barata y simple de programar, para posibles aplicaciones digitales que se quieran realizar con estos sistemas caóticos.

DISEÑO DE EXPERIMENTOS

Con el fin de verificar que el comportamiento de los modelos discretizados sea congruente con el comportamiento típico de los sistemas caóticos de Lorenz, Lü, Chen, Rössler, Liu-Chen, Malasoma, MACM, Rössler afín, Chua y Sprott, sus modelos discretizados son embebidos en Arduino y su respuesta se compara con la de los modelos adimensionales en simulaciones numéricas en el software Scilab.



Fig. 1. Dispositivo digital Arduino Mega 2560.

Un código de programación con el que se puede implementar el sistema de Lorenz (1) en Arduino Mega 2560 (dispositivo mostrado en la figura 1) es el siguiente:

```
/* Código para generar señales de atractores caóticos */
//Parámetros del sistema caótico:
  float sigma=10;
  float rho=28;
  float beta=8/3;
  float Dt=0.002;//paso de integración
//Condiciones iniciales:
  float x1=0.001;
  float x2=0.001;
  float x3=0.001;
  float X1,X2,X3;
void setup() // Configura el puerto serial:
{
  Serial.begin(57600);
  Serial.println("CLEARDATA"); //Borra datos anteriores
  Serial.println("LABEL,Hora,Tiempo(segundos),x1,x2,x3"); //Escribe encabezados de las señales que se desea adquirir
  Serial.println("RESETTIMER"); //Restablece el temporizador a 0
}
void loop()//programa principal iterativo
{
  //Imprime valor de señales en muestra k:
  Serial.print("DATA,TIME,TIMER,");
  Serial.print(x1);
  Serial.print(",");
  Serial.print(x2);
  Serial.print(",");
  Serial.print(x3);
  Serial.println();
  //Modelo del sistema caótico:
  X1=x1+Dt*(sigma*(x2-x1));
  X2=x2+Dt*(rho*x1-x2-x1*x3);
  X3=x3+Dt*(x1*x2-beta*x3);
  //Sobreescribe variables para iniciar siguiente iteración:
  x1=X1;
  x2=X2;
  x3=X3;}
```

Para implementar los demás sistemas caóticos, puede utilizarse el mismo código de programación, simplemente reemplazando las líneas de programación correspondientes a sus parámetros y ecuaciones de modelo:

Para el sistema Lü (2), reemplazar las líneas:

```
//Parámetros del sistema caótico
  int a=36;
  int b=3;
  int c=20;

//Modelo del sistema caótico
  X1=x1+Dt*(a*(x2-x1));
  X2=x2+Dt*(-x1*x3+c*x2);
  X3=x3+Dt*(x1*x2-b*x3);
```

Para el sistema Chen (3), reemplazar por las líneas:

```
//Parámetros del sistema caótico
  int a=35;
  int b=3;
  int c=28;

//Modelo del sistema caótico
  X1=x1+Dt*(a*(x2-x1));
  X2=x2+Dt*((c-a)*x1-x1*x3+c*x2);
  X3=x3+Dt*(x1*x2-b*x3);
```

Para el sistema Rössler (4), reemplazar por las siguientes líneas:

```
//Parámetros del sistema caótico:
  float a=0.2;
```

```
float b=0.2;  
float c=5.7;  
float Dt=0.005;//paso de integración
```

```
//Condiciones iniciales:
```

```
float x1=0.01;  
float x2=0.01;  
float x3=0.01;  
float X1,X2,X3;
```

```
//Modelo del sistema caótico:
```

```
X1=x1+Dt*(-x2-x3);  
X2=x2+Dt*(x1+a*x2);  
X3=x3+Dt*(b+x3*(x1-c));
```

Para el sistema Liu-Chen (5), sustituir las siguientes líneas:

```
//Parámetros del sistema caótico:
```

```
int a=5;  
int b=10;  
float c=3.4;  
float Dt=0.0008;//paso de integración
```

```
//Condiciones iniciales:
```

```
float x1=0.1;  
float x2=0.1;  
float x3=0.1;
```

```
//Modelo del sistema caótico:
```

```
X1=x1+Dt*(a*x1-x2*x3);  
X2=x2+Dt*(-b*x2+x1*x3);  
X3=x3+Dt*(-c*x3+x1*x2);
```

Para el sistema caótico de Malasoma (6), reemplazar las siguientes líneas:

```
//Parámetros del sistema caótico
```

```
float alpha=2.04;  
float Dt=0.005;//Paso de integración
```

```
//Condiciones iniciales
```

```
float x1=1;  
float x2=-1;  
float x3=1;
```

```
//Modelo del sistema caótico
```

```
X1=x1+Dt*(x2);  
X2=x2+Dt*(x3);  
X3=x3+Dt*(-alpha*x3-x1+x1*x2);
```

Para el sistema caótico MACM (7), reemplazar las líneas:

```
//Parámetros del sistema caótico:
```

```
float a=1.786;  
float b=2.074;  
float c=0.5;  
float d=1.2;  
float Dt=0.02;//paso de integración
```

```
//Modelo del sistema caótico:
```

```
X1=x1+Dt*(-a*x1-b*x2*x3);  
X2=x2+Dt*(-x1+c*x2);  
X3=x3+Dt*(d-x2*x2-x3);
```

Para el sistema afín a Rössler (8) reemplazar por las líneas:

```
//Parámetros del sistema caótico:
```

```
float alpha=0.05;  
float beta=0.5;  
float lambda=1;  
float gamma=0.23;  
float mu=15;  
float Dt=0.1;//paso de integración  
float eta;
```

```
//Modelo del sistema caótico:
    if(x1>3){
        eta=mu*(x1-3);
    }
    else{
        eta=0;
    }
    X1=x1+Dt*(-alpha*x1-beta*x2-lambda*x3);
    X2=x2+Dt*(x1+gamma*x2);
    X3=x3+Dt*(eta-x3);
```

Para el sistema caótico de Chua (9), reemplazar las líneas:

```
//Parámetros del sistema caótico:
    int alpha=10;
    int beta=18;
    float gamma=0.14;
    float a=-1.3636;
    float b=-0.7364;
    float Dt=0.02;//paso de integración

//Modelo del sistema caótico:
    if(x1<-1){
        eta=b*x1-a+b;
    }
    else{
        if(x1>1){
            eta=b*x1+a-b;
        }
        else{
            eta=a*x1;
        }
    }
    X1=x1+Dt*alpha*(x2-x1-eta);
    X2=x2+Dt*(x1-x2+x3);
    X3=x3+Dt*(-beta*x2-gamma*x3);
```

Para el sistema Sprott (10), reemplazar las siguientes líneas, agregando al final del código las líneas de la función signo:

```
//Parámetros del sistema caótico
    float a=0.6;
    float Dt=0.02;//Paso de integración

//Modelo del sistema caótico (elegir la función eta que corresponda)
    eta=abs(x1)-0.9;           // ----función a)----
    //eta=-7.4*max(x1,0)+0.5;   // ----función b)----
    //eta=1.11*x1-4.5*sign(x1); // ----función c)----
    //eta=-1.2*x1+2*sign(x1);   // ----función d)----
    X1=x1+Dt*x2;
    X2=x2+Dt*x3;
    X3=x3+Dt*(-a*x3-x2+eta);

//Función signo para las funciones c) y d)
    int sign(float val)
    {
        if(val>0) return 1;
        if(val==0) return 0;
        if(val<0) return -1;}
}
```

ADQUISICIÓN DE DATOS DE ARDUINO

Para la adquisición de datos desde Arduino a Excel en tiempo real, se utilizó la extensión PLX-DAQ. Primero, se descarga y descomprime dicha extensión, obtenida de <https://www.parallax.com/downloads/plx-daq>



Fig. 2. Interfaz PLX-DAQ.

Luego, se compila en Arduino el código de programación de la sección anterior correspondiente. Se ejecuta el archivo descomprimido de la extensión 'PLX-DAQ.xlsm', cuya interfaz se muestra en la figura 2. En ella se selecciona el puerto donde está conectado el Arduino y la velocidad en baudios. Se ejecuta el programa de Arduino y entonces se presiona el botón *Connect*, el cual inicia la adquisición de datos en Excel, como se ilustra en la figura 3.

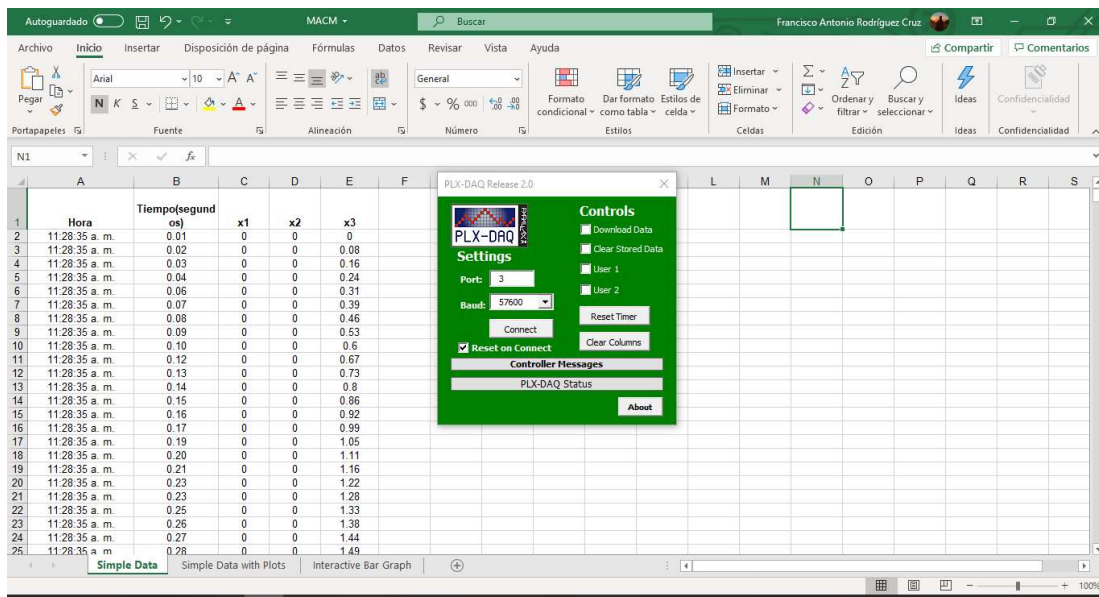


Fig. 3. Adquisición de datos con PLX-DAQ.

RESULTADOS DE SIMULACIONES Y DE IMPLEMENTACIÓN

A continuación, se muestran y comparan los resultados obtenidos de las implementaciones de modelos discretizados y simulaciones de los modelos continuos adimensionales. Los datos numéricos obtenidos se muestran gráficamente en forma de proyecciones de los atractores caóticos en los planos de fase.

Sistema de Lorenz

En la figura 4, se muestra el atractor del sistema continuo adimensional⁶ en Scilab. En la figura 5 se muestra el atractor del modelo discretizado (1) embebido en Arduino, usando la herramienta de adquisición de datos para MS Excel.

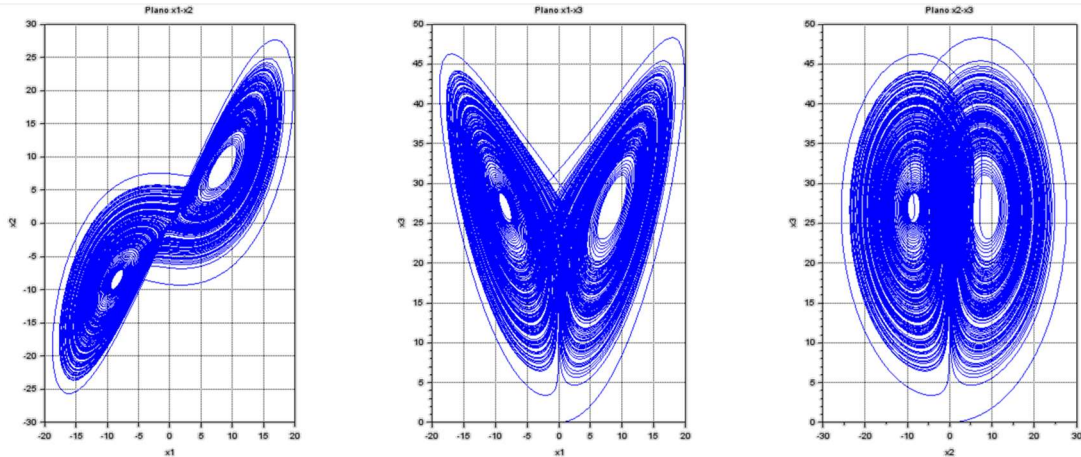


Fig. 4. Atractor del modelo continuo adimensional de Lorenz, en planos x_1 - x_2 , x_1 - x_3 y x_2 - x_3 .

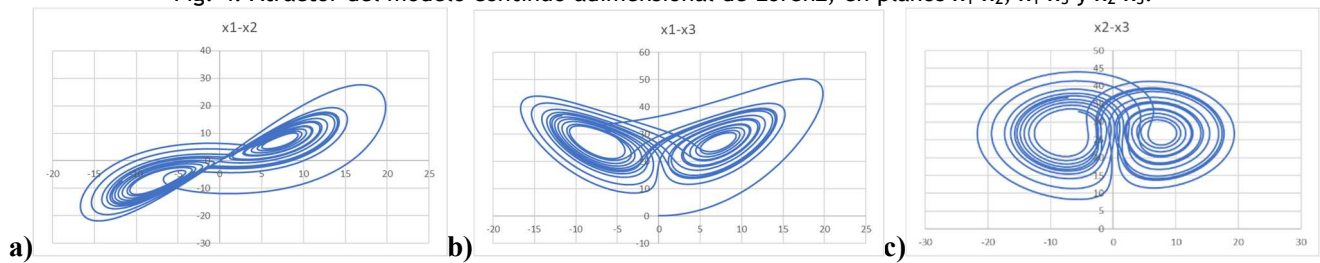


Fig. 5. Atractor del modelo discretizado de Lorenz (1) en Arduino-Excel, en planos a) x_1 - x_2 , b) x_1 - x_3 y c) x_2 - x_3 .

Sistema de Lü

En la figura 6, se muestra el atractor del sistema continuo adimensional⁷ en Scilab. En la figura 7 se muestra el atractor del modelo discretizado (2) embebido en Arduino, usando la herramienta de adquisición de datos para MS Excel.

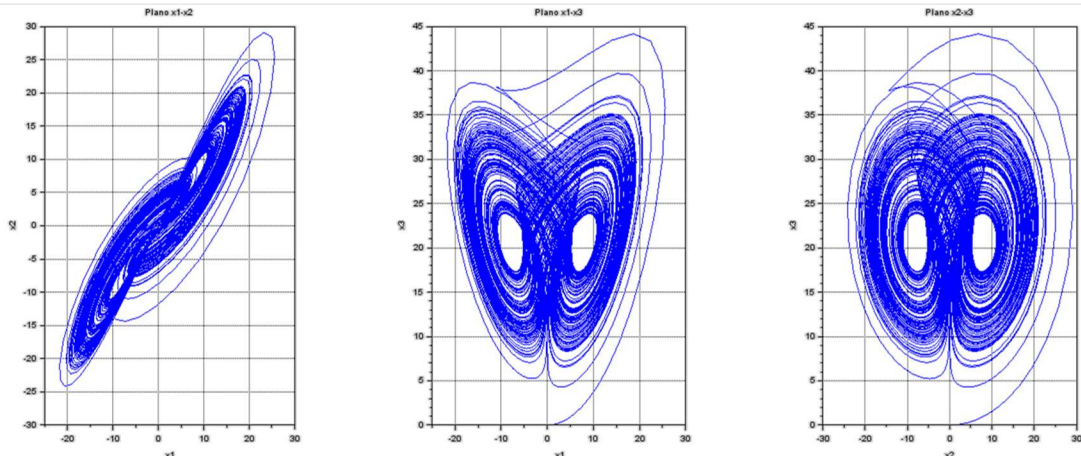


Fig. 6. Atractor del modelo continuo adimensional de Lü, en planos x_1 - x_2 , x_1 - x_3 y x_2 - x_3 .

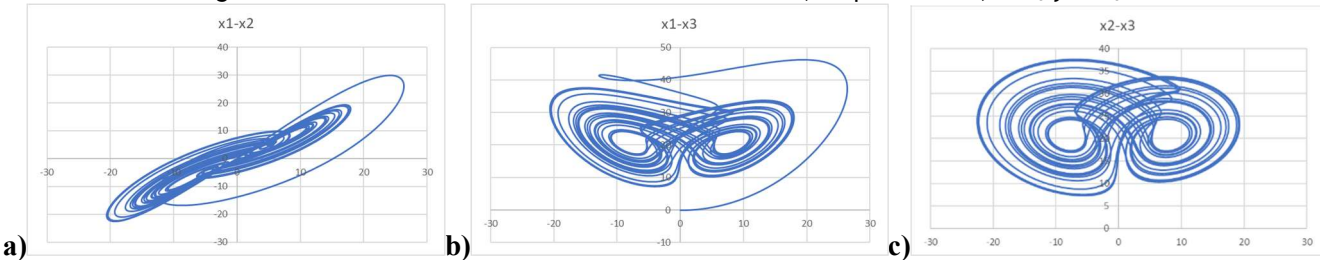


Fig. 7. Atractor del modelo discretizado de Lü (2) en Arduino-Excel, en planos a) x_1 - x_2 , b) x_1 - x_3 y c) x_2 - x_3 .

Sistema de Chen

En la figura 8, se muestra el atractor del sistema continuo adimensional⁸ en Scilab. En la figura 9 se muestra el atractor del modelo discretizado (3) embebido en Arduino, usando la herramienta de adquisición de datos para MS Excel.

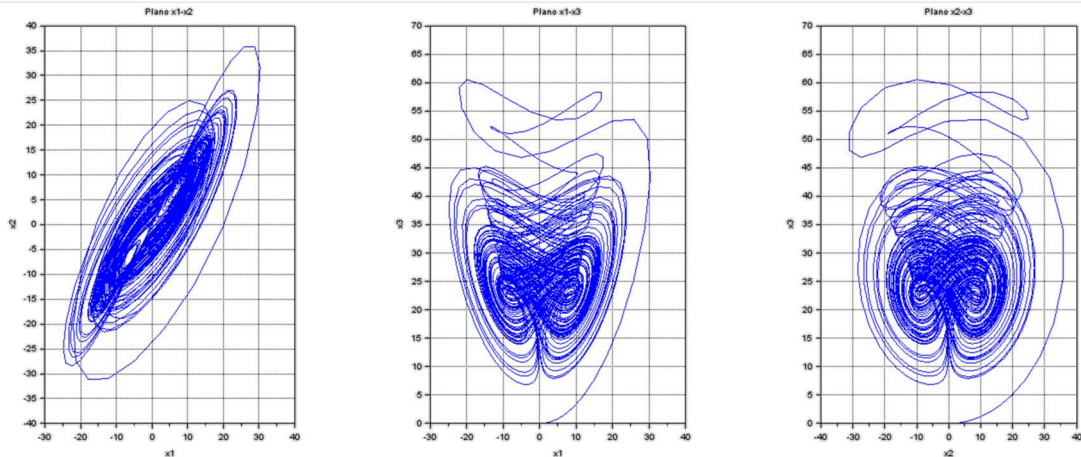


Fig. 8. Atractor del modelo continuo adimensional de Chen, en planos x_1 - x_2 , x_1 - x_3 y x_2 - x_3 .

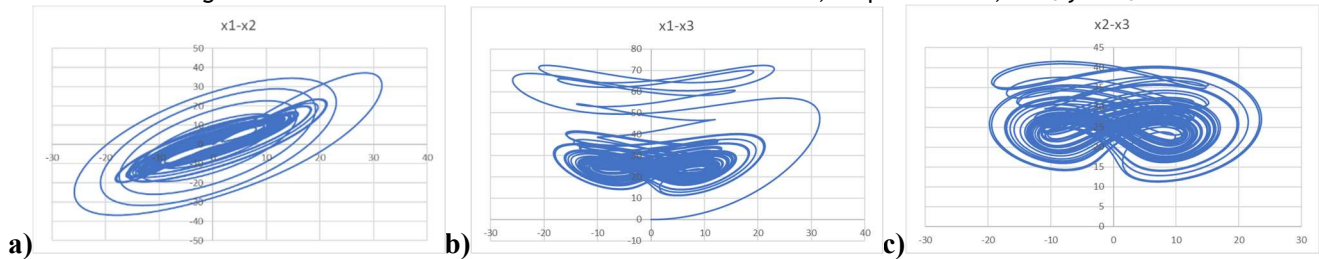


Fig. 9. Atractor del modelo discretizado de Chen (3) en Arduino-Excel, en planos a) x_1 - x_2 , b) x_1 - x_3 y c) x_2 - x_3 .

Sistema de Rössler

En la figura 10, se muestra el atractor del sistema continuo adimensional⁹ en Scilab. En la figura 11 se muestra el atractor del modelo discretizado (4) embebido en Arduino, usando la herramienta de adquisición de datos para MS Excel.

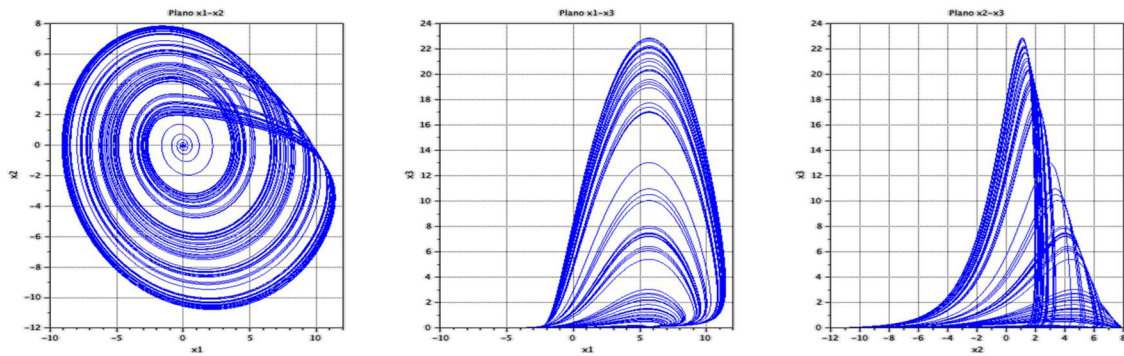


Fig. 10. Atractor del modelo continuo adimensional de Rössler, en planos x_1 - x_2 , x_1 - x_3 y x_2 - x_3 .

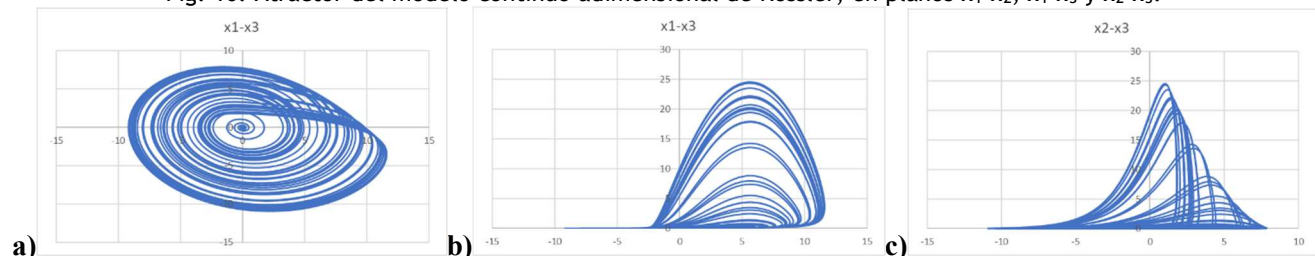


Fig. 11. Atractor del modelo discretizado de Rössler (4) en Arduino-Excel, en planos a) x_1 - x_2 , b) x_1 - x_3 y c) x_2 - x_3 .

Sistema Liu-Chen

En la figura 12, se muestra el atractor del sistema continuo adimensional¹⁰ en Scilab. En la figura 13 se muestra el atractor del modelo discretizado (5) embebido en Arduino, usando la herramienta de adquisición de datos para MS Excel.

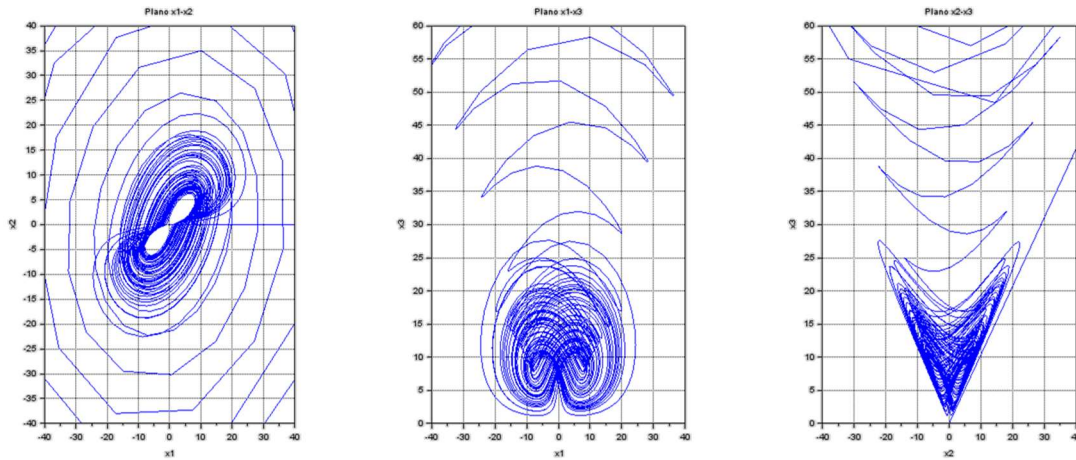


Fig. 12. Atractor del modelo continuo adimensional de Liu-Chen, en planos x_1 - x_2 , x_1 - x_3 y x_2 - x_3 .

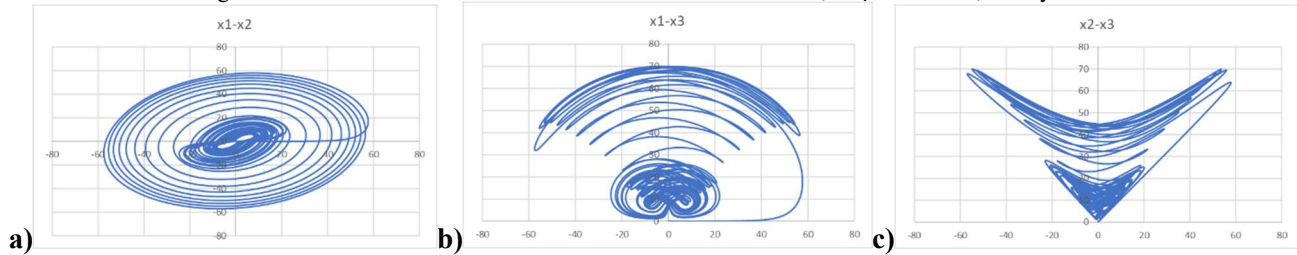


Fig. 13. Atractor del modelo discretizado Liu-Chen (5) en Arduino-Excel, en planos a) x_1 - x_2 , b) x_1 - x_3 y c) x_2 - x_3 .

Sistema Malasoma

En la figura 14, se muestra el atractor del sistema continuo adimensional¹¹ en Scilab. En la figura 15 se muestra el atractor del modelo discretizado (6) embebido en Arduino, usando la herramienta de adquisición de datos para MS Excel.

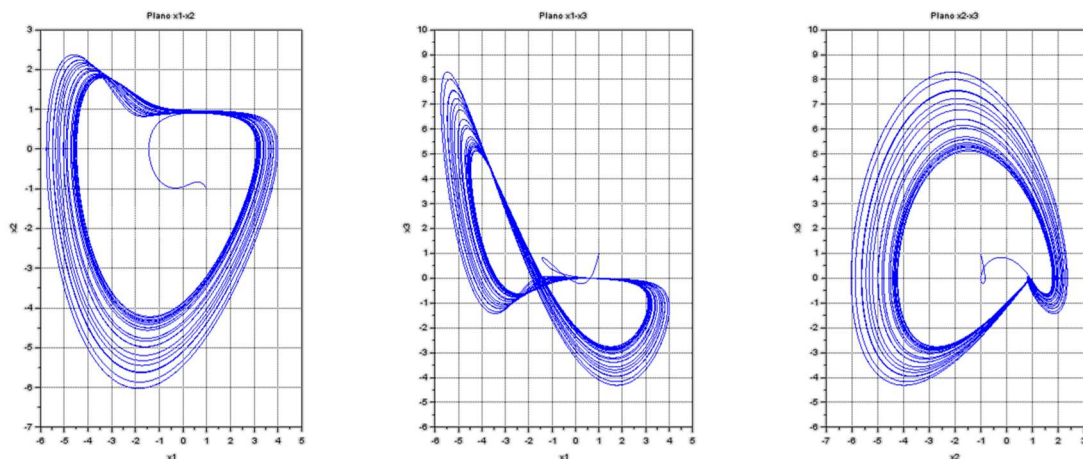


Fig. 14. Atractor del modelo continuo adimensional de Malasoma, en planos x_1 - x_2 , x_1 - x_3 y x_2 - x_3 .

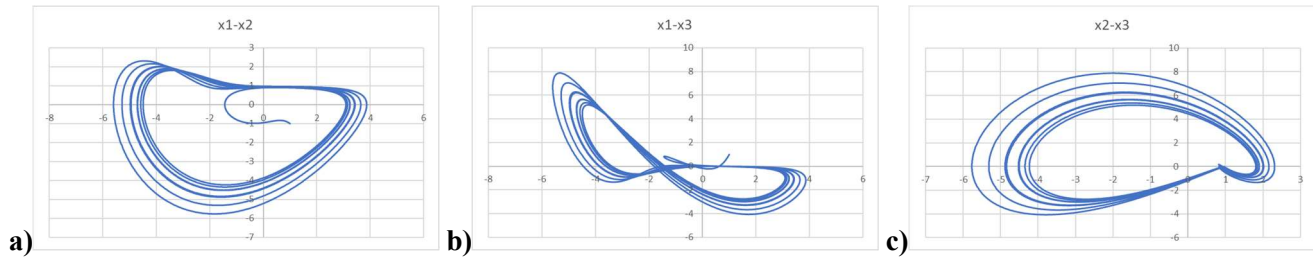


Fig. 15. Atractor del modelo discretizado Malasoma (6) en Arduino-Excel, en planos a) x_1 - x_2 , b) x_1 - x_3 y c) x_2 - x_3 .

Sistema MACM

En la figura 16, se muestra el atractor del sistema continuo adimensional³ en Scilab. En la figura 17 se muestra el atractor del modelo discretizado (7) embebido en Arduino, usando la herramienta de adquisición de datos para MS Excel.

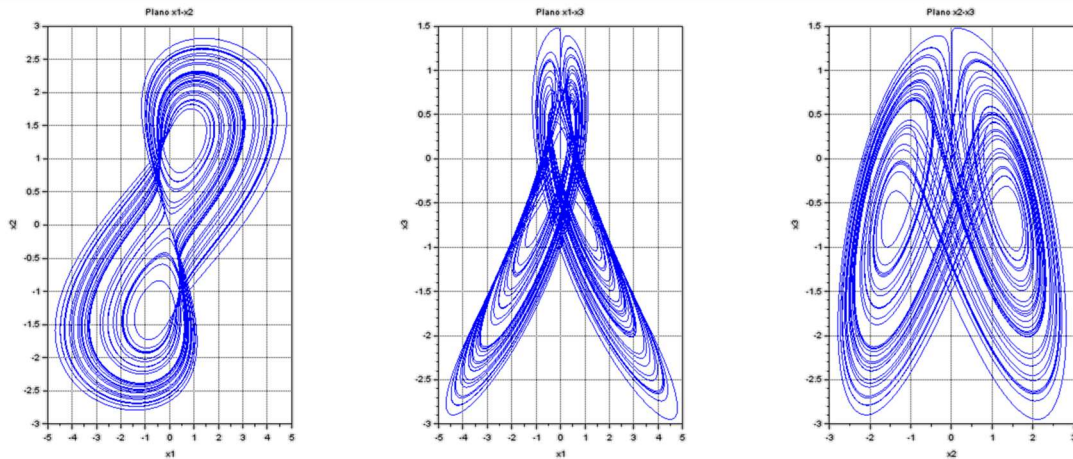


Fig. 16. Atractor del modelo continuo adimensional MACM, en planos x_1 - x_2 , x_1 - x_3 y x_2 - x_3 .

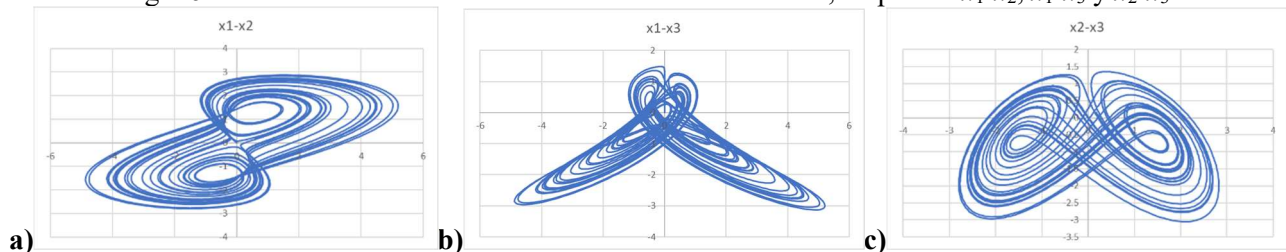


Fig. 17. Atractor del modelo discretizado MACM (7) en Arduino-Excel, en planos a) x_1 - x_2 , b) x_1 - x_3 y c) x_2 - x_3 .

Sistema afín a Rössler

En la figura 18, se muestra el atractor del sistema continuo adimensional¹² en Scilab. En la figura 19 se muestra el atractor del modelo discretizado (8) embebido en Arduino, usando la herramienta de adquisición de datos para MS Excel.

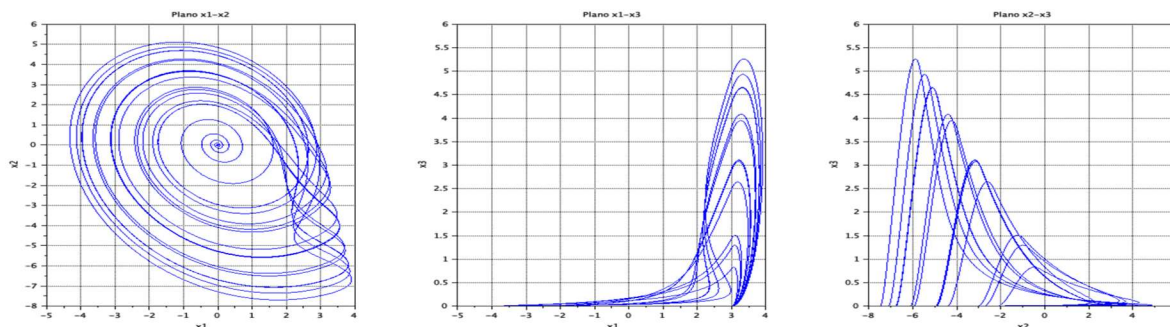


Fig. 18. Atractor del modelo continuo adimensional afín a Rössler, en planos x_1 - x_2 , x_1 - x_3 y x_2 - x_3 .

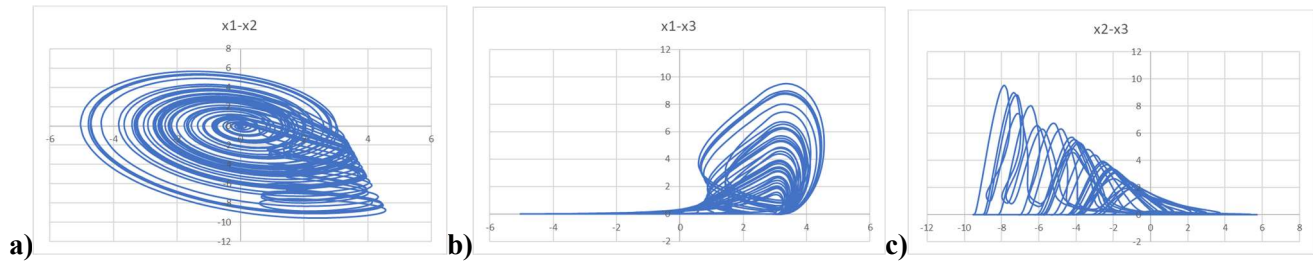


Fig. 19. Atractor del modelo discretizado afín a Rössler (8) en Arduino-Excel, en planos a) x_1-x_2 , b) x_1-x_3 y c) x_2-x_3 .

Sistema de Chua

En la figura 20, se muestra el atractor del sistema continuo adimensional¹³ en Scilab. En la figura 21 se muestra el atractor del modelo discretizado (9) embebido en Arduino, usando la herramienta de adquisición de datos para MS Excel.

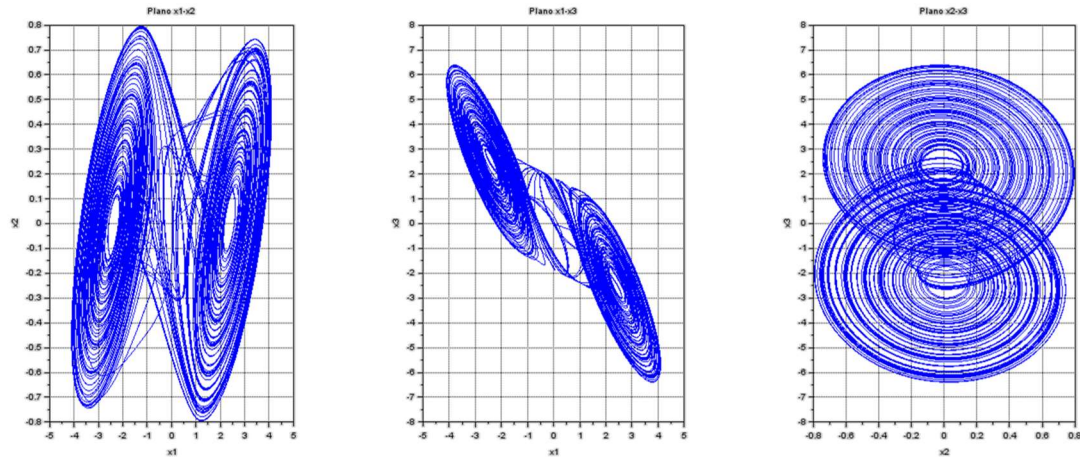


Fig. 20. Atractor del modelo continuo adimensional de Chua, en planos x_1-x_2 , x_1-x_3 y x_2-x_3 .

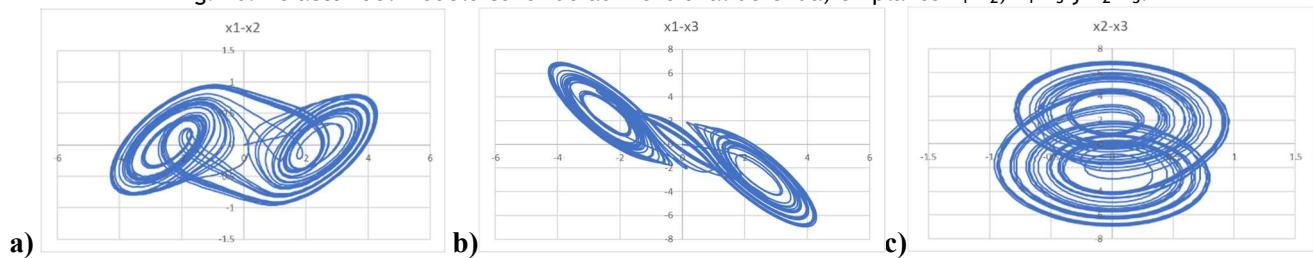


Fig. 21. Atractor del modelo discretizado de Chua (9) en Arduino-Excel, en planos a) x_1-x_2 , b) x_1-x_3 y c) x_2-x_3 .

Sistemas Sprott

En la figura 22, se muestra el atractor del sistema continuo adimensional¹⁴ en Scilab. En la figura 23 se muestra el atractor del modelo (10) embebido en Arduino para a), usando la herramienta de adquisición de datos para MS Excel.

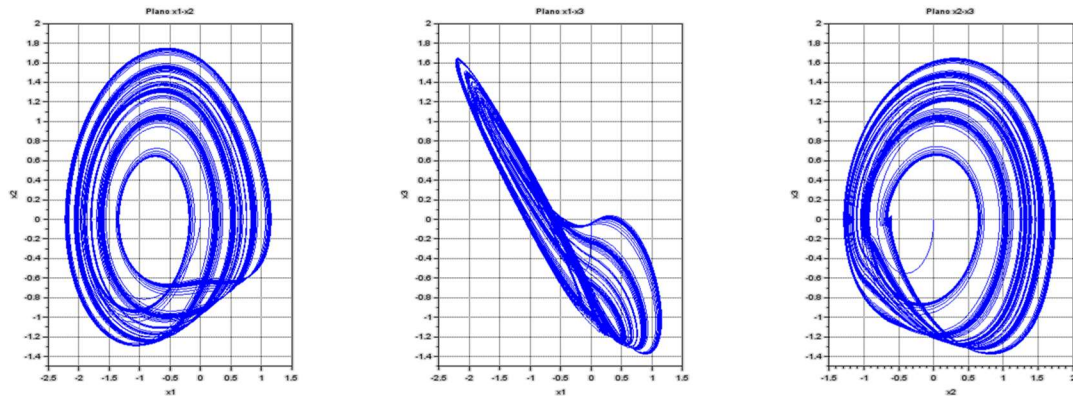


Fig. 22. Atractor del modelo continuo adimensional de Sprott a), en planos x_1 - x_2 , x_1 - x_3 y x_2 - x_3 .

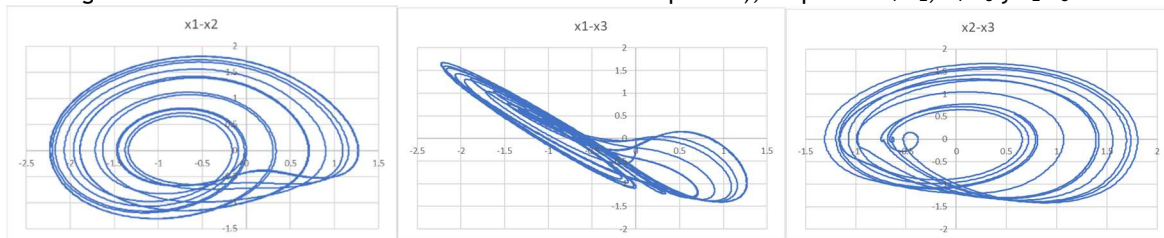


Fig. 23. Atractor del modelo discretizado de Sprott (10) para a), en Arduino-Excel, en planos a) x_1 - x_2 , b) x_1 - x_3 y c) x_2 - x_3 .

En la figura 24, se muestra el atractor del sistema continuo adimensional¹⁴ en Scilab. En la figura 25 se muestra el atractor del modelo (10) embebido en Arduino para b), usando la herramienta de adquisición de datos para MS Excel.

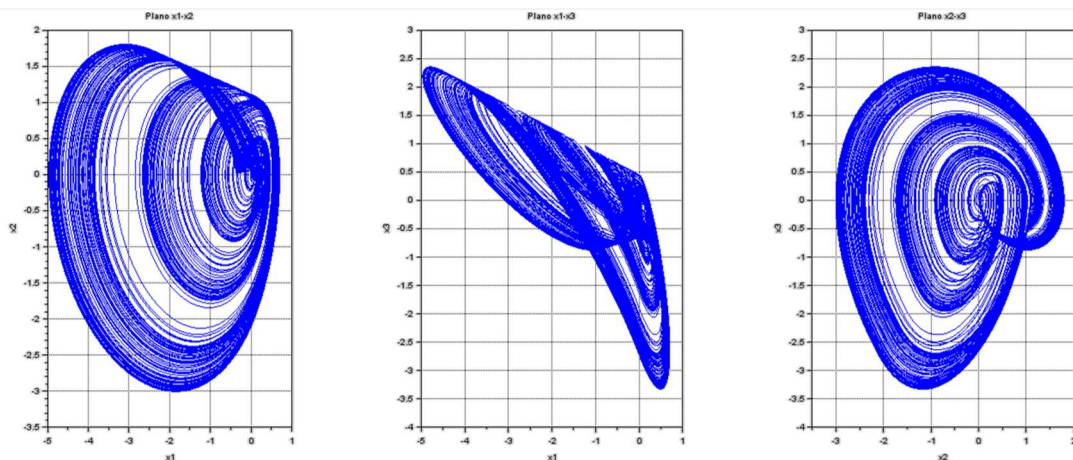


Fig. 24. Atractor del modelo continuo adimensional de Sprott b), en planos x_1 - x_2 , x_1 - x_3 y x_2 - x_3 .

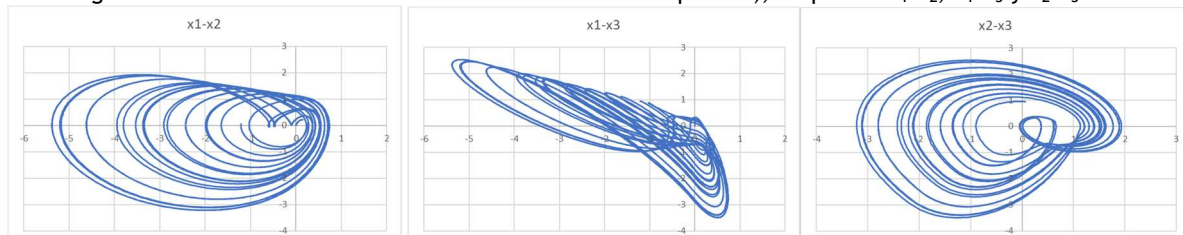


Fig. 25. Atractor del modelo discretizado de Sprott (10) para b), en Arduino-Excel, en planos a) x_1 - x_2 , b) x_1 - x_3 y c) x_2 - x_3 .

En la figura 26, se muestra el atractor del sistema continuo adimensional¹⁴ en Scilab. En la figura 27 se muestra el atractor del modelo (10) embebido en Arduino para c), usando la herramienta de adquisición de datos para MS Excel.

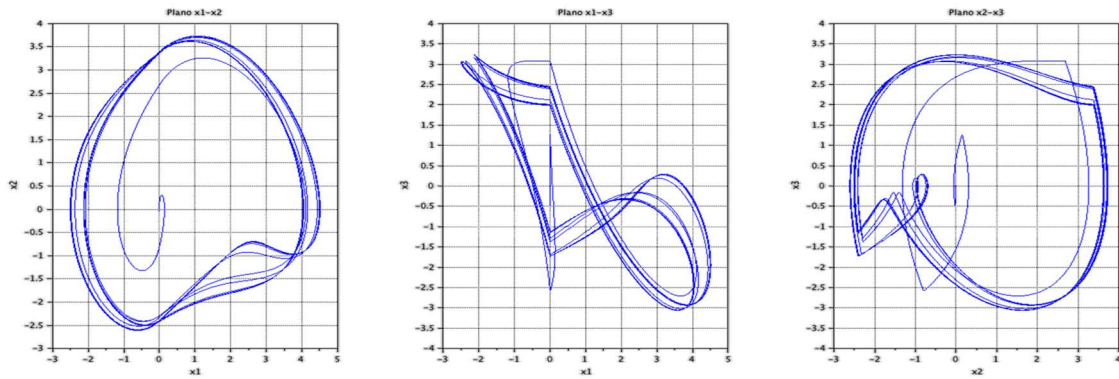


Fig. 26. Atractor del modelo continuo adimensional de Sprott c), en planos x_1-x_2 , x_1-x_3 y x_2-x_3 .

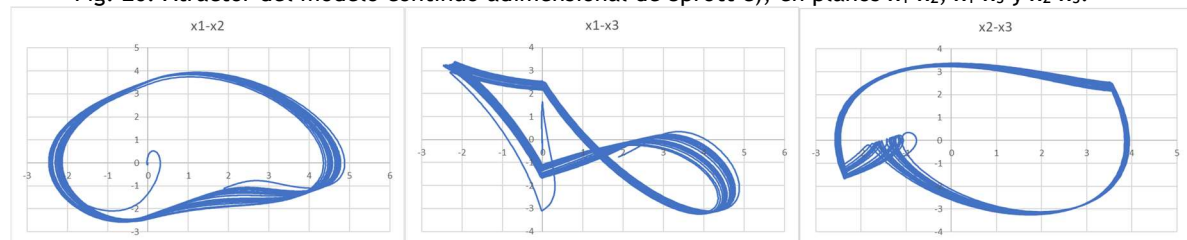


Fig. 27. Atractor del modelo discretizado de Sprott (10) para c), en Arduino-Excel, en planos a) x_1-x_2 , b) x_1-x_3 y c) x_2-x_3 .

En la figura 28, se muestra el atractor del sistema continuo adimensional¹⁴ en Scilab. En la figura 29 se muestra el atractor del modelo (10) embebido en Arduino para d), usando la herramienta de adquisición de datos para MS Excel.

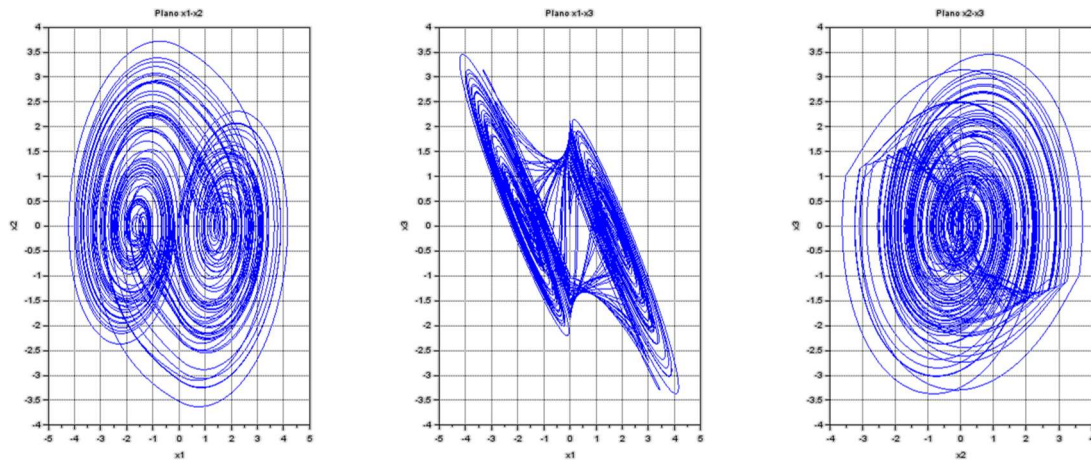


Fig. 28. Atractor del modelo continuo adimensional de Sprott d), en planos x_1-x_2 , x_1-x_3 y x_2-x_3 .

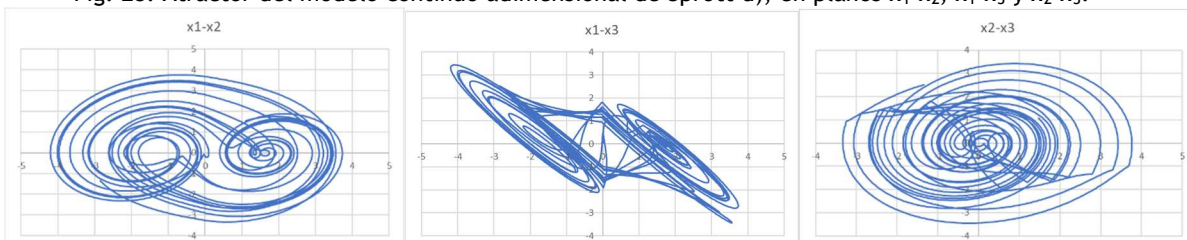


Fig. 29. Atractor del modelo discretizado de Sprott (10) para d), en Arduino-Excel, en planos a) x_1-x_2 , b) x_1-x_3 y c) x_2-x_3 .

Discusión de resultados

En las figuras 4 a 29, se puede apreciar que los atractores producidos con el microcontrolador Arduino presentan características de forma y amplitud congruentes con los atractores caóticos típicos de los modelos matemáticos continuos adimensionales respectivos. Por lo que puede concluirse que son válidos los modelos discretizados por el método de Euler presentados de (1) a (10). Como es bien sabido, mediante este método de discretización fue

complicado lograr que los atractores se mantuvieran estables, ya que, elegir un tiempo de muestreo muy grande o pequeño influye en la estabilidad del algoritmo. No obstante, se logró encontrar los tiempos de muestreo adecuados, basados en algunos trabajos de la literatura^{1,4}, así como selección arbitraria de sus valores empíricamente.

CONCLUSIONES

En esta tercera parte, se mostró la implementación digital de sistemas caóticos en la plataforma de código abierto Arduino. Particularmente, se utilizó el método de discretización de Euler en el tiempo para sistemas dinámicos, por ser uno de los métodos más simples mediante los cuales se obtiene su modelo en ecuaciones en diferencias. Aunque es complicado encontrar los tiempos de muestreo adecuados para la estabilidad de los atractores, se logró seleccionarlos para que los atractores obtenidos con Arduino, e ilustrados con Excel, fueran congruentes con los de sistemas caóticos continuos respectivos. Estas implementaciones digitales facilitan sus aplicaciones en diversos campos como el control y las comunicaciones, además que la misma metodología puede extenderse a otras plataformas digitales de programación y sistemas embebidos, así como utilizar mejores métodos de discretización.

REFERENCIAS

1. Chiu, R., Mora-González, M., and Lopez-Mancilla, D. Osciladores Caóticos implementados en Microcontrolador PIC18F. *Nova scientia*. (2013) 6(12): 60-77.
2. Valcárcel, S. Generación de Secuencias Caóticas para CDMA. Tesis, Universidad Politécnica de Madrid. (2003).
3. Méndez-Ramírez, R., Cruz-Hernández, C., Arellano-Delgado, A. and Martínez-Clark, R. A new simple chaotic Lorenz-type system and its digital realization using a TFT touch-screen display embedded system. *Complexity*, 2017(6820492): 1–13.
4. Méndez-Ramírez, R. Implementación de osciladores caóticos en sistemas embebidos y aplicaciones. Tesis de doctorado. Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, 2018.
5. Platas-Garza, M.A., Zambrano-Serrano, E., Rodríguez-Cruz, J.R., Posadas-Castillo, C. Implementation of an encrypted-compressed image wireless transmission scheme based on chaotic fractional-order systems. *Chinese Journal of Physics*, 2020, In Press: <https://doi.org/10.1016/j.cjph.2020.11.014>
6. Lorenz, E.N. Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, (1963) 20: 130-141.
7. Lü, J. and Chen, G. A New Chaotic Attractor Coined. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, (2002) 12, 659-661.
8. Chen, G. and Ueta, T. Yet Another Chaotic Attractor. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, (1999) 9, 1465-1466.
9. Rössler, O. E. An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*. (1976) 57(5): 397-398.
10. Pehlivan İ, Kurt E, Lai Q, Basaran A, Kutlu M. A Multiscroll Chaotic Attractor and its Electronic Circuit Implementation, *Chaos Theory and Applications*. 2019; 1(1): 29-37.
11. Malasoma, J.M. A new class of minimal chaotic flows. *Physics Letters A*, 2002; 305: 52-58.
12. Zanin M, Sevilla-Escoboza JR, Jaimes-Reátegui R, García-López JH, Huerta-Cuellar G, Pisarchik AN. Synchronization attack to chaotic communication systems. *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*. (2013) 1: 333-343.
13. Matsumoto, T. A Chaotic Attractor from Chua's Circuit. *IEEE Trans. Circuits Syst.* (1984) 31(12): 1055-1058.
14. Sprott, J.C. A new class of chaotic circuit. *Physics Letters A*, 2000; 266: 19-23.

Respuesta en frecuencia para sistemas en espacio de estados

Efraín Alcorta García, David Alejandro Díaz Romero, Rodolfo Castillo Martínez, Luis Humberto Rodríguez Alfaro

Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, México.
efrain.alcortagr@uanl.edu.mx, david.diazrr@uanl.edu.mx, rodolfo.castillomr@uanl.edu.mx,
luis.rodriguezlf@uanl.edu.mx

RESUMEN

La respuesta en frecuencia de sistemas lineales es una popular herramienta utilizada en el análisis y diseño de sistemas de control automático. La forma común de obtener la respuesta en frecuencia es a partir de la representación entrada-salida (función de transferencia) de un sistema. En este trabajo se presenta una manera novedosa para obtener la respuesta en frecuencia partiendo de la representación en el espacio de estados. El resultado es obtenido mediante la caracterización de la señal de entrada (función senoidal) mediante un sistema externo adicional, así como la evaluación del estado estacionario. La determinación de la fase y magnitud se obtiene de la solución a una ecuación de Sylvester reiteradamente para diferentes valores de la frecuencia en un intervalo específico junto con algunas manipulaciones algebraicas y uso de identidades trigonométricas. El procedimiento es mostrado mediante ejemplos y comparado con las maneras clásicas de obtener la respuesta en frecuencia.

PALABRAS CLAVE

Respuesta en frecuencia, espacio de estados, sistema lineal, ecuación de Sylvester.

ABSTRACT

The frequency response of linear systems is a popular tool used in the analysis and design of automatic control systems. The common way to obtain the frequency response is from the input-output representation (transfer function) of a system. In this paper we present a novel way to obtain the frequency response from the state space representation. The result is obtained by characterizing the input signal (sine function) by means of an additional external system, as well as the evaluation of the steady state. The determination of phase and magnitude is obtained from the solution to a Sylvester equation repeatedly for different values of the frequency in a specific interval together with some algebraic manipulations and use of trigonometric identities. The procedure is shown by examples and compared with classical ways of obtaining the frequency response.

KEYWORDS

Frequency response, state space, linear system, Sylvester equation.

INTRODUCCIÓN

Una de las herramientas más importantes para el análisis y diseño de sistemas de control en los últimos 80 años es el diagrama de Bode, el cual está basado en la respuesta en frecuencia de sistemas lineales ver¹ y ². Siguiendo estos trabajos de Bode la obtención de la respuesta en frecuencia es lograda con base en la representación entrada-salida y este es también la forma más común de calcularla.³ Otro camino para llegar a la respuesta en frecuencia es de manera práctica a través de experimentos.⁴

Un grupo de investigación alrededor del prof. H. Nijmeijer desarrolló un procedimiento que permite obtener la respuesta en frecuencia de sistemas convergentes (no lineales).⁵ Es claro que, debido a la naturaleza no lineal de los sistemas estudiados, se hace necesario partir de la representación de estados no lineal. Alternativamente en ⁶ se analiza la respuesta armónica en estado estacionario de un sistema lineal e invariante en el tiempo.

En este trabajo, inspirados por las ideas de⁵ y el desarrollo de,⁶ se propone un procedimiento aplicable a sistemas lineales e invariantes en el tiempo, con el cual se puede determinar la respuesta en frecuencia de un sistema representado en espacio de estados sin necesidad de utilizar la representación entrada-salida (también conocida como matriz de transferencia). La obtención del algoritmo propuesto en este trabajo sigue los principios esenciales utilizados por Bode.^{1,2} Es decir, la caracterización de la entrada sinusoidal, así como el hecho de alcanzar el estado

estacionario. La solución propuesta puede obtenerse siguiendo pasos matemáticamente fundamentados y desde el punto de vista de programación con una visión práctica y potencialmente útil para diseño en el espacio de estados. Este trabajo pretende reunir y hacer accesibles una serie de resultados disponibles en la literatura especializada,^{5,6} pero aplicados a sistemas lineales.

En lo que sigue se discute brevemente el concepto de respuesta en frecuencia, así como la caracterización de una señal senoidal como salida de un sistema lineal sin entrada (oscilador armónico). Después se discute el procedimiento propuesto deducido paso a paso y concluyendo con un algoritmo para la obtención de la respuesta en frecuencia. Un ejemplo sirve para mostrar la eficacia del procedimiento propuesto. El trabajo es completado con las conclusiones.

PRELIMINARES

Respuesta en frecuencia de sistemas lineales

Considerando un sistema con una entrada senoidal. La gráfica de la magnitud y de la fase de la salida en estado estacionario de un sistema es conocida como respuesta en frecuencia. Consecuentemente, dado que se requiere alcanzar el estado estacionario de la salida, es necesario que el sistema en cuestión sea estable.

El punto de partida es un sistema lineal e invariante en el tiempo representado por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{1}$$

Y la representación entrada-salida correspondiente es:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D\tag{2}$$

Donde s representa la variable de Laplace. Para una entrada $u(t) = A \text{ sen}(\omega t)$, la respuesta en frecuencia del sistema (1) se puede obtener al substituir la variable de Laplace s por $j\omega$ (solo la parte imaginaria).³ Después de algunas operaciones, y sabiendo que $G(j\omega)$ es un número complejo, resulta:

$$y_{ss}(t) = A |G(j\omega)| \text{ sen}(j\omega + \varphi)\tag{3}$$

donde

$$G(j\omega) = a(\omega) + jb(\omega)\tag{4}$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{(a(\omega))^2 + (b(\omega))^2}\tag{5}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left(\sqrt{(a(\omega))^2 + (b(\omega))^2} \right)\tag{6}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{b(\omega)}{a(\omega)} \right)\tag{7}$$

La respuesta en frecuencia se representa en una gráfica semilogarítmica, escala lineal para la magnitud en decibelios y logarítmica para la frecuencia. De la misma manera para la fase, escala lineal para el ángulo de fase y logarítmica para la frecuencia. Estas graficas son conocidas como diagrama de Bode.¹ La respuesta en frecuencia muestra que para un sistema lineal con una entrada senoidal y frecuencia ω , la salida correspondiente será la misma señal senoidal de la entrada con la misma frecuencia ω , pero con amplitud y fase que varían de acuerdo con la frecuencia.

SISTEMA EXTERNO PARA OBTENER ENTRADA SENOIDAL AL SISTEMA

La idea es poder generar la señal senoidal requerida para suministrar al sistema. Considerar un oscilador armónico, que es un sistema lineal homogéneo (sin entradas):

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) &= Sv(t) \\ u(t) &= \Gamma v(t)\end{aligned}\tag{8}$$

$$\text{con } S = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}; \quad \Gamma = [\gamma_1 \quad \gamma_2]; \text{ y } v(0) = \begin{bmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{bmatrix}.$$

Note que la salida del sistema externo (8), $u(t)$, será utilizada como entrada al sistema (1). La solución al sistema (8) se puede obtener, por ejemplo, aplicando la transformada de Laplace. La solución queda:

$$v(t) = e^{\begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} t} v(0) \quad (9)$$

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} t} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \text{sen}(\omega t) \\ \text{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Y la solución se puede escribir como:

$$v(t) = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \text{sen}(\omega t) \\ \text{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$u(t) = [\gamma_1 \quad \gamma_2] \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \text{sen}(\omega t) \\ \text{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{bmatrix} \quad (12)$$

Como se aprecia, para que la salida $u(t)$ sea $\text{sen}(\omega t)$ se pueden obtener las siguientes combinaciones:

$$\begin{aligned} &\{v_1(0) = 0, v_2(0) \neq 0, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0\} \\ &\{v_1(0) \neq 0, v_2(0) = 0, \gamma_1 = 0, \gamma_2 = -1\} \end{aligned}$$

OBTENCIÓN DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA

La idea es proponer un algoritmo alternativo a la manera clásica para obtener la respuesta en frecuencia, partiendo de la representación en espacio de estados y con la representación de la entrada mediante un exosistema. Para garantizar la existencia del estado estacionario se requiere que la matriz A del sistema tenga valores propios con parte real negativa.

Seleccionando

$$\{v_1(0) = 0, \quad v_2(0) = 1, \quad \gamma_1 = u_0, \quad \gamma_2 = 0\}$$

La salida del sistema externo, $u(t)$, se puede escribir como:

$$u(t) = \Gamma v(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2(0) \text{sen}(\omega t) \\ v_2(0) \cos(\omega t) \end{bmatrix} = v_2(0) \text{sen}(\omega t), \quad (13)$$

donde la amplitud de la función senoidal es u_0 (constante).

La aplicación de la entrada al sistema al que se requiere determinar la respuesta en frecuencia, $u(t)$, resulta:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\Gamma v(t) \quad (14)$$

Entonces, partiendo que los valores propios de la matriz del sistema tienen parte real negativa, después de un transitorio se alcanza el estado estacionario. El estado estacionario de un sistema lineal lo representamos como: $x_{ss}(t) = \Pi v(t)$ y $\dot{x}_{ss}(t) = \Pi \dot{v}(t) = \Pi S v(t)$. Después de sustituir queda:

$$\Pi S v(t) = A \Pi v(t) + B \Gamma v(t) \quad (15)$$

De donde resulta que la ecuación que se requiere satisfacer es

$$\Pi S = A \Pi + B \Gamma \quad (16)$$

(16) es conocida como ecuación de Sylvester y ha sido estudiada ampliamente en el contexto de algunos problemas de control, tales como ubicación de estructura propia⁷ o bien para resolver problemas de regulación.⁸ La solución de (16) existe y es única si las matrices $-S$ y A no tengan valores propios comunes.⁷ y ⁸ La solución está garantizada para nuestro sistema, dado que $-S$ tiene valores propios sobre el eje $j\omega$ mientras que los valores propios de la matriz A tienen parte real negativa.

Ahora para la ecuación de salida se tiene:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) = C\Pi v(t) + D\Gamma v(t) = [C\Pi + D\Gamma] \begin{bmatrix} \text{sen}(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{bmatrix} \quad (17)$$

De acuerdo con lo expuesto en la sección 2, la salida del sistema corresponde también a

$$y(t) = u_0 |G(j\omega)| \text{sen}(j\omega + \varphi) \quad (18)$$

Y con ayuda de la identidad trigonométrica $\text{sen}(j\omega + \varphi) = \cos(\varphi) \text{sen}(j\omega) + \text{sen}(\varphi) \cos(j\omega)$
Se puede reescribir la salida en estado estacionario como:

$$y(t) = [u_0 |G(j\omega)| \cos(\varphi) \quad u_0 |G(j\omega)| \text{sen}(\varphi)] \begin{bmatrix} \text{sen}(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{bmatrix} \quad (19)$$

Y entonces resulta que

$$y(t) = [u_0 |G(j\omega)| \cos(\varphi) \quad u_0 |G(j\omega)| \text{sen}(\varphi)] = [C\Pi + D\Gamma] = [r_1 \quad r_2] \quad (20)$$

Siguiendo las ideas presentadas en⁶ (Apendice A, pag. 379-381), ahora partiendo de la ecuación de Sylvester (16) y multiplicando por la derecha ambos lados por $\begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$:

$$[\Pi_1 \quad \Pi_2] \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} = A[\Pi_1 \quad \Pi_2] \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} + Bu_0 [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}.$$

Con $\Gamma = u_0 [1 \quad 0]$. Realizando los productos de la derecha en cada término:

$$[\Pi_1 \quad \Pi_2] \begin{bmatrix} j\omega \\ -\omega \end{bmatrix} = A(\Pi_1 + j\Pi_2) + Bu_0$$

$$j\omega\Pi_1 - \omega\Pi_2 = A(\Pi_1 + j\Pi_2) + Bu_0$$

Organizando del mismo lado a todos los términos que tienen componentes de la matriz Π :

$$j\omega\Pi_1 - \omega\Pi_2 - A\Pi_1 - jA\Pi_2 = +Bu_0,$$

y entonces factorizando Π_1 y Π_2 como se muestra:

$$(j\omega I - A)\Pi_1 + j(j\omega I - A)\Pi_2 = +Bu_0$$

Claramente se puede separar $(j\omega I - A)$ y mandarlo al lado derecho de la igualdad mediante la inversa de $(j\omega I - A)$, la cual siempre existe.³ Con esto resulta claro que:

$$\Pi_1 + j\Pi_2 = (j\omega I - A)^{-1} Bu_0 = \mathbf{x}(j\omega)$$

y claramente se tiene la respuesta en frecuencia de la salida si la cantidad mostrada en la ecuación anterior se pre-multiplica por C :

$$y(j\omega) = C\Pi_1 + jC\Pi_2 = C(j\omega I - A)^{-1} Bu_0 = G(j\omega) = r_1 + jr_2$$

Y la magnitud y fase se pueden calcular como:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \sqrt{(r_1)^2 + (r_2)^2} \\ \varphi &= \tan^{-1} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Y de esta manera es posible determinar el valor de la magnitud y la fase para una frecuencia dada a partir de la matriz Π obtenida como resultado de la ecuación de Sylvester (16). En este trabajo no se muestran los algoritmos para resolver numéricamente la ecuación de Sylvester, sin embargo, es un hecho bien conocido en la comunidad

de control y este algoritmo está disponible en la literatura especializada,⁷ o bien en forma de herramienta de algunos paquetes, como por ejemplo.⁹⁻¹¹

Algoritmo 1

- Establecer el valor inicial de ω
- Construir la matriz S
- Resolver la ecuación de Sylvester para Π
- Determinar $C\Pi + D\Gamma$
- Calcular $|G(j\omega)| = \sqrt{(r_1)^2 + (r_2)^2}$; $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$
- Obtener $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log(\sqrt{(r_1)^2 + (r_2)^2}) = 10 \log((r_1)^2 + (r_2)^2)$
- Calcular $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$ y después convertir de radianes a grados: $\varphi_{\text{grados}} = \varphi_{\text{rad}} * 180/\pi$
- Graficar los puntos obtenidos magnitud-frecuencia y fase-frecuencia (semilogaritmico)

DISCUSIÓN

El procedimiento descrito en el algoritmo 1 no requiere el cálculo explícito de matriz de transferencia, lo cual es mencionado no como una ventaja en sí, sino como una característica. Es claro que si se requiere de la solución numérica de la ecuación de Sylvester. Afortunadamente existen diversos algoritmos disponibles para obtener la solución numérica, como se puede ver, por ejemplo, en Scilab⁹ mediante el comando `sylv(A, B, C, flag)`, en Octave¹⁰ mediante el comando `sylvester(A, B, C)`, en Matlab^{®11} utilizando la instrucción `sylvester(A, B, C)` o bien en lenguaje Python¹² a través del comando `scipy.linalg.solve_sylvester(a, b, q)`.

Como es claro del procedimiento, es muy sencillo poder calcular la magnitud y la fase de un sistema para un valor de frecuencia dada.

EJEMPLO DE APLICACIÓN

Con la finalidad de mostrar primero que el algoritmo propuesto determina la respuesta en frecuencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo, considerar el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [2 \quad 1]x(t) + 0 u(t) \end{aligned} \quad (22)$$

Determinar la respuesta en frecuencia del sistema anterior.

Solución:

Partiendo que se utiliza el sistema externo (8) se obtiene la ecuación de Sylvester dada por (16) con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [2 \quad 1]; \quad \Gamma = [1 \quad 0]; \quad v_1(0) = 0.$$

Siguiendo el algoritmo se selecciona un primer valor para ω y se resuelve la ecuación de Sylvester para buscar Π . Mediante el uso de Python se programó el algoritmo 1 para encontrar la gráfica de Bode. Con la finalidad de contar con un punto de comparación se obtuvo la gráfica de Bode a partir de la manera clásica mediante el uso de la librería de control en Python.

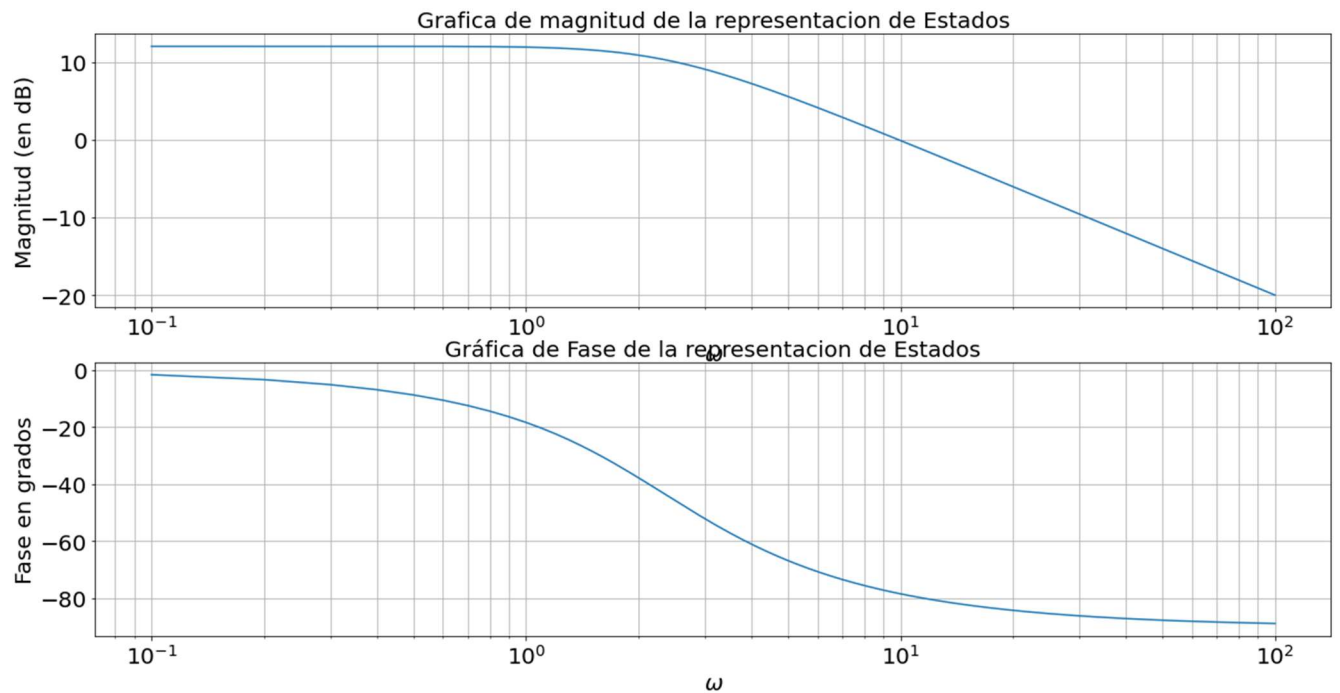


Fig. 1. Grafica de Bode obtenida mediante la aplicación del algoritmo 1.

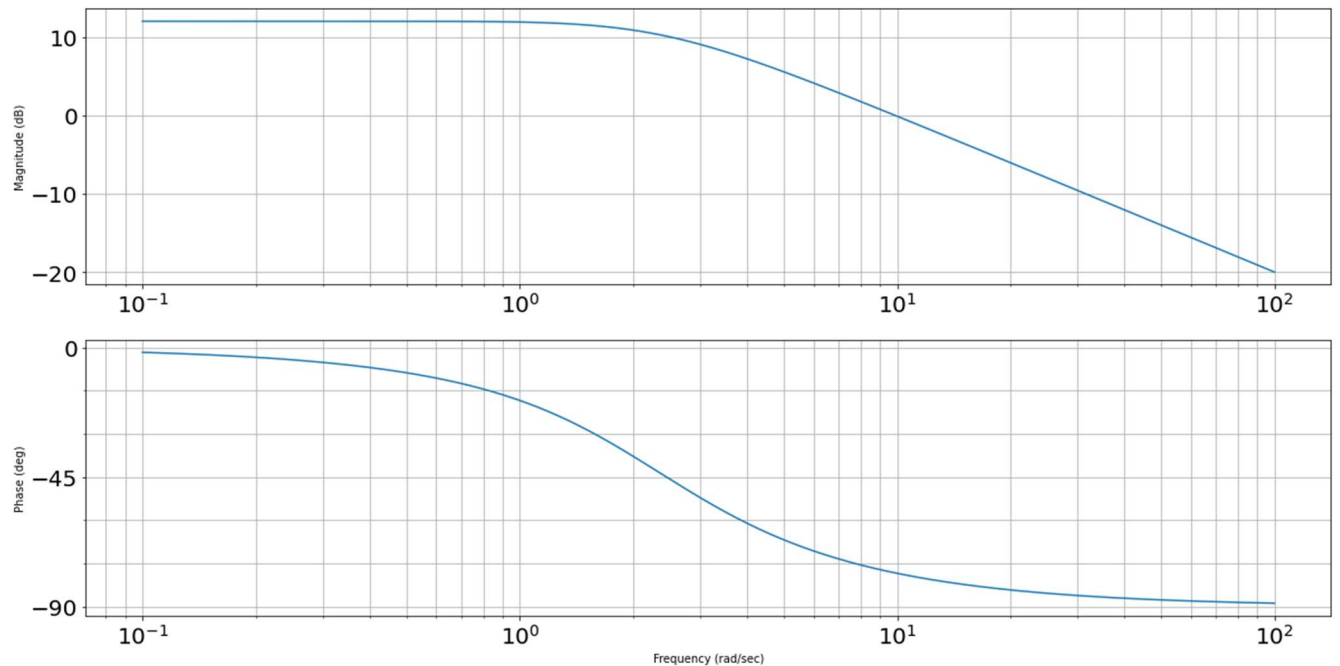


Fig. 2. Diagrama de Bode obtenido mediante el comando Bode (control en Python).

CONCLUSIÓN

La respuesta en frecuencia de sistemas es una herramienta importante tanto para el análisis y diseño de sistemas de control. En este trabajo se muestra el camino para obtener la respuesta en frecuencia a partir de una representación en espacio de estados. Una parte central requerida para obtener el resultado es la ecuación de Sylvester, la cual también cumple funciones importantes en la asignación de polos, así como en la solución a problemas de regulación y seguimiento. Mediante un ejemplo se muestra que el algoritmo propuesto coincide exactamente con los procedimientos tradicionales disponibles en la librería de control de Python.

Como trabajo futuro se considera el uso de los procedimientos mostrados en este trabajo para analizar y/o diseñar sistemas de control.

BIBLIOGRAFÍA

1. H. W. Bode, Relations between attenuation and phase in feedback amplifier design, Bell System Technical Journal, 19(3) p. 421-454, 1940.
2. H. W. Bode, Network analysis and feedback design, Van Nostrand, 1945.
3. K. Ogata, Ingeniería de control moderna, Pearson, 5ta edición, 2010.
4. E. Wernholt, S. Moberg, Experimental comparison of methods for multivariable frequency response function estimation, Proceedings of the 17th world congress of IFAC, Seoul, Korea, julio 6-11, p. 15359-15366, 2008.
5. A. Pavlov, N. Van der Wouw, H. Nijmeijer, Frequency functions for nonlinear convergent systems, IEEE Tran. on Automatic Control, Vol. 52, No. 6, p. 1159-1165, 2007.
6. A. Isidori, Lectures in feedback design for multivariable systems, Springer 2017.
7. G. H. Golub, S. Nash and C. VanLoan, A Hessenberg-Schur method for the problem $AX+BX=C$, IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 34, No. 6, p. 909-913, 1979.
8. A. Saberi, A. Stoorvogel, P. Sannuti, Control of Linear Systems with Regulation and Input Constraints, Springer, 2000.
9. Página web: https://help.scilab.org/docs/6.1.1/en_US/sylv.html. Consultado el 23/04/2022
10. Pág. web: <https://octave.sourceforge.io/octave/function/sylvester.html>. Consultado el 23/04/2022
11. Pág. web: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/sylvester.html>. Consultado el 23/04/2022
12. Pág. web: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.linalg.solve_sylvester.html. Consultado 23/04/2022

Evaluación dimensional del proceso de digitalización 3D por fotogrametría de un patrón de calibración propio

Fco. Eugenio López G.^a, Francisco Ramírez Cruz^a,
Sergio Alberto Cardona Ortiz^b, Moisés Rivera Rocha^b

^aUniversidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Cuerpo Académico Sistemas Integrados de Manufactura, México

^bMétrica Industrial S.A. de C.V., Monterrey, Nuevo León, México.

francisco.lopezgrr@uanl.edu.mx, francisco.ramirezcr@uanl.edu.mx,

sergio.cardonaort@uanl.edu.mx, moisesrivera@metricaindustrial.mx

RESUMEN

Este artículo presenta la evaluación de un sistema de digitalización 3D usando técnicas de fotogrametría usando como referencia geométrica un bloque patrón de diseño propio. La geometría del bloque patrón está basada en el estándar ISO 10360-6 y fue impreso por una impresora 3D ZCorp de alta calidad, con valores de precisión conocidos a partir de trabajos anteriores. El proceso de digitalización de la geometría del patrón se hizo utilizando una aplicación comercial de fotogrametría. Se procesó la nube de puntos resultante y se realizaron los ajustes a curvas y superficies a partir de ésta. Finalmente fue comparada la nube de puntos de mediciones con el documento de CAD de la geometría original. Un análisis estadístico de los resultados numéricos muestra un error promedio en un rango de -0.23 mm a +0.60 mm. La desviación estándar fue de 0.56 mm. Las conclusiones muestran que el desempeño de digitalización es de buena calidad.

PALABRAS CLAVE

Fotogrametría, sistema de digitalización 3D, ISO 10360-6, ajuste a curvas y superficies.

ABSTRACT

This article presents the evaluation of a 3D digitalization system using photogrammetry techniques, using as geometric reference an own-design prototype-printed Gauge block. The geometry of the Gauge block is based on the ISO 10360-6 standard, and was 3D printed with a ZCorp high quality prototype printer, with precision values known from other works.

The scanning process was made using a commercial software photogrammetry application. The point cloud was processed, and the fitting curves and surfaces were made. Finally, the points cloud was compared against the CAD file. A statistical deviation analysis shows a mean error between -0.23 mm to +0.60 mm. The standard deviation was 0.56 mm. The conclusions show a scanning process with good quality.

KEYWORDS

Photogrammetry, 3D scanning system, ISO 10360-6, curves and surfaces fitting.

INTRODUCCIÓN

La digitalización de geometrías tridimensionales se ha convertido en un proceso crítico que apoya fuertemente la manufactura. Hoy en día existe suficiente oferta de digitalizadores 3D en el mercado, y al mismo tiempo, nuevas tecnologías emergen implementando mejores dispositivos, abaratando

componentes y optimizando cálculos. Las limitaciones de algunos sistemas han sido objeto de investigaciones^{1,2,3}. Aunque la implementación de la digitalización 3D ha llegado completamente a los trenes productivos^{4,5,6} a partir de máquinas de coordenadas, en el caso de México no han penetrado significativamente su mercado. Ver la Prospectiva Tecnológica Industrial de México 2002-2012 en el Sector 8 Diseño y Automatización, área 8.1 Diseño.

El proceso de producción para objetos con superficies complejas^{7,8} permite {1} la digitalización de objetos con facilidades que implican usuarios con el mínimo de requerimientos cognitivos; ello abarata el proceso y permite una mejora de las características estéticas y funcionales del producto (optimización del proceso de diseño con la introducción de métodos de ingeniería inversa). {2} nuevas funciones para el diseño estilístico, para permitir mejores resultados: mejor calidad y menor tiempo invertido en el diseño y {3} una arquitectura nueva de sistema tipo modular, que permitirá a las pequeñas y medianas empresas acceder a los sistemas de diseño alternativo, hasta ahora fundamentalmente usados por las grandes empresas.

En cada aparato digitalizador existen de manera imbuida los algoritmos de ajuste propios para la calibración y utilizando cálculos internos basados en geometrías de referencia 9. *Estos procedimientos son opacos para el usuario y no permiten evaluar la eficiencia del cálculo interno del digitalizador 10.*

Los algoritmos de las máquinas de medición son mantenidos en confidencialidad por los fabricantes, por lo que es difícil comparar, evaluar y eliminar las inconsistencias de software o elegir el método mejor. Consecuentemente, en los últimos años se han desarrollado proyectos de investigación internacionales^{11,12,13} para establecer un método para probar las herramientas de software sin que los fabricantes de máquinas de medición tengan que develar sus técnicas de construcción. Los resultados de estos estudios han cristalizado en la norma ISO 10360-6, que define:

- **Métodos de prueba:** Evaluación de la estimación del software comparando los parámetros del modelo de prueba contra sus valores referenciados.
- **Criterios de estimación de parámetros:** Minimización de los errores medidos.
- Error de medición: La distancia geométrica entre el modelo de prueba y un punto medido.
- **Conjunto de puntos:** Valores coordenados de un conjunto de puntos arbitrariamente localizados en el volumen del modelo de prueba.

OBJETIVOS

El objetivo principal del presente trabajo consistió en evaluar la calidad del proceso de digitalización fotogramétrica de una aplicación comercial. La evaluación se llevó a cabo comparando la geometría CAD contra la geometría resultante de la digitalización de un objeto patrón fabricado en 3D con una impresora de calidad dimensional conocida¹⁴. El objeto patrón fue una geometría propia, diseñada bajo los requerimientos del estándar ISO 10360-6.

Los objetivos particulares fueron:

- Determinar los puntos de medición que conforman las primitivas geométricas y sus valores de ajuste a las primitivas geométricas individuales del objeto patrón.
- Determinar los valores metrológicos globales que representan la calidad de las mediciones de todo el proceso.
- Determinar un valor de calidad de digitalización que permita saber si los procesos industriales y de taller puedan aplicar el proceso de digitalización por fotogrametría.

El presente trabajo apoya los trabajos desarrollados por los autores sobre mejora geométrica usando algoritmos de crecimiento biológico^{15,16,17,18,19}, y en el desarrollo de un sistema que para la digitalización de objetos de geometría compleja^{20,21,22,23}.

METODOLOGÍA

La figura 1 muestra a detalle la secuencia metódica del presente trabajo para la validación del proceso de digitalización por fotogrametría y los resultados dimensionales experimentales.

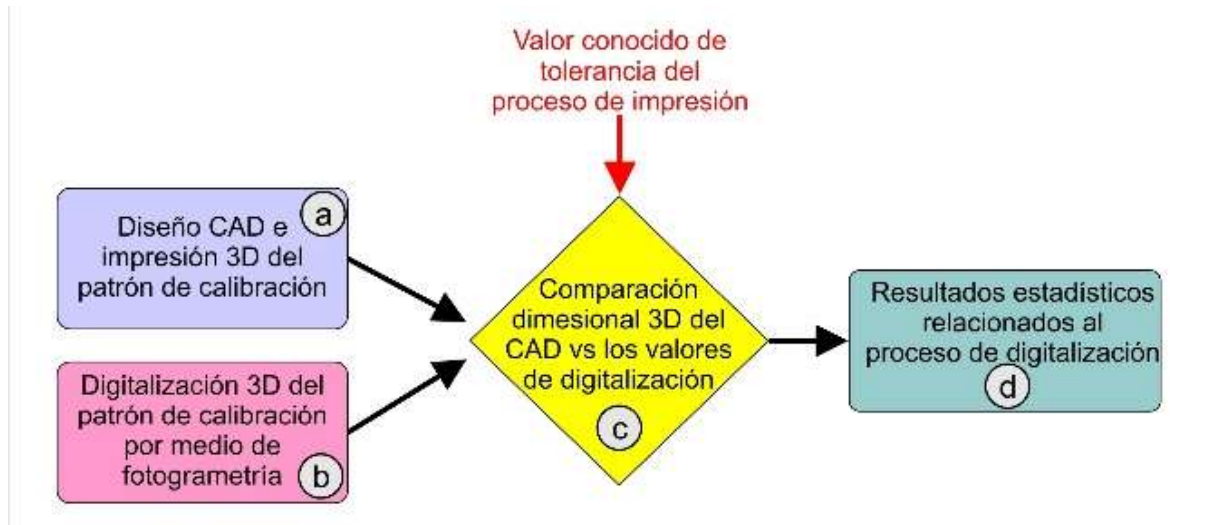


Fig. 1. Metodología de la evaluación.

La etapa de diseño CAD incluye la consideración de las geometrías preponderantes (no todas) en el estándar ISO 10360-6. La impresión de dicho modelo como prototipo rápido utilizando la impresora de laboratorio cuya desviación dimensional es conocida.

La digitalización fue hecha por un proceso fotogramétrico usando una aplicación comercial. El proceso incluye: edición de fotos, discriminación de fondo, calibración de niveles de iluminación y finalmente, edición de la nube de puntos resultante.

El requisito para que la comparación dimensional pueda ser hecha es que la nube de puntos tenga la escala acorde al modelo y que los sistemas de coordenadas universal y local estén alineados; bajo esa premisa es posible calcular las desviaciones de posición de cada punto de la nube de puntos.

Los resultados estadísticos son la evaluación de las condiciones de ajuste de la nube de puntos a curvas y superficies de cada entidad geométrica contenida en el patrón de calibración, para posteriormente ser comparadas con el modelo de CAD.

DISEÑO CAD E IMPRESIÓN TRIDIMENSIONAL DEL PATRÓN DE CALIBRACIÓN DISEÑO DE LA GEOMETRÍA CAD

En la tabla I se resumen las entidades y los parámetros que el estándar ISO 10360-6 define para los modelos de prueba:

Tabla I.- Entidades patrón para modelos de prueba ISO 10360.

Entidad	Dimensión	Posición	Orientación
Línea	2D / 3D	XY / XYZ	ab / abc
Plano	3D	XYZ	abc
Círculo	2D / 3D	XYZ	ab / abc
Esfera	3D	XYZ	abc
Cilindro	3D	XYZ	abc
Cono	3D	XYZ	abc
Toro	3D	XYZ	abc

A pesar de que el ajuste lineal (e inclusive el ajuste a un plano) son conocidos suficientemente, en este patrón se ha privilegiado detallar consistentemente las entidades básicas de que consta el estándar ISO 10360-6; para el modelo se presentan los casos de las entidades patrón Plano y Esfera. El cálculo de las entidades Línea recta y Círculo se presentan como primitivas de las entidades Plano y Esfera respectivamente. Ver figura 2

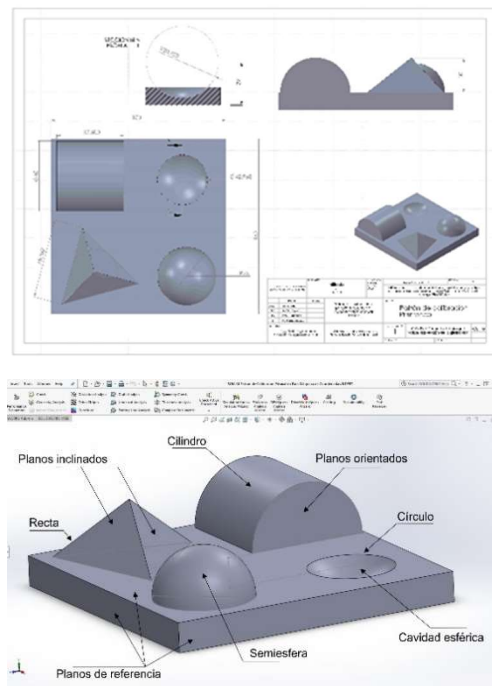


Fig. 2. Geometría del cuerpo de calibración en el ambiente CAD: cotas y referencias.

IMPRESIÓN 3D DEL PATRÓN DE CALIBRACIÓN

Las impresoras 3D de Z Corporation permiten producir rápido, a bajo costo y con relativa tolerancia cerrada modelos físicos a partir de datos digitales. Para ello utilizan la tecnología de inyección de tinta para depositar líquido aglutinante sobre polvo polimérico, construyendo las partes

en base a capas. Incorporan además la capacidad de adicionar una superficie a color mezclando tinta con el aglutinante. El resultado es una representación geométrica del diseño de CAD que puede incluir colores, dibujos y fotografías.

La tecnología que utiliza la impresora 3D fue desarrollada en el Tecnológico de Massachussets, la cual consiste en particionar el modelo geométrico (usualmente en formato de estereolitografía) en capas de espesor de 0.0762 a 0.2286 mm (0.003 a 0.009 pulgadas) de espesor.

Cada capa se imprime sobre un depósito de polvo de impresión, utilizando dos pistones para controlar la alimentación y construcción (ver figura 3).

Ya que la producción de geometrías con este procedimiento implica una conversión de formato CAD a STL y posteriormente a capas, el prototipo final puede contener errores de conversión²⁴.

La tecnología de inyección de tinta se basa en la mezcla substractiva de colores *MAGENTA-CYAN-AMARILLO*, la cual es vectorialmente complementaria al sistema aditivo RGB. Además del dosificador de aglutinante, la máquina de prototipos utiliza 3 dosificadores para cada componente de color.



Fig. 3. Impresión 3D ZCorp del patrón de calibración.

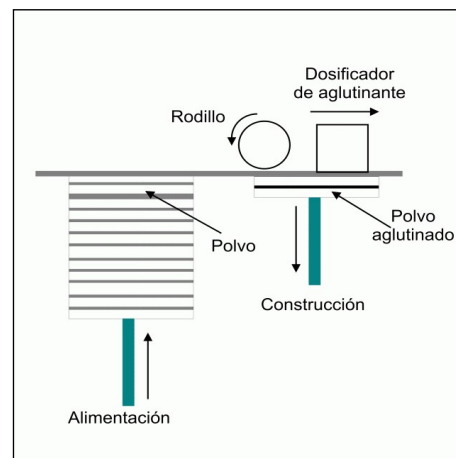


Fig. 4. Principio de funcionamiento de la impresora 3D ZCorp Spectrum Z510.

El modelo CAD (ver figura 2) fue usado como la referencia geométrica para la fabricación del prototipo²⁵ que se muestra en la figura 3. En trabajos anteriores²⁶ se demostró que esta impresora 3D con la cual se fabricó el patrón de calibración tiene una desviación estándar de 0.15-0.20 mm.

Tabla II. Diferentes tecnologías de prototipos rápidos²⁷.

Tecnología de prototipado	Tolerancia típica	Material base
Sinterizado selectivo de láser (SLS)	± 0.1778 mm. Varía dependiendo del material sinterizado con láser.	Metales, termoplásticos, polvos cerámicos
Modelado por deposición fundida (FDM)	± 0.13 mm.	Termoplásticos, metales eutecticos
Estereolitografía (SLA)	± 0.127 mm a 0.0381 mm para cada 25.4 mm subsiguientes.	Fotopolimero
Modelado Multi Jet (MJM)	± 0.0127 mm.	Fotopolimero
Objeto manufacturado por capas laminadas (LOM)	± 0.1066 mm.	Papel
Fusión por electrorayo (EBM)	0.05 - 0.2 mm	Aleaciones de titanio
Impresión 3D (3DF)	0.0762 a 0.2286 mm	Materiales varios

DIGITALIZACIÓN 3D DEL PATRÓN DE CALIBRACIÓN POR MEDIO DE FOTOGRAMETRÍA

La metodología general para la captura digital de geometrías²⁸ utilizando fotogrametría se muestra en la figura 5. Dicho proceso no se muestra a detalle en este trabajo, pero se especifican las variables más importantes.

La toma de fotografías se hizo colocando el objeto en cabezal divisor motorizado controlado con un microcontrolador dotado de un disparador automático de cámara DSLR.

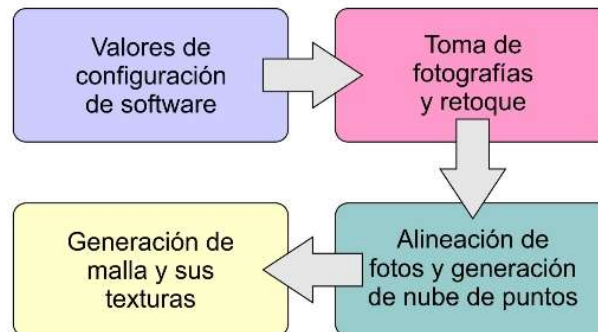


Fig. 5. Proceso de digitalización por fotogrametría utilizando un programa comercial.

La aplicación Agisoft PhotoScan es un programa autónomo que realiza el procesamiento fotogramétrico de imágenes digitales y genera datos espaciales 3D. Entre sus utilidades se encuentran los siguientes procesos:

- Triangulación fotogramétrica.
- Generación de nube de puntos densos: edición y clasificación.
- Exportación orto mosaica georreferenciada.
- Mediciones: distancias, áreas y volúmenes.
- Puntos de control de tierra: topografía de alta precisión.
- Python scripts: Personalizar el flujo de trabajo de procesamiento.
- Procesamiento de imágenes multispectrales.

La versión académica ofrece todas las funciones de la versión Pro.

Las principales condiciones de operación del programa que deben considerarse anterior a su uso son: la calibración, fuente de luz y fondo, densidad de digitalizado y posición de la cámara que no se especifican aquí.

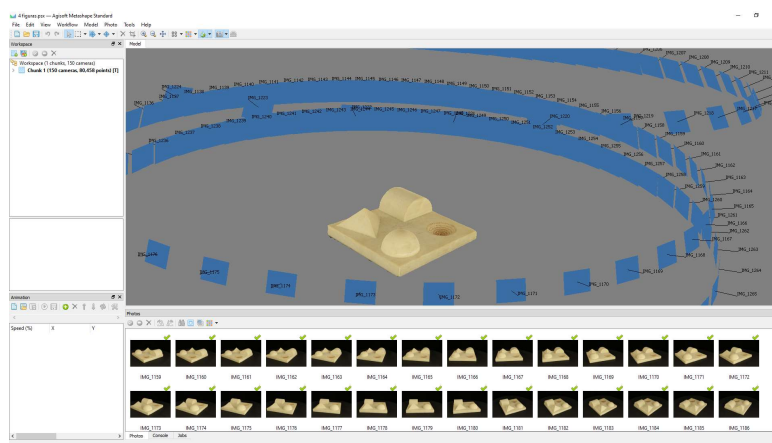


Fig. 6. Alineación de fotos, generación de nube de puntos y malla con texturas.

La configuración de la cámara fue: tiempo de obturación de 1/10 con 6.3 de apertura, a un ISO de 200. Las imágenes tomadas fueron editadas para eliminar el ruido de fondo.

Tabla II. Valores de configuración en la sesión fotogramétrica.

	Valor
Número de circuitos de 360°	3
Cantidad de fotos por circuito	50
Total de fotos	150
Total de puntos generados	80458

Tras la edición de las fotografías, el proceso de digitalización inicia con la alineación de las tomas, y a partir de ahí obtener la nube de puntos tridimensionales²⁹. Una vez hecho esto, es posible generar una malla triangular texturizada y convertir el resultado a un objeto 3D de formato comercial conocido (*obj* o *ply*, por ejemplo).

La figura 6 presenta miniaturas de las fotografías, su alineación y la nube de puntos generada.

El resultado de la digitalización debe ser aislado de objetos circunvecinos y posteriormente editado para eliminar ruido. La nube de puntos^(a) y la malla texturizada^(b) resultado de este procesamiento se muestran en la figura 7.

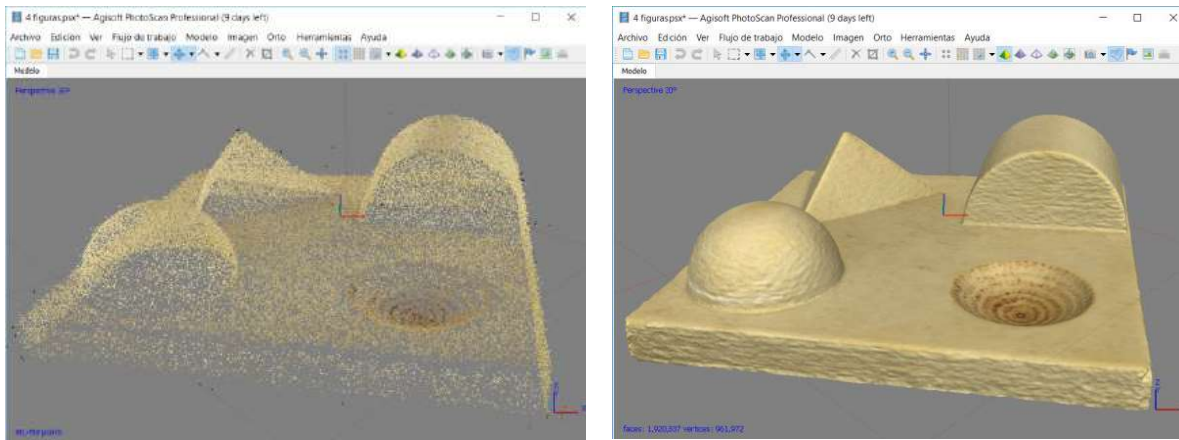


Fig. 7. (a)Nube de puntos resultante del proceso de digitalización. (b) Malla triangulada con mapas de textura.

El número de puntos de la nube fueron 1,733,268.

COMPARACIÓN DIMENSIONAL 3D DEL CAD VERSUS LOS VALORES DE DIGITALIZACIÓN.

Para referenciar las mediciones es necesario que los ejes universales del modelo CAD coincidan con los ejes locales de la nube de puntos. El factor de escala lo contiene el mismo objeto patrón. Una vez hecho esto, es necesario alinear la nube de puntos contra el modelo CAD, y luego es factible calcular las desviaciones. Es posible observar desviaciones individuales en algún sector de la nube de puntos (y así evaluar cada entidad geométrica contenida en el patrón), así como la desviación global de toda la geometría.

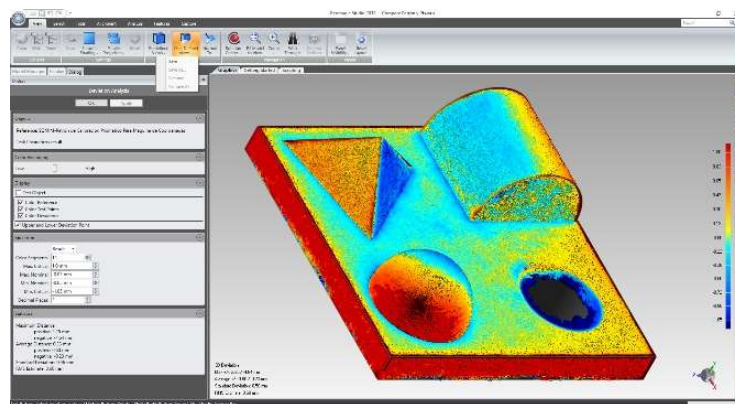


Figura 8. Escala cromática preliminar de desviaciones

Las figuras 8 y 9 muestran en tonos de colores los valores de los puntos de medición contra el modelo CAD de referencia. Los rangos de desviación son de ± 1.0 mm; la desviación típica fue de 0.56 mm, lo cual concuerda con las especificaciones del proceso de digitalización.

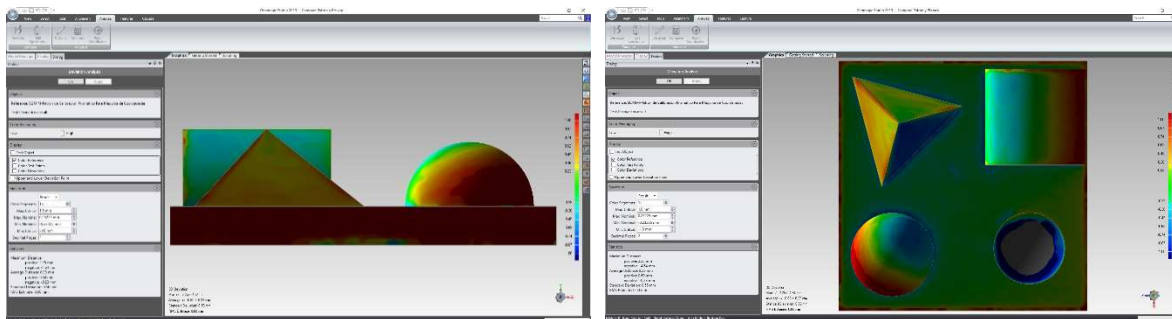


Fig. 9. Vistas ortogonales de los valores de desviación finales.

RESULTADOS ESTADÍSTICOS RELACIONADOS AL PROCESO DE DIGITALIZACIÓN

Para evaluar la calidad del proceso de escaneo, se comparó la geometría del archivo CAD con la nube de puntos de medición. Esta comparación arroja como resultado todas las desviaciones dimensionales midiendo las distancias entre cada punto y la geometría más cercana. Con estos valores es posible hacer un reporte estadístico de error dimensional. En la tabla IV se presentan los valores más significativos de este reporte.

Tabla IV. Valores de desviación 3D de la digitalización referidos al modelo CAD.

Estadístico	Valor (mm)
Error máximo positivo	+2.25 mm
Error máximo negativo	-4.64 mm
Error promedio positivo	+0.60 mm
Error promedio negativo	-0.23mm
Desviación estándar	0.56 mm
RMS estimado	0.60 mm

A continuación, se presentan los cálculos y mediciones utilizando la nube de puntos para cada una de las geometrías de referencia por separado imbuídas en el bloque patrón. La tabla V resume los valores calculados con respecto al CAD del bloque patrón.

Tabla V. Comparación de los resultados de ajuste vs las dimensiones del modelo de referencia CAD.

Primitiva geométrica	Medida de referencia en CAD	Valor de ajuste con la nube de puntos
Longitud de la línea recta del canto del tetraedro (mm)	59.588	46.147
Angulos en grados entre las normales a los planos del tetraedro	90° 90° 90°	88.9° 93.1° 98.8°
Diámetro del círculo extraído del cilindro (mm)	60	59.245
Diámetro de la esfera (mm)	50	49.399

Método para el ajuste a una línea recta

En donde el error es la suma de cuadrados de las diferencias:

$$\varepsilon^2 = \sum_i [y_i - f(x_i)]^2 \quad (\text{ec. 1})$$

Y las condiciones para la minimización del error son:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial b} = 0 \quad (\text{ec. 2})$$

Esto es,

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial m} = m \sum_{i=0}^n x_i^2 + b \sum_{i=0}^n x_i = \sum_{i=0}^n x_i y_i \quad (\text{ec. 3a})$$

y

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial b} = m \sum_{i=0}^n x_i + b \cdot n = \sum_{i=0}^n y_i \quad (\text{ec. 3b})$$

Sustituyendo y agrupando se tiene:

$$Mt = \begin{pmatrix} \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & \sum_i 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} \sum_i x_i y_i \\ \sum_i y_i \end{pmatrix} \quad (\text{ec. 4})$$

Resolviendo $R = Mt^{-1}v$ se obtienen los valores de la pendiente m y la intersección b buscados.

Método para el ajuste a un círculo

$$\varepsilon(h, k, \alpha) = \sum_{i=0}^n (L_i - \alpha)^2 \quad (\text{ec. 5})$$

$$L_i = \sqrt{(x_i - h)^2 + (y_i - k)^2} \quad (\text{ec. 6})$$

En donde $\alpha = r^2$, y una vez más, el criterio de minimización es:

$$\frac{\partial \varepsilon(h, k, \alpha)}{\partial h} = 0, \frac{\partial \varepsilon(h, k, \alpha)}{\partial k} = 0, \frac{\partial \varepsilon(h, k, \alpha)}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{z. 7)}$$

Desarrollando y agrupando, las matrices de coeficientes son:

$$Mt = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i y_i & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i & \sum_{i=0}^n y_i^2 & \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n y_i & n \end{pmatrix} \quad (\text{ec. 8})$$

$$v = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n x_i (x_i^2 + y_i^2) \\ \sum_{i=0}^n y_i (x_i^2 + y_i^2) \\ \sum_{i=0}^n (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \quad (\text{ec. 9})$$

Con el método de coeficientes indeterminados obtenemos linealizada la ecuación general del círculo:

$$x^2 + y^2 = Ax + By + C \quad (\text{ec. 10})$$

En donde la forma matricial es

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = Mt^{-1} \cdot v \quad (\text{ec. 11})$$

Y los parámetros buscados son:

$$h = \frac{A}{2}, \quad k = -\frac{B}{2}, \quad r = \frac{\sqrt{4C + A^2 + B^2}}{2} \quad (\text{ec. 12))}$$

Cálculos y mediciones para el cilindro

Utilizando los métodos para ajuste a recta y ajuste a círculo, es posible extraer los valores del cilindro de la nube de puntos.

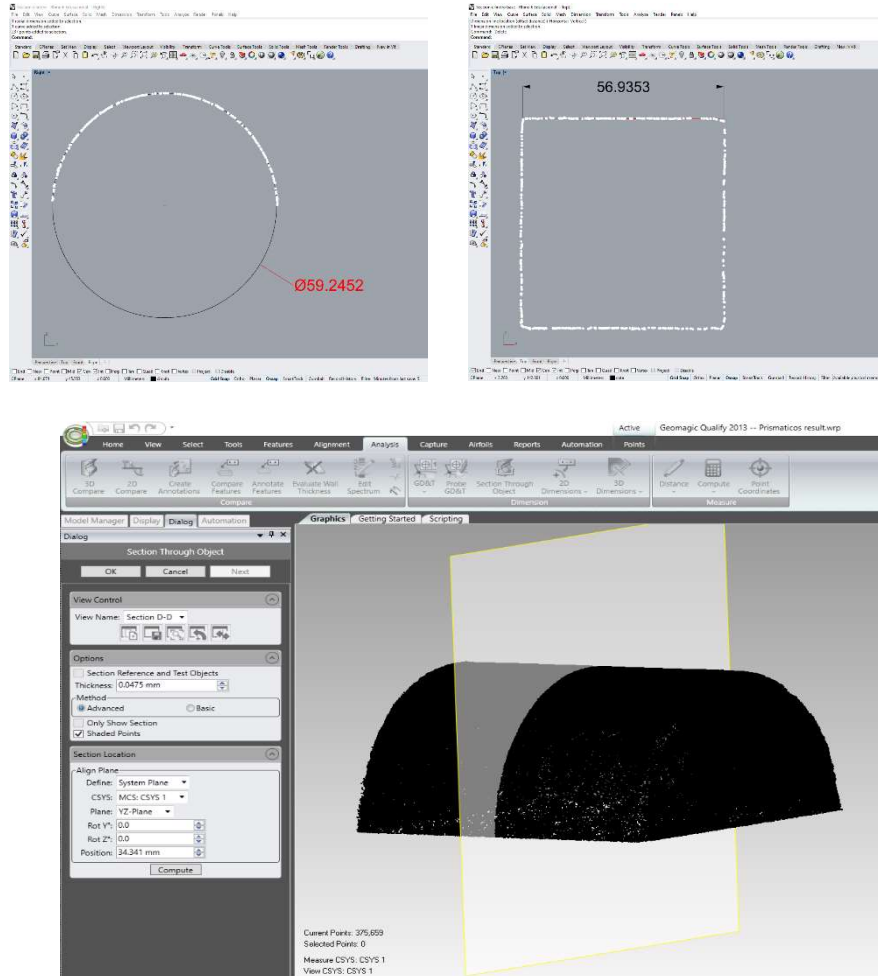


Fig. 10. Puntos de los planos inclinados extraídos de la nube de puntos, comparados con el ajuste a planos hecha por CAD. Note la distribución numérica de cotas angulares de los vectores normales.

Cálculos y mediciones para los planos del tetraedro

Análogamente al ajuste a una línea, el problema para un plano puede resolverse de la misma manera.

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=0}^n (ax_i + by_i + c - z_i)^2 \quad (\text{ec. 13})$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial c} = 0 \quad (\text{ec. 14})$$

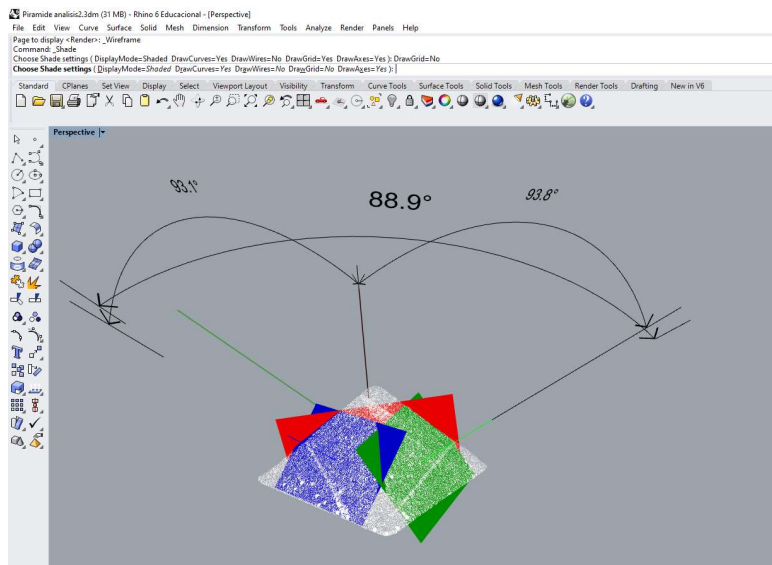


Fig. 11. Puntos de los planos inclinados extraídos de la nube de puntos, comparados con el ajuste a planos hecha por CAD. Note la distribución numérica de cotas angulares de los vectores normales.

Los valores calculados de los vectores normales fueron:

$$R := \begin{pmatrix} 4.109 \\ -15.496 \\ 10.198 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 10.107 \\ 10.111 \\ 9.199 \end{pmatrix} \quad G := \begin{pmatrix} -20.360 \\ 5.468 \\ 13.437 \end{pmatrix}$$

Los valores angulares entre los vectores normales:

$$\theta_0 = 88.9^\circ \quad \theta_1 = 93.1^\circ \quad \theta_2 = 93.8^\circ$$

Cálculos y mediciones para la esfera

A menudo la esfera es utilizada como geometría de referencia^{30,31,32}. La ecuación de la distancia de un punto a la esfera es una función no lineal, por lo cual es necesario emplear algún algoritmo de minimización no lineal para la solución del problema de ajuste de puntos a la geometría, a menudo se usa el algoritmo de Gauss-Newton³³. Este algoritmo necesita una aproximación inicial a los parámetros reales que se encuentre cercana la verdadera solución. En donde se ajusta a mínimos cuadrados la ecuación lineal y se encuentran con ello los valores iniciales para el algoritmo de convergencia.

En una aplicación de CAD dicho algoritmo está implementado, por lo que en este trabajo se utilizó esta aproximación³⁴.

Los puntos están distribuidos en una semiesfera. El algoritmo debe arrojar una aproximación del diámetro con la muestra de datos.

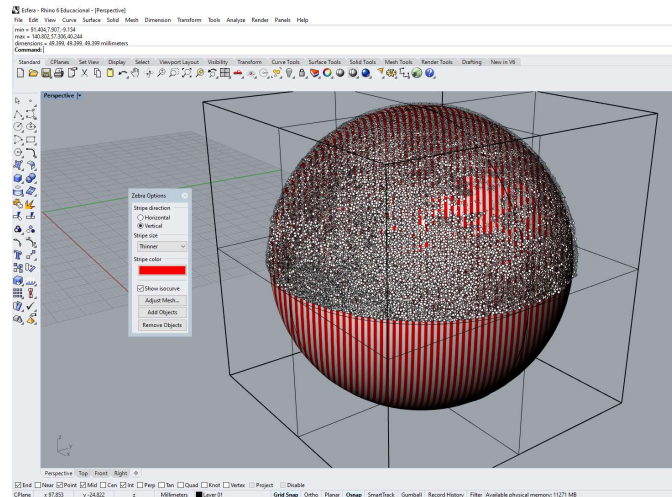


Fig. 12. Puntos de la semiesfera extraída de la nube de puntos, comparada con su ajuste a una esfera. [35]

En el análisis por CAD, el diámetro de la semiesfera resultado de la digitalización concuerda con la cota del CAD de 50mm:

- $P_{min} = 91.404, 7.907, -9.154$
- $P_{max} = 140.802, 57.306, 40.244$
- Dimensiones XYZ = 49.399, 49.399, 49.399 mm
- Error = 0.601 mm

CONCLUSIONES

Se ha presentado una síntesis del relativamente nuevo estándar de pruebas ISO 10360-6 que permite evaluar cálculos internos basados en geometrías de referencia.

Dicho estándar fue utilizado como punto de partida para evaluar las características de desempeño dimensional del proceso de digitalización utilizando fotogrametría. Se comparó el archivo en formato CAD y la digitalización por fotogrametría de un prototipo impreso en 3D con alta precisión (desviación estándar de 0.15-0.20 mm). Los valores de desviación estándar de 0.56 mm, lo cual es sorprendentemente bueno, considerando la cantidad de variables involucradas que influyen en el proceso.

En este trabajo se han incluido los fundamentos para el ajuste de datos experimentales a un sistema lineal de coeficientes, tanto lineales como no lineales. Se desarrolló de manera detallada el procedimiento para obtener los cálculos que permiten cuantificar la calidad en el proceso de digitalización 3D por fotogrametría de una aplicación comercial. Se presentan los valores de ajuste para las primitivas más significativas del estándar ISO 10360-6. Los resultados arrojados son un marco de referencia para usar el proceso de digitalización en situaciones de restricción holgada con un grado relativo de certeza.

El proceso evaluado representa una buena herramienta en la reconstrucción de geometrías en una gran cantidad de aplicaciones en la manufactura de productos. Nuevas tecnologías están emergiendo para satisfacer la necesidad de digitalizar geometrías y ambientes virtuales, por lo que a corto plazo se vislumbran expansiones de los estándares actuales.

AGRADECIMIENTOS Y EQUIPO UTILIZADO

El presente trabajo fue realizado en el marco de la línea de generación y aplicación de conocimiento “Optimización geométrica de productos” del Cuerpo Académico Sistemas Integrados de Manufactura de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, UANL con el apoyo financiero de la misma.

- Licencia académica de software CAD Rhinoceros v6.
- Licencia académica de software Solidworks v2016.
- Cámara DLSR Canon 7D. Cámara réflex digital 18MP, AF/AE con montura Canon EF, con lente EF 100mm f/2.8 Macro USM. Interfaz automática de disparo de diseño propio.
- Licencia de software para el tratamiento de puntos Geomagic Studio/Qualify v8.
- Licencia de software MeshLab Visual Computing Lab ISTI-CNR (Apr 3 2014) para el tratamiento de mallas.
- Impresora 3D de la compañía ZCorp, modelo Spectrum Z510 con capacidad de construcción de 2 capas por minuto y un volumen de trabajo de 254 x 356 x 203 mm, con resolución de 600 x 540 dpi.

REFERENCIAS

1. L. Iuliano, P. Minetola and A. Salmi. “Proposal of an innovative benchmark for comparison of the performance of contactless digitizers”. IOP Publishing. Measurement Science and Technology, 21 105102 (13pp, 2010).
2. Yang Hu, Qingping Yang, Xizhi Sun. “Design, Implementation, and Testing of Advanced Virtual Coordinate-Measuring Machines”. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. 61, NO. 5, May 2012.
3. Y. Wu, H. Wang, Z. Li. “Quotient Kinematics Machines: Concept, Analysis, and Synthesis”. Journal of Mechanisms and Robotics, ASME. vol. 3. May 2011.
4. Nicola D'Apuzzo. “Overview of 3D surface digitization technologies in Europe”. Three-Dimensional Image Capture and Applications VI, Proc. of SPIE-IS&T Electronic Imaging, SPIE Vol. 6056, San Jose California, USA, 2006.
5. S. Winkelbach, S. Molkenstruck and F. Wahl. “Low-Cost Laser Range Scanner and Fast Surface Registration Approach”. K. Franke et al. Editors. DAGM, LNCS 4174, pp. 718–728. Springer Berlin Heidelberg 2006.
6. J. Reznicek, K. Pavelka. “New low-cost 3d scanning techniques for cultural heritage documentation”. The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences. Vol. XXXVII. Part B5. Beijing 2008.
7. Y. F. Li and Z. G. Liu. “Method for determining the probing points for efficient measurement and reconstruction of freeform surfaces”. Measurement Science and Technology. 14 p1280–1288. Institute of Physics Publishing 2003.
8. S. J. Lee and D. Y. Chang. “Laser scanning probe with multiple detectors used for sculptured surface digitization in reverse engineering”. 7th International Symposium on Measurement Technology and Intelligent Instruments. Journal of Physics: Conference Series 13 155–158. Institute of Physics Publishing, 2005.
9. J. Guo, Y. Wang. “Study on Calibration Technology of Portable Coordinate Measuring Machines”. International Conference on Electronics and Optoelectronics. V4 170-173. IEEE 2011.

10. G. Gao, W. Wang, K. Lin, Z. Chen. "Structural Parameter Identification for Articulated Arm Coordinate Measuring Machines". International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation. p128-131. Computer Society IEEE 2009.
11. J. Santolaria, J. Aguilar, D. Guillomía, C. Cajal. "Kinematic parameter estimation technique for calibration and repeatability improvement of articulated arm coordinate measuring machines". Precision Engineering 32 pp. 251–268. 2008 Elsevier Ltd.
12. K. Shimojima, R. Furutani, K. Takamasn and K. Araki. "The Estimation Method of Uncertainty of Articulated Coordinate Measuring Machine". IEEE ICIT'02. Bangkok, THAILAND 2002.
13. J. Sladek, K. Ostrowska, A. Gaska. "Modeling and identification of errors of coordinate measuring arms with the use of a metrological model". Measurement 46 pp. 667–679. 2013 Elsevier Ltd.
14. B. Wieneke, H. Gerber. "Rapid Prototyping Technology – New potentials for offshore and abyssal engineering". The 13th International Offshore and Polar Engineering Conference ISOPE 2003 - Honolulu, Hawaii, USA, May 25-30, 2003.
15. Ramírez, F., López, E. Ortiz, U., Guzmán, R. "Reducción de la concentración de esfuerzos para piezas de fundición por medio del método de elementos finitos utilizando algoritmos de crecimiento biológico". IX Congreso Anual SOMIM 2003 vol. VI, pág. 25, Sept. 2003.
16. Ramírez, F., López, E. Ortiz, U., Guzmán, R. "Diseño óptimo de elementos mecánicos usando algoritmos de crecimiento biológico". Revista Ingenierías vol. VII, no. 22, 2004.
17. Ramírez, F., López, E. Ocañas, J. "Optimización geométrica con criterio de crecimiento biológico para la reducción de la concentración de esfuerzos en uniones". X Congreso Anual SOMIM 2004 Sept. 2004.
18. Ramírez, F., López, E. Romero, I. "Optimización geométrica con criterio de crecimiento biológico para la reducción de la concentración de esfuerzos en placas con perforaciones transversales". XI Congreso Internacional Anual SOMIM, Sept. 2005.
19. E. López, F. Ramírez, I. Márquez, J. de la Garza, A. Castillo. "Relación de la geometría de elementos mecánicos con el cambio de forma en la naturaleza como criterio de diseño". XVI Congreso Internacional Anual SOMIM, Sept. 2010. ISBN 968-9173-01-4
20. E. López, F. Ramírez, I. Romero, J. de la Garza, J.L. Castillo. "Diseño de un instrumento para la captura de geometrías 3D con aplicación en la manufactura de productos". Revista de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Mecánica. Vol. 2 No. 3, Año 5 (2006) p. 101-110 ISSN1665-7381.
21. E. López, I. Márquez, D. Franco, F. Ramírez. "Elaboración de bustos por medio de digitalización 3D y prototipos rápidos". XIV Congreso Internacional Anual SOMIM p.836-846, sept. 2008. ISBN 968-9173-01-4.
22. E. López, F. Ramírez, A. Ávila. "Digitalización 3D como herramienta en la manufactura de calzado deportivo". XV Congreso Internacional Anual SOMIM p.137-146, sept. 2009. ISBN 968-9173-01-4.
23. E. López, F. Garza, F. Ramírez. "Diseño y construcción de un brazo digitalizador para la captura de geometrías". Revista Ingenierías, Abril - Junio de 2014, vol. XVII, No. 63, p45-57. ISSN 1405-0676.

24. B. de Smit, J. Broek, I. Horváth. "Expected performance of the FF-TLOM technology, based on preliminary testing of the involved basic technologies". 1st RAPDASA Annual Conference, Pretoria, South Africa. November 2000.
25. R. Hague, S. Mansour, N. Saleh. "Design opportunities with Rapid Manufacturing". *Assembly Automation* v.23 N4 2003 pp 346-356 ISSN 0144-5154.
26. E. López, F. Ramírez, J. de la Garza, A. Castillo. "Evaluación de características dimensionales y de color de piezas producidas en prototipos rápidos". XIII Congreso Internacional Anual SOMIM p. 66, sept. 2007. ISBN 968-9173-01-4
27. J.W. Branch, J.B. Gomez, F. Prieto. "Reconstrucción 3D a partir de imágenes de rango: Revisión de la literatura". *Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial*, V.8, N° 23, 2004. España.
28. F. Rodrigues, P. Leronés. "Digitalización automática de superficies empleando escáneres ópticos". XXII Jornadas de Automática en la Industria. Bellaterra (Barcelona, España). Septiembre de 2001.

Las geometrías no-euclidianas

José Rubén Morones Ibarra

Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, México

jose.moronesib@uanl.edu.mx

RESUMEN

La geometría euclidiana está fundada en cinco postulados que se presentan como verdades evidentes, es decir, verdades de las que no se puede dudar. Por mucho tiempo se pensó que no podía existir una geometría diferente a la de Euclides, sin embargo, las dudas sobre la independencia del quinto postulado respecto a los otros cuatro, abrió el camino para el desarrollo de nuevas geometrías. El impacto filosófico de las geometrías no-euclidianas provocó una revolución en el pensamiento matemático transformando a la matemática en una ciencia aún más abstracta y abriendo la posibilidad de concebir espacios más complejos. El desarrollo de la teoría de la relatividad, es un ejemplo de esto, ya que la formulación matemática de la relatividad no hubiera sido posible sin el antecedente de las geometrías no-euclidianas. En la actualidad las aplicaciones de las geometrías no-euclidianas abarcan muchos campos del quehacer humano, como la ciencia, la ingeniería mecánica, la construcción, la arquitectura, el arte y por supuesto en la matemática misma.

PALABRAS CLAVE

Geometrías no-euclidianas, quinto postulado de Euclides, geometría hiperbólica, geometría de Riemann.

ABSTRACT

Euclidean geometry is founded on five postulates that are presented as self-evident truths, which cannot be doubted. For a long time it was thought that there could be no geometry other than Euclid's. However, doubts about the independence of the fifth postulate with respect to the other four, opened the way for the development of new geometries. The philosophical impact of non-Euclidean geometries caused a revolution in mathematical thought, transforming mathematics into an even more abstract science and opening the possibility of conceiving more complex spaces. The development of the theory of relativity, for example, would not have been possible without the antecedent of non-Euclidean geometries. At the present time the applications of non-Euclidean geometries cover many fields of human endeavor, such as science, mechanical engineering, construction, architecture, art and in the mathematic itself.

KEYWORDS

Non-euclidian geometries, Euclide's fifth postulate, hyperbolic geometry, Riemannian geometry.

INTRODUCCIÓN

La geometría Euclidiana es aquella que aprendimos en la escuela elemental, también es conocida como geometría plana. Las ideas fundamentales de esta geometría fueron desarrolladas por los griegos y puestas en un compendio por Euclides en el año 300 a. C. en su famoso libro de geometría titulado "Los Elementos", en él resumió las ideas geométricas de la época en cinco postulados, que se presentan como verdades evidentes, "de cuya veracidad no se puede dudar", según lo estableció Euclides. Sobre la base de solo estos cinco postulados construyó toda la geometría elemental.

El quinto postulado de la obra de Euclides, conocido como el postulado de las paralelas, establece que "por un punto exterior a una recta se puede pasar una y solo una recta paralela a la recta dada". Este postulado provocó una gran inquietud debido a que tenía la apariencia de que podía deducirse de los otros cuatro, por lo que podía eliminarse de la lista de postulados. Desde

la época de Ptolmeo (siglo II) hasta el siglo XIX, los matemáticos intentaron en vano obtener una deducción lógica de este postulado a partir de los otros cuatro.

En el año de 1733 se realizó uno de los más famosos trabajos para intentar "probar" el quinto postulado de Euclides; Fue llevado a cabo por el matemático italiano Gerolamo Saccheri, quien era un sacerdote jesuita. Saccheri utilizó el método de demostración de reducción al absurdo, el cual consiste en suponer que algún enunciado es verdadero y mediante una serie de razonamientos lógicos, llegar a un absurdo. Con esto se concluye que el enunciado supuesto es falso.

Saccheri escribió un libro completo sobre este tema, en donde consideró el quinto postulado de Euclides como un teorema e intentó demostrarlo mediante el procedimiento de reducción al absurdo suponiendo lo contrario que establece el postulado. Supuso que por un punto exterior a una recta pasa más de una recta paralela a la recta dada. Partiendo de esto y siguiendo razonamientos lógicos buscaba llegar a una contradicción. El resultado fue que no encontró ningún absurdo, por lo que se concluye que el postulado de las paralelas es independiente de los otros cuatro postulados.

Su libro consiste de todos los intentos que hizo para encontrar una contradicción. Demostró una gran cantidad de teoremas, contenidos en su libro, y llegó a la conclusión, el quinto postulado de Euclides, no se puede demostrar a partir de los otros cuatro. Sin percatarse de ello, Saccheri desarrolló una nueva geometría, una geometría no-euclidiana. Esa nueva geometría admitía los primeros cuatro postulados de Euclides e incluía un quinto que establecía que por un punto exterior a una recta dada puede trazarse más de una paralela a tal recta. Saccheri no se dio cuenta de que había abierto el camino para el desarrollo de nuevas geometrías, consistentes todas desde el punto de vista de la lógica. Se concluyó que el quinto postulado es independiente de los otros cuatro.

Quien primero se dio cuenta de la importancia del trabajo de Saccheri fue Nikolai Lobachevsky, un matemático ruso que, en el año de 1829, casi cien años después del libro de Saccheri, formuló y publicó una geometría no-euclidiana. Lobachevsky publicó un artículo sobre una nueva geometría con el título "Sobre los principios de geometría". Fue publicado en una revista de la Universidad de Kazán, en Rusia, donde presentaba una geometría diferente a la de Euclides.¹, fue de tal interés para algunos matemáticos que Gauss, el gran matemático alemán, se puso a estudiar ruso, el idioma en el que estaba escrito el artículo, para poder leerlo en su versión original.

Con los trabajos de Lobachevsky se inició formalmente el estudio de las Geometrías no-Euclidianas (GnE). La geometría de Lobachevsky, aun cuando era lógicamente consistente, no fue aceptada en su momento por muchos miembros de la comunidad de matemáticos, quienes la consideraban algo absurdo, que iba en contra de la intuición. Sin embargo, el descubrimiento de las GnE fue el punto de partida para iniciar una revisión de posiciones filosóficas respecto al significado de la matemática en general.

En la actualidad, el éxito que han tenido las aplicaciones de las GnE en la física, en la teoría de la relatividad especial y general, llevó a los matemáticos a confiar más en los métodos analíticos y procedimientos algebraicos abstractos que en la intuición geométrica.

La contribución de Lobachevsky al pensamiento moderno es en realidad muy profunda. Inició una nueva forma de pensar basada en la abstracción y no en la intuición, por eso es que hay quienes dicen que Lobachevsky es el Copérnico de la geometría o de la matemática. Otros, quienes consideran que sus ideas son de un alcance mucho mayor, le llaman el Copérnico del Pensamiento.

El impacto de sus ideas fue crucial para el desarrollo de la física del siglo XX ya que introdujo una nueva concepción filosófica de la matemática la cual también produjo una revolución en el pensamiento matemático. Las ideas kantianas relacionadas con el hecho de que toda geometría se basaba en lo empírico quedaron destruidas². A partir de entonces, se aceptó que es posible construir otras geometrías lógicamente consistentes, con la misma validez que la de la geometría euclidiana³.

LA NATURALEZA DE LA MATEMÁTICA

En sus inicios la matemática surgió de la realidad física, la geometría, por ejemplo, se basó en el concepto de que el espacio físico es plano. Nadie pensaba en hacer una geometría esférica, aun sabiendo que la Tierra es esférica. Esto se debió a que, a pequeña escala, se considera la superficie terrestre como si fuera plana. Estas ideas son el origen del empirismo del que hablaba Manuel Kant al asegurar que no es posible llegar al conocimiento físico completo apoyándose solamente en la razón². Planteaba esto como si la geometría fuera una estructura teórica empírica o una ciencia experimental.

Indiscutiblemente que la geometría tiene su origen en lo que el ser humano observa en la naturaleza. Las figuras geométricas que ve a su alrededor son las que introduce en la geometría, sin embargo, para estudiar las propiedades de las figuras geométricas el matemático se abstrae de los objetos materiales y los trata como entes abstractos. Fue Tales de Mileto quien introdujo en la geometría esta forma abstracta de pensar.

Tales de Mileto, quien vivió en Grecia en el siglo VI a. C., al estudiar las figuras geométricas descubrió una forma nueva de analizar las cosas, una manera diferente de pensar y razonar. Introdujo el pensamiento abstracto y el concepto de figura geométrica como un ente idealizado, abstracto, separado de los objetos materiales. Encontró que era posible conocer las propiedades de los objetos en sí, sin necesidad de tenerlos físicamente, había concluido, al estudiar las figuras geométricas como el triángulo isósceles y el círculo, trazando figuras en la arena, podía identificar muchas propiedades de estas sin necesidad de relacionarlas con objetos materiales. Fue así como descubrió que mediante solo el razonamiento podía llegar al conocimiento de las propiedades de figuras geométricas.

Posteriormente, Aristóteles quien vivió también en Grecia en el siglo III a. C., desarrolló la lógica y las leyes del razonamiento lógico. Uniendo las ideas de Tales de Mileto con las reglas del razonamiento lógico de Aristóteles, Euclides (siglo III a. C.) resumió maravillosamente los conocimientos de geometría y matemáticas de su época en su famoso libro "Los Elementos".

La geometría se convirtió en un sistema lógico formal, un sistema axiomático en donde se introducen un conjunto de objetos abstractos (puntos, rectas, planos) y un conjunto de postulados donde se determinan relaciones entre estos objetos. Todas las conclusiones se obtienen a partir del razonamiento lógico, respetando los postulados. En general esta es la característica de toda la matemática, su abstracción y el rigor lógico que utiliza para obtener conclusiones.

Viendo la geometría como un sistema lógico formal, no debemos pensar que se construye o se formula en un espacio físico hecho de objetos. La geometría resulta ser un producto de la mente, sin relación con los objetos materiales. Si lo vemos así, podremos entender más fácilmente el origen de las geometrías no-euclidianas.

LA ABSTRACCIÓN EN LA MATEMÁTICA

El notable filósofo y matemático británico Bertrand Russell decía que la matemática es la única ciencia donde nosotros nunca sabemos de lo que estamos hablando y si lo que decimos de ella es verdadero o no. Estrictamente hablando, no sabemos, por ejemplo, lo que es un círculo, ni una recta, ni lo que es un número. La representación usual de un círculo o una recta corresponde a lo que intuimos de la geometría euclidiana (GE), pero existen círculos y rectas en otras geometrías que no son los objetos familiares de la GE. Ver figura 1. En la formulación abstracta de una geometría, no se requiere ninguna representación o realización pictórica de sus conceptos, como la línea recta o el círculo.

LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA

Todo sistema matemático es lógico deductivo, es decir, está basado en la lógica y en la validez del razonamiento deductivo. Todo cuerpo de doctrina de una teoría matemática se conforma de una serie de resultados (teoremas) obtenidos a partir de un conjunto de objetos indefinidos y de axiomas o postulados. Los postulados son enunciados que se establecen como verdades que se aceptan sin demostración. Sin embargo, usualmente existe una componente empírica para establecer los axiomas o postulados.⁴

Con el desarrollo de las GnE todos los sistemas lógico-formales sufrieron un fuerte impacto en su estructura. Se encontró que es posible desarrollar estructuras teóricas sin apego al empirismo Kantiano, es decir, sin necesidad de observar el mundo físico donde vivimos.

LA LÓGICA ARISTOTÉLICA

Aristóteles desarrolló lo que se consideró el instrumento de la razón más poderoso que se había creado: La Lógica o las leyes del razonamiento correcto. En 14 reglas fundamentales derivadas del sentido común y de las cuales, según parecía, nadie podía dudar, se estableció el procedimiento para conducir el razonamiento exacto y deductivo. El desarrollo posterior de la matemática utilizó esta potente herramienta para probar sus enunciados o teoremas, depositándose una gran confianza y seguridad en el procedimiento.

La lógica, que es la estructura formal del razonamiento deductivo, establece los principios que gobiernan la validez de la inferencia. En la matemática, la lógica dicta las reglas para la demostración, la cual es una sucesión de razonamientos conectados mediante los principios que rigen la validez de la inferencia. El programa para construir un sistema lógico consiste en introducir cierto número de axiomas o postulados, los cuales, por principio, son aceptados como verdaderos. Se introducen también conceptos no-definidos y se definen relaciones entre estos conceptos indefinidos. Ejemplos de conceptos indefinidos en la geometría son, el punto, la recta y el plano. A partir de aquí, utilizando las reglas de la lógica, se deducen relaciones entre los conceptos indefinidos. Las relaciones obtenidas mediante este procedimiento reciben el nombre de teoremas. Esta es esencialmente la línea de pensamiento que se sigue para construir una estructura matemática.

Este fue el camino que siguió Euclides, algunos años después de que Aristóteles formuló las reglas de la lógica para formalizar el estudio de la geometría. Euclides aplicó maravillosamente estas reglas para establecer la geometría como una ciencia deductiva, basada en la lógica. En su obra magna, “Los Elementos”, Euclides estableció diez suposiciones a partir de las cuales pudo demostrar cientos de teoremas.⁵

Suposiciones que Euclides aceptó como verdaderas

1. Dos cosas iguales a una tercera lo son entre sí.
2. Si cantidades iguales se suman a cantidades iguales, los resultados son iguales.
3. Si cantidades iguales se restan de cantidades iguales, los resultados son iguales.
4. Dos figuras geométricas que al superponerlas coinciden en todas sus partes, son iguales.
5. El todo es mayor que cualquiera de sus partes.

Postulados de la geometría Euclidiana

Euclides hizo también algunas suposiciones acerca de ideas geométricas como puntos y rectas. Los postulados o suposiciones que Euclides tomó como verdades y que no requerían demostración, fueron los siguientes:

1. Por dos puntos cualesquiera siempre es posible trazar una línea recta y solo una.
2. Toda recta puede prolongarse en ambos sentidos indefinidamente.
3. Dados un punto cualquiera como centro, y un radio, es siempre posible construir una circunferencia.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Por un punto cualquiera que no pertenezca a una recta dada, puede trazarse una recta y solo una, paralela a la recta dada.

Al quinto postulado se le conoce también como postulado de las paralelas o de la unicidad de la paralela. Aquí es importante aclarar que la definición de líneas paralelas se refiere a dos rectas

que por más que se les prolongue nunca se cortan. No es lo mismo decir que las rectas paralelas son aquellas que al prolongarse permanecen siempre a la misma distancia. Esto es importante porque en las geometrías no euclidianas las rectas paralelas no se cortan ni permanecen a la misma distancia, pueden irse acercando cada vez más al tender al infinito, pero nunca llegan a juntarse.

Todos los teoremas que probó Euclides tenían la siguiente estructura lógico-deductiva: Si (algo se cumple) entonces (necesariamente ocurre tal cosa). Esta forma de razonamiento se puede representar simbólicamente de la siguiente forma: Si $p \Rightarrow q$. Es decir, si p es verdadero, entonces se concluye por necesidad que q es verdadero. Aquí p y q son, en general, enunciados. Esta es la esencia del método de razonamiento deductivo.

El impresionante éxito que tuvo Euclides al aplicar la lógica, partiendo solamente de axiomas, conceptos indefinidos como punto y línea recta, y relaciones entre ellos para formalizar el estudio de la geometría, se quedó solo en esta rama de las matemáticas y no se aplicó a ninguna otra.

Más de dos mil doscientos años después de Euclides, David Hilbert causaría una nueva revolución en la estructura lógico formal de la geometría al formalizarla desde el punto de vista de la teoría de conjuntos. Antes de eso, al finalizar el siglo XIX, los matemáticos quisieron hacer lo mismo que Euclides hizo, pero con los números naturales. El matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) logró formalizar la teoría de los números naturales partiendo de 9 axiomas, que posteriormente se reducirían a cinco. Estos conjuntos de postulados se conocen en la actualidad como Axiomas de Peano, los cuales son tomados como el fundamento para construir toda la Teoría de Números.

LA LÍNEA RECTA

El concepto de línea recta en la geometría de Euclides se introduce estableciendo que está determinada por dos puntos. Nótese que esta no es una definición, es solo un postulado de existencia. Existe otra manera de introducir el concepto de línea recta en cualquier superficie, estableciendo que es la distancia más corta entre dos puntos del espacio que estamos considerando. En general, a las líneas de longitud mínima se les llama geodésicas del espacio considerado. Sin embargo, existen modelos de geometrías no-euclidianas, como los modelos de disco de Beltrami-Klein y el de Poincaré, donde no se satisface el requisito de distancia mínima para un segmento de la recta que une dos puntos del espacio como se verá más adelante.

Un caso particular de GnE es el de la geometría esférica, en la cual no existen líneas paralelas. La geometría esférica es aquella que se construye sobre la superficie de una esfera. En esta geometría la línea recta, determinada por dos puntos del espacio y definida como la distancia más corta entre estos dos puntos, resulta ser un arco de círculo máximo. Esto se prueba matemáticamente usando el cálculo de variaciones.

Observando la figura 1 notamos que "la recta" determinada por los puntos P y Q corresponde al segmento de círculo máximo y que al prolongarla se cierra en un círculo. Siguiendo la definición de paralelismo dada en la geometría euclidiana, donde se establece que dos líneas rectas son paralelas si nunca se cortan, aun prolongándolas indefinidamente, encontramos que en la geometría esférica no existen rectas paralelas ya que todos los círculos máximos se cortan en dos puntos.

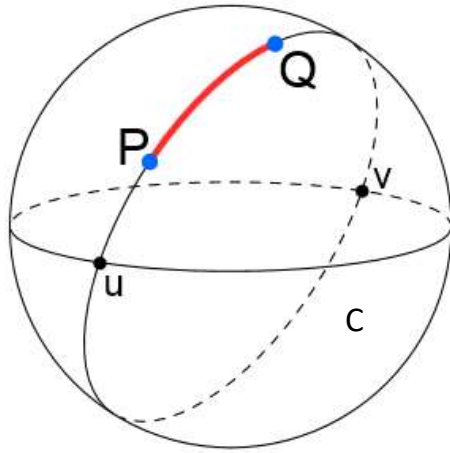


Fig. 1. Círculo máximo trazado sobre los puntos P y Q de una superficie esférica. En la geometría esférica no existen rectas paralelas. Todas las rectas, las cuales corresponden a segmentos de círculos máximos, al prolongarlas se cierran formando círculos máximos. Por otra parte, todos los círculos máximos de una esfera, que no son idénticos, se cortan en dos puntos. Esto indica que no existen líneas paralelas.

Por cualquier punto C que no pertenezca al círculo máximo determinado por PQ, no se puede construir una paralela a la recta PQ (círculo máximo). Toda línea recta que pase por C cortara a la "recta PQ".

Tomando en cuenta un espacio general continuo y diferenciable y usando como definición de línea recta determinada por dos puntos, como la distancia más corta entre dos puntos, Felix Klein probó en el año de 1871 que, solo existen tres tipos diferentes de geometrías, la de Lobachevsky, Riemann y Euclides.

Existen grandes diferencias entre la geometría de Euclides y la geometría sobre la esfera. En la geometría esférica no existen rectas paralelas. Además la suma de los ángulos internos de un triángulo esférico no suman 180° , de hecho es mayor que esta cantidad, como lo podemos ver en la figura 2 .

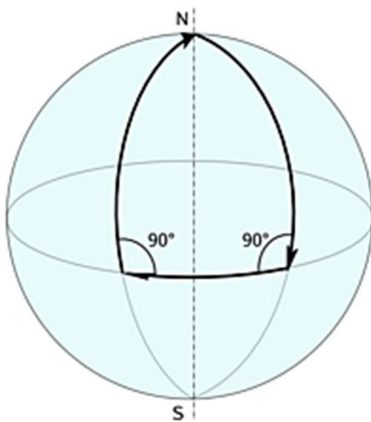


Fig.2. Triángulo esférico. La suma de sus ángulos internos es mayor de que 180° .

En la geometría hiperbólica, definida sobre una superficie hiperbólica, como lo muestra la figura 3, las rectas son geodésicas sobre esta superficie curva. Por definición, las rectas paralelas no se cortan, y como se puede observar en la figura, por un punto exterior a una recta se pueden trazar un infinito número de rectas paralelas a la recta dada.

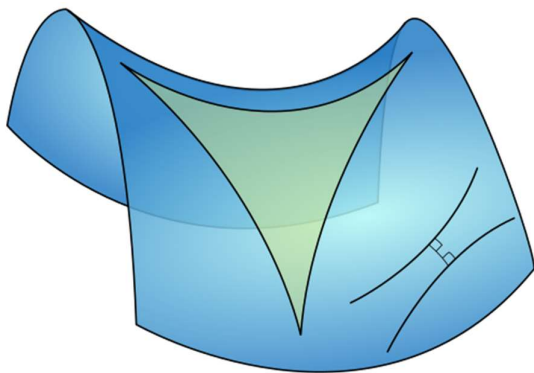


Fig. 3. Modelo de la silla de montar para la geometría hiperbólica. Este tipo de superficie se dice que es hiperbólica debido a que tiene una curvatura negativa. En la geometría hiperbólica un triángulo como el que se muestra en esta figura tiene la característica de que la suma de sus ángulos internos es menor que 180 grados. El par de líneas que se muestran en la figura son líneas rectas en este espacio hiperbólico. Por más que se les prolongue nunca llegan a intersectarse, sin embargo, no conservan la misma distancia entre ellas.

GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS

Por mucho tiempo se pensó que no podía existir una geometría diferente a la euclidiana, pues parecía evidente que el espacio era euclidiano. Sin embargo, el matemático ruso Alexander Lobachevsky probó que existen otras geometrías diferentes a la euclidiana.

El gran mérito de Lobachevsky fue lograr una nueva geometría auto-consistente, sin contradicciones lógicas. En el año de 1872 el matemático alemán Felix Klein probó que se puede establecer una correspondencia uno a uno entre la geometría Euclidiana y la geometría de Lobachevsky. A través de conceptos de geometría proyectiva, Klein fue el primero en reconocer e identificar que la geometría de Lobachevsky podía representarse en ciertas superficies, en este caso en un plano hiperbólico. Con esto se demostraba que ambas geometrías, la hiperbólica y la euclidiana, eran igualmente aceptables. Ninguna geometría es más fundamental que la otra, aun cuando la Euclidiana nos parezca más intuitiva. Esto último se debe a que pensamos usualmente en superficies planas, pero para la geometría de Lobachevsky hay que imaginar superficies diferentes. De aquí surgieron más generalizaciones a la geometría. La geometría esférica, la parabólica, etc. las cuales representan sistemas matemáticos distintos e independientes uno del otro. Este resultado nos sorprende, pero no debería ser así, ya que la superficie de la Tierra no es plana, sino curva. Los navegantes marinos no usan la geometría plana sino la esférica y sus rutas de navegación se determinan, en general, por la distancia más corta entre dos puntos. En este caso la distancia más corta no es la línea recta sino un arco de círculo máximo que une a los dos puntos. Lo mismo ocurre en la navegación aérea. Ver la figura 1.

Después de la formulación de su nueva geometría, Lobachevsky se preguntó ¿cuál será la geometría del espacio físico?, es decir la geometría del universo. Interesado en responder esta pregunta, Lobachevsky estudió astronomía buscando encontrar un procedimiento para saber si el universo es un espacio donde se satisface la geometría hiperbólica. Buscó construir un triángulo astronómico, considerando dos puntos extremos de la órbita de la Tierra alrededor del Sol y la estrella Sirio. Trazó un triángulo con esos tres puntos y midió por paralaje los ángulos del triángulo para saber si eran menores de 180 grados como lo establece su geometría. No obtuvo ningún resultado que contradiga que el universo es euclidiano. (La estrella Sirio se encuentra a una distancia de 8.6 años luz de la Tierra).

LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD Y LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

Durante mucho tiempo se pensó que la geometría de Lobachevsky no tenía conexión alguna con el mundo físico. Sin embargo, con el surgimiento de la teoría de la relatividad, se encontró que la geometría hiperbólica de Lobachevsky es la herramienta adecuada para describir el espacio de velocidades relativista. Este hecho se muestra en la forma matemática de las transformaciones

de Lorentz⁶. Es por esto que, sin el desarrollo de las GnE, Einstein no hubiera podido formular su teoría de la relatividad, ya que esta requiere un espacio no-euclidiano.

GEOMETRÍAS DE ESPACIOS CURVOS

El matemático alemán F. B. Riemann (1826-1866), desarrolló la teoría general de la geometría para cualquier tipo de superficie. La geometría Riemanniana es en general el estudio de los espacios con curvatura, lo que se expresa técnicamente como la geometría de superficies curvas. La geometría Riemanniana resulta ser una generalización de la geometría Euclidiana, donde ésta corresponde a espacios de curvatura cero, es decir, para el espacio plano.

EL ESPACIO EUCLIDIANO

Las geometrías de espacios curvos, se determinan por la forma de medir distancias en cada espacio. Por definición, una geometría describe las propiedades del espacio considerado.

Cualquier espacio geométrico queda determinado por la forma de medir distancias en ese espacio. La regla de medir distancias se da mediante la métrica, que es la fórmula que tenemos para medir la distancia entre cualquier par de puntos de ese espacio.

En la geometría Euclidiana tridimensional, el cuadrado de la distancia ds^2 entre dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ muy próximos entre sí está dada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Esto no es otra cosa que el teorema de Pitágoras en tres dimensiones.

Podríamos generalizar la definición de geometría Euclidiana a cualquier número de dimensiones. Para un espacio Euclidiano de N dimensiones, escribimos

$$ds^2 = \sum_{i=1}^N dx_i^2$$

donde las coordenadas las hemos designado como $x_1, x_2, \dots, x_N$

En forma compacta la expresión anterior la escribimos como

$$ds^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \delta_{ij} dx_i dx_j$$

Definiendo la cantidad δ_{ij} como uno si $i = j$ y como cero si $i \neq j$.

Enfatizamos que en general, la geometría de un espacio queda determinada por la métrica ds^2 .

EL ESPACIO DE MINKOWSKI

Las teorías compatibles con la Teoría Especial de la Relatividad (TER), se formulan de tal manera que sean invariantes ante las transformaciones de Lorentz. La mecánica y el electromagnetismo son construidas de tal manera que sus ecuaciones satisfagan el principio de relatividad especial de Einstein. En esta teoría todos los sistemas inerciales son equivalentes y las transformaciones de Lorentz conectan las observaciones realizadas en cualquier par de sistemas inerciales. El espacio donde se formula la TER es el espacio-tiempo de cuatro dimensiones llamado espacio de Minkowski.

El espacio de Minkowski es un ejemplo de geometría no euclidiana. Es un espacio de cuatro dimensiones, con el tiempo como cuarta dimensión. En la teoría de la relatividad la velocidad de la luz en el vacío, usualmente denominada con la letra c , es constante y puede utilizarse como factor para que las cuatro coordenadas (x, y, z, t) tengan las dimensiones de longitud si la cuarta coordenada la tomamos como ct . Un punto en el espacio de Minkowski queda determinado por la tétrada (x, y, z, ct) .

La regla para medir distancias en el espacio de la TER está dada por la métrica de Minkowski definida como

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Como es evidente de la forma de esta métrica, ésta no corresponde a un espacio Euclidiano. Define un espacio plano (curvatura cero) pero no es Euclidiano ya que la diferencia en signos en la métrica lo hace diferente.

Las geometrías se clasifican por la curvatura del espacio que estemos considerando. Ejemplos de geometrías de espacios con curvatura nula son la geometría euclidiana, pero también la de Minkowski. Ejemplos de geometrías de espacios de curvatura positiva son la geometría esférica y la elíptica. Un ejemplo de geometrías de espacios con curvatura negativa es la geometría hiperbólica.

REALIZACIÓN FÍSICA DE LA GEOMETRÍA DE ESPACIOS CURVOS

En la teoría de la gravitación de Einstein, que es la Teoría General de la Relatividad (TGR), el espacio el tiempo y la materia están estrechamente conectados, uno no existe sin los otros. El tiempo, por ejemplo, depende de las coordenadas espaciales. El espacio donde se formula la TGR es un espacio curvo de cuatro dimensiones. Para simplificar la notación tomaremos la velocidad de la luz $c = 1$. La geometría que describe el espacio-tiempo de la TGR es la geometría

Riemanniana, cuya métrica está dada por $ds^2 = \sum_{\mu=1}^4 \sum_{\nu=1}^4 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ siendo ds^2 el cuadrado de

la distancia entre dos puntos con coordenadas en el espacio-tiempo dadas por: (x, y, z, t) y $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$. Aquí se ha usado x^μ con $\mu = 1, 2, 3$ y 4 para x, y, z y t respectivamente. Las cantidades $g_{\mu\nu}$ se conocen como las componentes del tensor métrico y sus valores dependen de la posición y del tiempo de acuerdo de cómo está distribuida la materia y la energía en el espacio y su variación con el tiempo. De la forma de esta métrica se aprecia inmediatamente la interrelación espacio-tiempo-materia. Este espacio-tiempo corresponde a un espacio curvo descrito por una geometría no-euclidiana⁷.

MODELOS DE LAS GEOMETRÍAS NO-EUCLIDIANAS

Un modelo de una geometría es una representación pictórica donde se exhiben las propiedades de la geometría. La idea es la misma que en los modelos de la geometría euclidiana. La representación de un círculo, una recta o un triángulo, como los conocemos, son ejemplos de modelos de figuras geométricas euclidianas.

Las primeras geometrías no-euclidianas se construyeron dejando sin cambio los cuatro primeros postulados originales de Euclides e incluyendo un quinto postulado modificado. El aspecto esencial de las GnE es que el concepto de línea recta, consistente con los postulados 1 y 2, no corresponde solamente a lo que pictóricamente entendemos por línea recta en la geometría euclidiana. En los espacios no-euclidianos, la negación del quinto postulado exige representar a las líneas rectas de manera diferente a lo usual.

Por lo tanto, en las GnE existen otras representaciones de las líneas rectas y esto permite la negación del quinto postulado de Euclides. Partiremos del hecho de que las GnE que nos interesan son aquellas en las cuales se preservan los primeros cuatro postulados de Euclides, y donde el quinto se cambia por una de las siguientes dos opciones: a) por un punto exterior a una recta no se puede trazar ninguna recta paralela a la recta dada; b) por un punto exterior a una recta se pueden trazar más de una recta paralela a la recta dada.

Existen esencialmente dos GnE que satisfacen los cuatro primeros postulados de Euclides y el quinto postulado modificado en la forma dada en a) o en b). La geometría hiperbólica o de Lobachevsky que se basa en el postulado b), y la geometría elíptica o de Riemann que se construye bajo el postulado a).

Una de las ideas de los desarrolladores de las GnE fue la de proponer modelos o representaciones gráficas o pictóricas de estas geometrías. Estos modelos consisten en superficies donde se pueda definir y trazar el concepto de línea recta y en la cual tengamos una manera de medir distancias o longitudes de segmentos de curvas. Todo esto, por supuesto, respetando los postulados de la geometría de la que se está tratando. Se mantiene el postulado de Euclides que establece que dos puntos determinan una recta, y por definición, dos rectas son paralelas si nunca se cortan.

TRES MODELOS DE LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

Existen varios modelos muy realistas de las geometrías no-euclidianas que son manifiestamente compatibles con las ideas opuestas al postulado de las paralelas de Euclides. Hay modelos euclidianos de geometrías no-euclidianas. De este tipo de modelos mencionaremos, como ejemplos, tres de ellos para la geometría hiperbólica. Estos modelos son: el Modelo de Beltrami-Klein, el de Disco de Poincaré y el de la Silla de Montar⁸.

GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

Recordemos que en un modelo de la geometría hiperbólica podemos definir puntos, distancias, lo que es una línea recta, ángulos, etc. como queramos, siempre y cuando se respeten los postulados de nuestra geometría. Puesto que el único postulado diferente en la geometría hiperbólica es el quinto de Euclides, lo único que exigimos al modelo es que por un punto exterior a una recta dada pasen más de una paralela a la recta dada.

MODELO DE BELTRAMI-KLEIN

El modelo de Beltrami-Klein fue desarrollado por el matemático italiano Eugenio Beltrami (1835-1900) y el matemático alemán Felix Klein (1849-1925). En este modelo, el espacio K consiste de todos los puntos del interior del círculo limitado por la circunferencia C . Este espacio se conoce como plano hiperbólico. Los puntos de C no pertenecen al plano hiperbólico y son llamados puntos al infinito. Las rectas son definidas como las cuerdas abiertas del círculo determinadas por dos puntos del disco. Note que esta definición de recta corresponde al concepto euclidiano que establece que dos puntos determinan una recta y solo una. Ver figura 4.

Notemos que los puntos del espacio hiperbólico de Beltrami-Klein pertenecen al interior del disco. Al considerar un segmento de recta, determinada por dos puntos en el plano hiperbólico, podemos prolongarla indefinidamente en ambas direcciones sin salirnos del disco, ya que el disco no tiene puntos límites, pues los puntos de la circunferencia que limita al disco no pertenecen al plano hiperbólico. Los puntos de la circunferencia son los puntos que pertenecen al infinito. Las rectas del plano hiperbólico son por lo tanto infinitas ya que se pueden prolongar indefinidamente dentro del disco, sin salirse de él pues los puntos de la circunferencia que limita al disco no pertenecen al plano hiperbólico. El concepto de recta infinita se refiere a una recta sin puntos finales o bordes, pero de longitud finita. La longitud de una recta en el modelo de Beltrami-Klein está acotada, pero no está limitada. La máxima longitud de las rectas corresponde al diámetro del disco. Esta idea de longitud finita pero ilimitada se ejemplifica con el de la superficie de una esfera de radio r , cuya área es $4\pi r^2$, pero la superficie es ilimitada, no tiene bordes.

En el modelo de Beltrami-Klein por cualquier par de puntos P_1 y P_2 podemos trazar una recta y solo una. Ver figura 4.

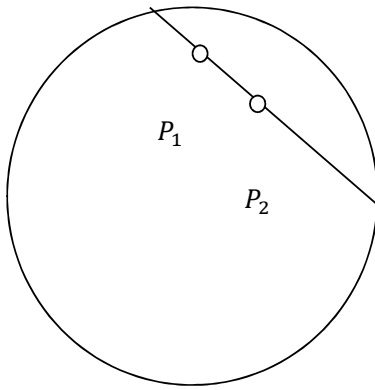


Fig. 4. Representación gráfica de una recta en el Modelo de Beltrami-Klein para el plano hiperbólico de la geometría de Lobachevsky. Por dos puntos se puede trazar una recta y solo una.

De acuerdo con la figura 5, por un punto P que no pertenece a la recta a , se pueden pasar muchas paralelas a a .

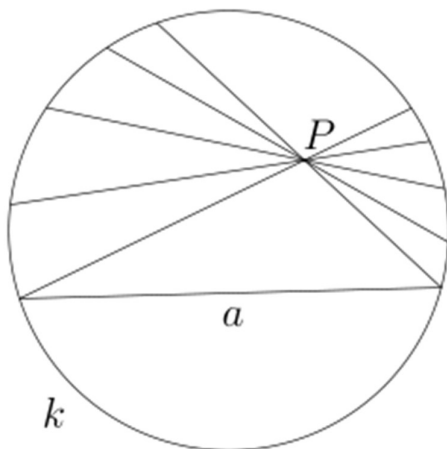


Fig. 5. Modelo de Beltrami-Klein para el plano hiperbólico de la geometría de Lobachevsky.

MODELO DE DISCO DE POINCARÉ

El Disco de Poincaré es un modelo o representación de la geometría hiperbólica en un plano euclidiano (modelo bidimensional). El espacio hiperbólico está formado por todos los puntos del disco, sin incluir los puntos de la circunferencia que lo limita. Por otra parte, la definición de recta determinada por dos puntos en el plano del disco es la de una curva circular que cae perpendicularmente sobre los bordes del disco. Todo es euclidiano, a excepción de la definición de línea recta. Lo diferente es la definición de línea recta, que es un arco de círculo perpendicular a la circunferencia del disco. El plano del disco es, por supuesto, euclidiano. En la figura 6, al considerar la recta a y un punto P que no pertenece a la recta a , encontramos que las rectas b y c son paralelas a la recta a , en el sentido que ambas son rectas que pasan por el punto P y no se intersecan con a . Observamos que existe un infinito número de rectas paralelas a a que pasan por el punto P .

Un postulado de esta geometría es que las líneas rectas se pueden prolongar indefinidamente. Puesto que el borde del disco, que es círculo, no pertenece al espacio hiperbólico, este borde es inalcanzable y corresponde a infinito.

Los modelos de Disco de Poincaré y el de Beltrami-Klein de la geometría hiperbólica son ambos planos euclidianos y no corresponden a superficies hiperbólicas. Son llamados planos hiperbólicos. En ambos casos el plano hiperbólico K se define como el conjunto de puntos del interior de la circunferencia. También es llamado disco abierto, que incluye todos los puntos del interior excepto los de la circunferencia.

Circunferencias ortogonales son aquellas que se cortan en ángulo recto. En el modelo de disco de Poincaré, una recta hiperbólica es un segmento de una circunferencia ortogonal a la circunferencia del disco o plano hiperbólico K . Todos los puntos de la recta están dentro el disco. Ver figura 9.

En el modelo de Disco de Poincaré, las rectas se clasifican en dos tipos; 1) Las cuerdas que pasan por el centro del disco y 2) Los segmentos de circunferencia dentro del disco que son perpendiculares a la circunferencia que limita al disco. Esto significa que una recta en este modelo es un arco que pertenece a una circunferencia ortogonal a la circunferencia del Disco de Poincaré. Nos podemos mover indefinidamente sobre los puntos de una recta sin salir del disco, sin llegar al borde.

Dos rectas en el plano hiperbólico son paralelas si no se cortan. En este caso encontramos que por un punto exterior a una recta hiperbólica pasan un infinito número de rectas hiperbólicas paralelas a la recta dada, como puede observarse en la figura 6.

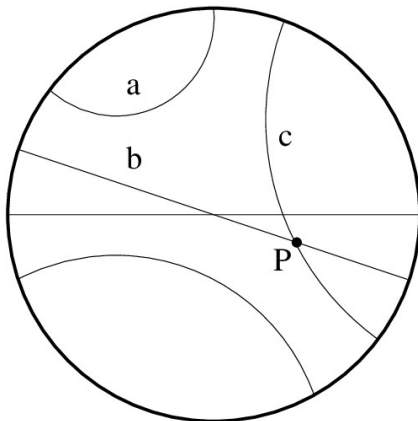


Fig. 6. El Disco de Poincaré como modelo de la geometría hiperbólica.

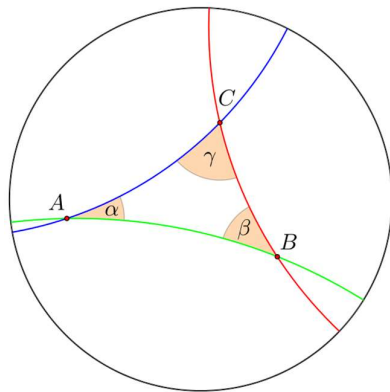


Fig. 7. Construcción de un triángulo (con líneas rectas) en el disco de Poincaré. Los vértices del triángulo son los puntos A, B y C . Como podemos observar, la suma de los ángulos internos del triángulo es menor de 180° . $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$

MODELO DE LA SILLA DE MONTAR

En el Modelo de la silla de montar para la geometría hiperbólica la superficie corresponde a la superficie de una silla de montar. En este caso la superficie en consideración es una superficie curva, hiperbólica. La definición de recta sobre esta superficie queda determinada por dos puntos, correspondiendo a la línea geodésica que una los puntos, es decir, el segmento de menor longitud

que los une. Las rectas pueden prolongarse indefinidamente sobre la superficie en ambas direcciones.

La geometría hiperbólica en este caso tiene como representación una superficie de Riemann de curvatura constante igual a -1 . Esto se muestra en la figura 3.

APLICACIONES PRÁCTICAS DE LAS GEOMETRÍAS NO-EUCLIDIANAS

La teoría de la relatividad introdujo una manera nueva de entender el universo y los recursos de las geometrías no-euclidianas fueron fundamentales para lograrlo. Además de su uso en la física, en la relatividad especial y general, las geometrías no-Euclidianas tienen importantes aplicaciones prácticas. Entre ellas encontramos la localización de posiciones sobre la superficie terrestre, así como en el diseño y el funcionamiento de los dispositivos GPS. Puesto que la Tierra no es plana, estos dispositivos deben diseñarse en base a una geometría esférica donde se incluyan efectos de la relatividad general.

En la navegación aérea y marítima, se buscan las rutas más cortas. Por supuesto que estas no se determinan con la geometría euclidiana sino usando la geometría esférica, la cual es no euclidiana.

Otras aplicaciones se presentan en los dispositivos de reconocimiento de señales digitales de voz y de visión, así como en el diseño y fabricación de piezas mecánicas para la industria con superficies curvas.

La geometría de cualquier superficie curva es no-euclidiana. Por tal motivo las aplicaciones de las GnE son innumerables ya que cualquier trabajo que se quiera realizar sobre una superficie curva requiere el conocimiento de su geometría. Las aplicaciones de las geometrías no-euclidianas abarcan todos los campos del quehacer humano. La ciencia, la ingeniería mecánica, la construcción, la arquitectura y el arte. Si observamos la figura 8 de una iglesia notaremos que el techo de la cúpula central está cubierta con gajos que son triángulos esféricos. Si se utilizan gajos de una sola pieza, debe utilizarse la geometría esférica para determinar su forma. Si se utilizan pequeñas piezas, se puede usar con buena aproximación, geometría plana.

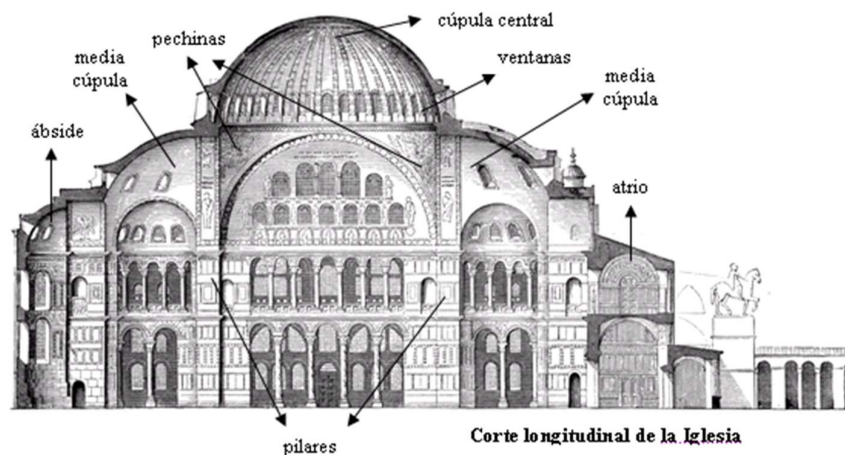


Fig. 8. Iglesia de Santa Sofía en Estambul, inaugurada en el año 537.

SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERNOS DE UN TRIÁNGULO

Como es bien sabido, la suma de los ángulos internos de un triángulo en la geometría euclidiana es 180^0 . Sin embargo en las geometrías no euclidianas esta suma es mayor a 180^0 para la geometría esférica como se observa en la figura 2. En la geometría hiperbólica esta suma es menor que 180^0 , ver figuras 3 y 7.

LA FÍSICA DEL SIGLO XX

El desarrollo de la física del siglo XX, hubiera sido imposible sin las geometrías no-Euclidianas y otras estructuras algebraicas abstractas. Cuando los matemáticos introdujeron las álgebras no-conmutativas y las geometrías no-Euclidianas se pensó que estas eran simples estructuras matemáticas abstractas que nada tenían que ver con la realidad, es decir, con aplicaciones al mundo real. Sin embargo, las dos teorías fundamentales de la física moderna, la Mecánica Cuántica y la Teoría de la Relatividad, están totalmente apoyadas en estas dos ramas de la matemática. Estructuras matemáticas asociadas con álgebras no conmutativas como la de las matrices, y los operadores lineales, fueron utilizadas en la formulación de la mecánica cuántica, mientras que las geometrías no-Euclidianas fueron aplicadas en la teoría de la relatividad. En la física moderna, donde se han encontrado una gran variedad de espacios topológicos, las álgebras no conmutativas han encontrado importantes aplicaciones, entre ellas la geometría no conmutativa.⁹

IMPACTO FILOSÓFICO DE LAS GEOMETRÍAS NO-EUCLIDIANAS

El desarrollo de las geometrías no-euclidianas provocó una de las más importantes revoluciones en la historia del pensamiento matemático y de la forma moderna de pensar¹⁰. Entre las preguntas que surgieron como resultado del desarrollo de las geometrías no-euclidianas encontramos las siguientes: ¿Cuál es la geometría "verdadera"? ¿se debe responder a esta pregunta en base a observaciones experimentales, o filosóficas?, ¿Existe la línea recta como objeto o ente físico? Si pensamos en el concepto euclidiano de línea recta y nos apoyamos en los resultados de la TGR, la respuesta es que la línea recta no existe. Esto se debe a que el universo, de acuerdo con la teoría general de la relatividad, es un espacio curvo de cuatro dimensiones, por lo que, por más rígida y recta que parezca una varilla tiene una curvatura. Lo más parecido a una línea recta sería la trayectoria de un rayo de luz propagándose en una región muy alejada de objetos astronómicos, como estrellas u otros cuerpos de gran masa, pero aun así, la trayectoria de la luz debe seguir la curvatura del espacio-tiempo.

¿Es la geometría una ciencia experimental? En una ciencia experimental los resultados se someten a prueba utilizando objetos materiales. Por lo tanto, el concepto de una geometría vista como ciencia experimental, no puede aceptarse debido a que los objetos geométricos se reducirían a cuerpos materiales, ya que un experimento se hace con objetos materiales.¹¹ La geometría es una ciencia del razonamiento, una ciencia teórica, exclusivamente. Lo que sí es objeto de experimento es el de determinar la geometría del espacio físico donde nos encontramos, el cual, de acuerdo con la teoría de la relatividad, es un espacio de cuatro dimensiones, llamado espacio-tiempo.

La influencia de esta nueva concepción de la geometría impactó toda la matemática. Aun cuando al principio las ideas detrás de las geometrías no-euclidianas eran demasiado atrevidas y no fueron entendidas por muchos de los matemáticos, el impacto de estas sobre el desarrollo posterior de los diferentes campos de la matemática fue enorme. Surgió el álgebra abstracta hoy llamada álgebra moderna. Se desarrollaron nuevos sistemas matemáticos y estructuras algebraicas desconectadas por completo de la realidad, las cuales, muchas de ellas, encontraron aplicaciones posteriormente.¹²

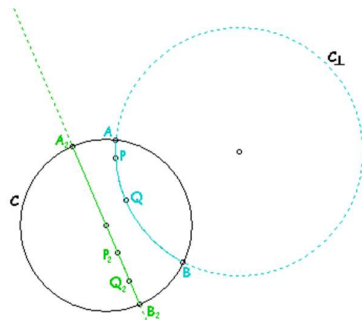


Fig. 9. Cuando dos circunferencias se cortan en ángulos de 90° decimos que las circunferencias son ortogonales. La línea recta determinada por dos puntos, se define como el segmento de una circunferencia ortogonal cuyos puntos pertenecen al disco, formando así un arco de círculo en el disco de Poincaré.

DESARROLLO FUTURO DE LAS GEOMETRÍAS

Una de las hipótesis fundamentales del espacio es que este es continuo, es decir, que podemos dividirlo indefinidamente, esto es, podemos reducir al espacio a cantidades cada vez más pequeñas sin tener ningún límite. Partiendo de lo que conocemos actualmente sobre las teorías fundamentales de la física como son la electrodinámica cuántica, la teoría electrodébil y la cromodinámica cuántica, sabemos que sus campos están cuantizados. Entendiendo por cuantización el hecho de que los campos físicos que entran en estas teorías, como el campo electromagnético, el campo nuclear débil y el campo nuclear fuerte, tienen todos ellos un comportamiento corpuscular lo cual ha sido confirmado experimentalmente (el fotón, los bosones de norma W^+ , W^- y Z^0 , y los gluones, son las partículas asociadas a estos campos). Siguiendo esta línea de razonamiento se tiene ahora como meta cuantizar el campo gravitacional.

Dado que la relatividad general es una teoría donde el campo gravitacional corresponde a la geometría del espacio-tiempo, la cuantización del campo gravitacional corresponde a la “granulación” del espacio-tiempo. Con esto tendríamos que el espacio y el tiempo no son continuos, sino que existen en paquetes de dimensiones que tienen un valor mínimo.

Experimentalmente se observa que muchas cantidades físicas como la energía, el momento lineal, el momento angular, el campo electromagnético y muchas otras, están cuantizadas, y su comportamiento físico queda muy bien descrito por teorías cuánticas. Esto no ocurre con el campo gravitacional.

En la teoría general de la relatividad, el campo gravitacional y el espacio-tiempo son cantidades físicas completamente equivalentes. No hay evidencias experimentales hasta el momento de que el espacio-tiempo esté cuantizado. Sin embargo hay fuertes motivaciones teóricas para suponer que a distancias muy pequeñas el espacio-tiempo que se manifiesta a través del campo gravitacional, mostrará efectos cuánticos, es decir, valores discretos, lo que equivale a que este espacio-tiempo no es continuo.¹³ Una nueva estructura matemática ha surgido para describir la geometría del espacio-tiempo discreto, esta es conocida como geometría cuántica. Buscando describir la geometría del espacio-tiempo granulado se han desarrollado otras formulaciones matemáticas como la geometría no-conmutativa.

En estas formulaciones de la geometría cuántica se puede introducir un parámetro de longitud, como la longitud de Planck L_P que indicará la desviación de la geometría cuántica respecto a la geometría de Riemann. Esta se recuperará en el límite de $L_P \rightarrow 0$. Las ecuaciones que describen las partículas y los campos llevarán a predicciones involucradas en el factor L_P que podrán ser sometidas a la prueba experimental para confirmarse o descartarse las hipótesis de cuantización del espacio-tiempo.

La cuantización del campo gravitacional corresponde a la “granulación” del espacio-tiempo. Con esto tendríamos que el espacio y el tiempo no son continuos sino que existen en paquetes de dimensiones que tienen un valor mínimo.

En este caso tendríamos elemento de volumen y de tiempo que ya no podremos dividir más. El espacio y el tiempo se vuelven discretos. Podríamos decir que existen partículas de espacio. Lo mismo podemos decir del tiempo, que serían partículas de tiempo. En la TGR cuantizada lo que tendríamos serían partículas de espacio-tiempo. A la mínima longitud espacial que se puede tener se le llama longitud de Planck y tiene un valor de 10^{-33} centímetros. Para el caso del tiempo el valor mínimo es de 10^{-43} segundos, que es llamado el Tiempo de Planck.

La cuantización del espacio-tiempo es una idea que está presente en las teorías de gran unificación. Uno de los procedimientos para cuantizar una teoría es el de asociar operadores a las variables dinámicas de la teoría. La cuantización se obtiene cuando los operadores no conmutan. En el caso de la teoría general de la relatividad las coordenadas espaciales y temporales conmutan, es por esto que el espacio-tiempo aparece como continuo y que ambas variables, espaciales y temporales se pueden medir simultáneamente. Si queremos cuantizar el espacio tiempo, necesitamos asociar operadores tanto a las coordenadas espaciales como a las temporales. Con esto se consigue que los valores de las coordenadas espaciales y temporales, sean en general discretas y sus valores correspondan a los eigenvalores o valores propios de los operadores

asociados a ellas. Los valores del tiempo y del espacio serían entonces discretos. Por ser operadores, el tiempo y las coordenadas espaciales no conmutan entre ellas dando lugar a una geometría no conmutativa del espacio-tiempo.¹⁴

El espacio-tiempo se manifiesta ahora como una malla o enrejado con longitud mínima y tiempo mínimo, teniendo valores discretos tanto el tiempo como el espacio. La geometría que describe este espacio sería una geometría cuántica y por supuesto, no-euclidiana. Dicho sea de paso, este es el camino seguido por la teoría de cuerdas de la física moderna, donde las partículas tienen asociadas cuerdas de longitud mínima.

EL PROGRAMA DE HILBERT PARA LA MATEMÁTICA

El matemático alemán David Hilbert (1862-1943) se propuso determinar el significado de la verdad. ¿Qué es la verdad? se preguntaba. Para dar respuesta a esta pregunta se planteó como meta la formalización de toda la matemática en forma axiomática. Debido a que las geometrías no-Euclidianas derrumbaron las ideas sobre las verdades evidentes de las que hablaba Euclides en su libro de geometría, Hilbert estableció que toda la matemática se debe establecer en forma rigurosa partiendo de un conjunto de axiomas, independientes, compatibles entre sí y completo. Siguiendo este formalismo lógico se garantizaría que todos los resultados obtenidos, serían estrictamente verdaderos (consistentes) como lo serían los axiomas de los cuales partió la estructura matemática.

El matemático Kurt Gödel, conocido en el mundo matemático como The Spoiler, porque encontró defectos en la formulación lógica de la matemática y, separadamente, les encontró problemas a algunas soluciones de las ecuaciones de Einstein en la teoría general de la relatividad. En el año de 1931, Gödel echaría abajo este proyecto de Hilbert al probar los teoremas que llevan su nombre: de inconsistencia y de incompletitud de Gödel. Estos teoremas establecen que encontrar un conjunto de axiomas consistentes y completos para toda la matemática es imposible. Con estos resultados, el Programa de Hilbert fue descartado.

¿Cuál es la verdadera geometría? se preguntaba Hilbert. ¿Cómo puede responderse esta pregunta? A priori o a posteriori. A posteriori significaría que la geometría es una ciencia experimental. Una respuesta a priori significaría apoyarse en conceptos filosóficos.

Intentos por determinar la estructura geométrica del espacio físico han sido realizados usando mediciones astronómicas, apoyándose en la medición de los ángulos de triángulos muy grandes. Partiendo del hecho de que para construir un triángulo necesitamos tres puntos, encontramos que el triángulo más grande que se puede construir desde la Tierra es aquel que toma dos puntos opuestos en un diámetro de la órbita terrestre alrededor del sol y un tercer punto en una estrella muy alejada. Al medir los ángulos y sumarlos, podremos determinar la curvatura del espacio. Si la suma es igual, menor o mayor a 180 grados, tendremos un espacio euclidiano, hiperbólico o elíptico. Hasta el momento no se han encontrado desviaciones de la geometría euclidiana. Es importante distinguir la geometría local del espacio-tiempo, cercana a una estrella de gran masa, la cual no es euclidiana, de la geometría a gran escala del universo.

La respuesta a la pregunta ¿cuál es la geometría verdadera? la dio Hilbert con base a que la geometría está construida como una estructura lógico-formal. Hilbert logró re-formular los axiomas de la geometría dando una mayor formalidad a las ideas y dejando en claro que no hay una sola geometría, sino que, por el contrario, la norma es que haya tantas geometrías como conjuntos de axiomas compatibles e independientes puedan establecerse¹⁵. Todas las geometrías posibles serán tan verdaderas como los axiomas o postulados sobre los cuales descansan.

REFERENCIAS

1. Jurgensen, Ray, Donnelly, Alfred y Dolciani, Mary, Geometría Moderna, Publicaciones Culturales S. A., 1977
2. Kant, Immanuel, Crítica de la Razón Pura. Ediciones Colihue, Buenos Aires, Argentina, 2007.
3. Stefan Kulczycki, Non-Euclidean Geometry, Dover, 2008.

4. Greenberg, Marvin Jay, Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and History, 3rd Ed. 1994.
5. Thomas L. Heath, Euclid the thirteen books of the elements, Dover, 1956.
6. Barrett ,John F., The Hyperbolic Theory of Special Relativity, arXiv.org 2019.
7. Schutz, Bernard, A. first course in general relativity, Cambridge University Press 2022.
8. Noronha, Maria H. “Euclidean and Non-Euclidean Geometries”, Prentice Hall, New Jersey, 2002.
9. Varilly, Joseph C., An introduction to noncommutative geometry, Amer Mathematical Society, 2006.
10. Kline, Morris, Mathematics. The loss of certainty Matemáticas. Oxford University press, New York.,1985.
11. Poincaré, Henri, La ciencia y la hipótesis, Colección Austral, 1963.
12. Chamseddine, Ali, et al Advances in Noncommutative Geometry, Springer (2019).
13. Lucas C.Céleri and Vasileios I. Kiosses Physics Letters B, Volume 781, 10 June 2018, Pages 611-615.
14. Connes, Alain, Noncommutative Geometry, Academic Press, 1994.
15. Hilbert, David The Foundation of Geometry, MJP Publisher, 2021.

Augmented reality to guide pedestrian evacuation in earthquake events

Diego F. Rivera-Hernández ^a, Julián A. Durand-González ^a, Clara E. Isaza ^b,
Mauricio Cabrera-Ríos ^a

^a University of Puerto Rico at Mayagüez, The Applied Optimization Group,
Industrial Engineering Department,

^b Biology Department, Mayagüez, PR

diego.rivera22@upr.edu, julian.durand@upr.edu, clara.isaza@upr.edu, Mauricio.cabrera1@upr.edu

ABSTRACT

Augmented Reality is a promising technology to support safe pedestrian evacuation from buildings during earthquakes. The widespread availability of phone cameras makes this idea feasible. QR codes, for instance, can place virtual three-dimensional objects to guide people along a prescribed route. In this work, a prototypical system based on this premise was created in response to the 2020 sudden surge in seismic activity in Puerto Rico. The results point towards feasibility as well as to a series of areas that require improvement for a real-life implementation.

KEYWORDS

Augmented reality, pedestrian evacuation, earthquakes, emergencies.

RESUMEN

La realidad aumentada es una tecnología promisoría para habilitar la evacuación segura de personas durante un sismo. La amplia disponibilidad de teléfonos móviles con cámara refuerza la factibilidad de tal idea. Es posible, por ejemplo, utilizar códigos QR para configurar objetos virtuales tridimensionales que guíen a las personas hacia una ruta prescrita. Basados en esta premisa, este trabajo describe un sistema prototípico creado en respuesta al sorpresivo aumento de actividad sísmica experimentado en Puerto Rico en el 2020. Los resultados indican su factibilidad, así como una serie de mejoras que se deben atender ante una instauración en la vida real.

PALABRAS CLAVE

Realidad aumentada, rutas de evacuación, sismos, emergencias.

INTRODUCTION

Earthquakes are one of life's most sudden and impactful events in the modern world. In a society that has managed to comprehend and prevent most of nature's challenges, the existence of events so disastrous and without warning is terrifying. These natural disasters have taken the lives of approximately 750 thousand people between 1998-2017 in the world, that is over half of all lives lost due to natural disasters.¹ The majority of these deaths are caused by structural collapses, which crush or trap victims. This tells us that an important course of action to save lives is to evacuate at-risk buildings as fast and safe as possible.

Staying in a building after an earthquake, even if no structural damage is observed, is dangerous as many earthquakes cause aftershocks that could make the building collapse. These aftershocks can start just minutes after the earthquake. For these reasons we want to evacuate people through the fastest and safest routes possible. There are cases where an escape route could be fast and efficient, but it is obstructed from view or hidden in a rarely transited hallway. The opposite might also be true, where a route is accessible and obvious but is nowhere near as fast and safe as it should be, leading to blockages and harm during an actual escape situation.

In Puerto Rico, between December 1 2019 and January 15 2021 there were more than 12,000 earthquakes.² This was roughly three times the annual average frequency measured between 2014 and 2018. The strongest ones reached magnitudes above 5.5 Mw. It was initially estimated that nearly 800 buildings were destroyed or severely damaged in association with the first months of occurrence of these events.³ Due to this sudden surge of seismic activity, it became necessary to renew our attention to safety protocols, evacuation pathways, tsunami awareness, and prevention in the general population. In January 2020, our university had a three-week delay to return to classes to allow for inspection of

buildings and revision of safety guidelines. Pedestrian evacuation was, indeed, a key concern. This problem has been described and studied thoroughly in the literature,⁴ however, because of the usual chaos surrounding the situation,⁵ pedestrian evacuation is still an area where multiple approaches can still contribute to its solution.^{5,6} In this context, this work examines the use of augmented reality (AR) to guide people evacuation from a building in the occurrence of an earthquake. A prototypical solution with these characteristics developed for the Industrial Engineering building of the University of Puerto Rico at Mayaguez is described here. One important reason why AR became an option to be explored is the fact that any modification of the building in question is highly regulated due to its architectonic value. Noninvasiveness, simplicity, as well as effectiveness needed to be imbedded in any solution.

Selection of a plausible guiding system for evacuation

Navigation of building layouts can be difficult during and after an earthquake. Be it the complexity of the building or the rushed mindset, people tend to not follow designated emergency escape routes in an actual emergency.⁵ Although it is a standard safety practice to have a map for emergency routes posted in buildings in the US and Puerto Rico, during an emergency, consulting it is not practical. On the other hand, physically placing additional signs is often balanced against the aesthetics, architectural and functional restrictions of a particular structure. A possible solution lies in the form of scannable QR codes that could project a series of arrows using augmented reality (figure 1) to follow a safe evacuation route. This solution would capitalize in the wide availability of camera-ready mobile phones and the recently gained experience of users who became acquainted with QR code scanning in restaurants during the Covid19 pandemic. Implementing this technology has the possibility of reducing confusion during an emergency. Furthermore, the number of arrows that could be placed is virtually limitless and potentially long-lasting.

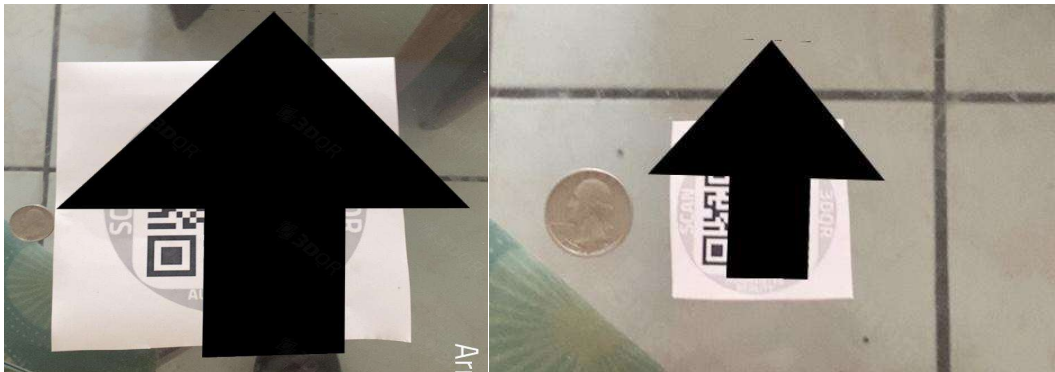


Fig. 1. The scanning of a QR code can generate an orientable arrow pointing in the desired direction of evacuation. The size of the arrow is proportional to the size of the printed QR code.

In order to solve the issue of quick navigation using AR, various alternatives were considered to ensure that people would evacuate safely and as fast as possible. The first alternative was that of utilizing wireless network's tracking capabilities. This seemed like a good idea due to most complex buildings having a pre-existing WIFI network, which would in turn imply low cost. The reason why this alternative was eventually discarded was due to the imprecise nature of WIFI tracking, which could be off by up to 5 meters. This presented a major problem in multilevel buildings as the system could place a person in the wrong floor resulting in erroneous directions. Another alternative considered was the utilization of Bluetooth beacons. These beacons were much more precise at determining the user's position, but their range was severely lacking compared to WIFI positioning. This poses a problem with larger buildings as increasingly more beacons and larger maintenance costs would become necessary. The last alternative considered was the utilization of markers. These markers would be placed at hallway intersections and would have asymmetrical designs so that the phone camera would be able to make

clear distinctions based on the position of the user with respect to the marker. This alternative had a similar problem to Bluetooth beacons as each marker would have to be asymmetrical and distinct in design, leading to higher costs and, importantly, it defeated the purpose of making the process virtual. Finally, the method that was selected was that of QR codes together with an already established augmented reality scanner, in this particular case, 3DQR. The idea was to place printed codes at designated places where they could be easily scanned. This method was selected due to the availability of the software, since it could easily be downloaded for free, with low startup and maintenance costs. figure 2 shows one of the capabilities of this combination.

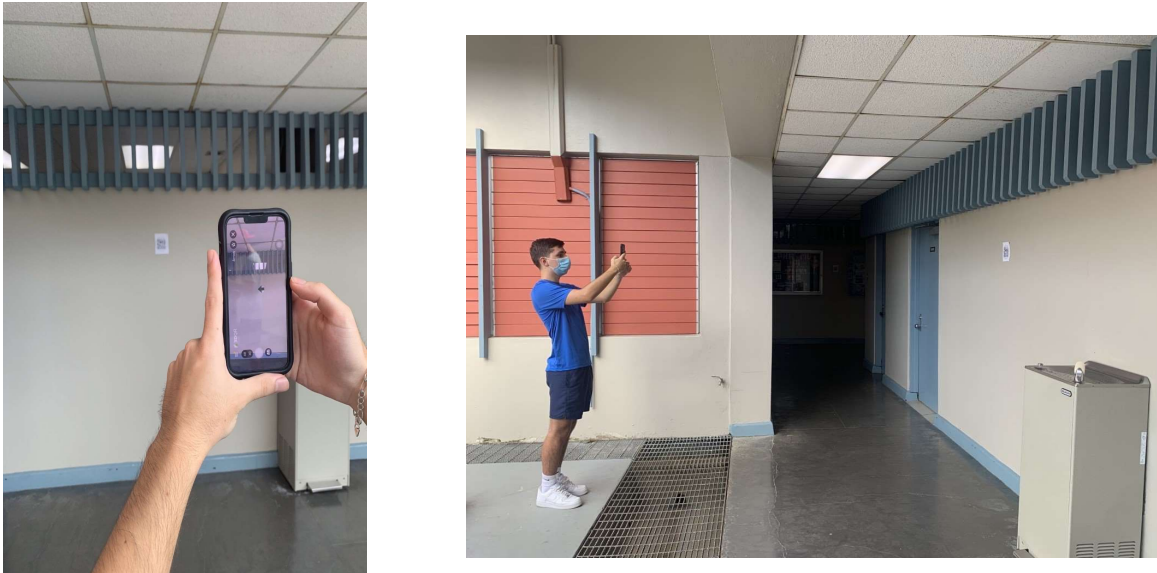


Fig. 2. A QR code of approximately 6 inches (15.2 cm) per side has a scannable range of about 7 feet (2.13 m)

MARSHALING THE PROTOTYPICAL AR SYSTEM

In the selection process described previously, the 3DQR app was favored over other applications because it can take advantage of file types varying from .jpgs to 3D models in .fbx (Autodesk Kaydara FilmBox Digital Content file). The creation of a QR code was next. When scanned using the 3DQR app on a mobile phone, an arrow pointing in the direction of the best evacuation route is displayed. The QR codes, and thus the arrows, are placed about 10 ft (3.05 m) apart. Once the phone scans the first arrow, it downloads the augmented reality object and projects it on the screen. For every subsequent code reading, the arrow will have already been downloaded on the phone and it should load faster or just re-orient the last arrow shown on screen. Compared to the option of reading an evacuation map in a single location during an emergency, the prototypical system is easier to grasp under those circumstances as illustrated in figure 3.

The app also supports direct links for websites or google docs. These links add versatility on the information that could be shared during and after an emergency. Links can be embedded in AR pictures as well. This opens many possibilities to have information available at different points in time if necessary.



Fig. 3. Following the 3DQR arrows (right) is simpler and less time consuming than traditional fire escape maps (left). Other printings can be used to denote dangerous paths if necessary.

Preliminary Evaluation

The proposed system was preliminarily tested in the building under discussion using ten subjects organized in two groups: the first five were instructed to individually evacuate the building without further instructions (control) and the other five were instructed to individually evacuate using the QR codes (treatment). It must be noted that all subjects were already familiar with the building, although not necessarily with an official evacuation route. Timewise, the group using the QR codes took a median of 13.88 more seconds to leave the building than the control group (One-sided Mann-Whitney Test for the Difference of Medians of Two Groups, $p\text{-value} = 0.015$). According to our observations, the slower times had to do with the initial download of the arrow as well as the attention paid by the users to the movement of the arrow in their screens. In a follow-up run, with a pre-loaded arrow in the phone, one subject timed almost two seconds below the control group's previous median time. This tells us that with preparation and planning, it is possible for the proposed system to be more efficient. In an encouraging result, it is also reported that all subjects following the proposed system evacuated the building through the prescribed path, which was not the case for all the subjects in the control group.

CONCLUSIONS AND FUTURE WORK

This project is intended to be a proof of concept for the use of Augmented Reality to aid pedestrian evacuation during and after emergencies such as earthquakes. The prototypical system, based on QR codes, has the benefits of being low cost, low maintenance, and easily scalable. It is envisioned that with these characteristics, every building on campus could be furnished with a similar AR-based system. The step of downloading the right app can be made preemptively to facilitate the use of the proposed strategy.

REFERENCES

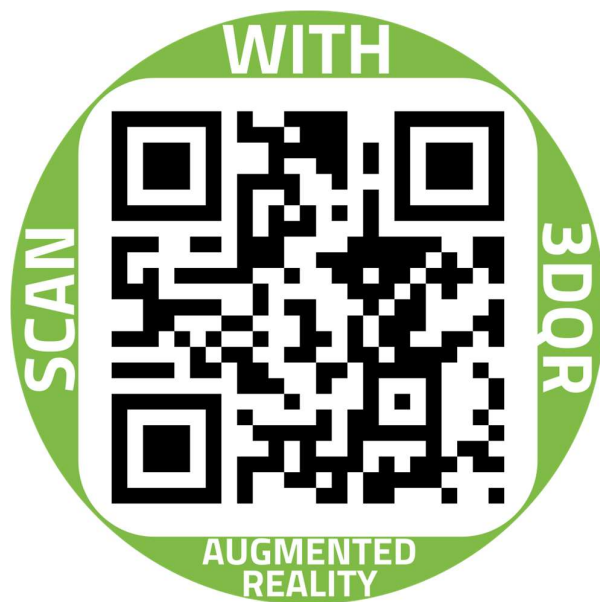
1. "Earthquakes." World Health Organization, World Health Organization, https://www.who.int/health-topics/earthquakes#tab=tab_1.
2. Huanca S., Trespalacios R., Acevedo Z., Alizo D., Nieves A., Isaza C. and Cabrera-Ríos, M., Statistical Exploration of Seismic Data in Puerto Rico from December 2019 to January 2021, RIDNAIC, 22:1, 2022. URL https://www.scipedia.com/public/Cabrera-Rios_et_al_2022a.
3. Figueroa A., Estudio Preliminar Apunta a 800 Casas Afectadas por Sismos, El Nuevo Día Newspaper, Wednesday January 15 2020, Section Locales

(<https://www.elnuevodia.com/noticias/locales/notas/estudio-preliminar-apunta-a-800-casas-afectadas-por-sismos/>).

4. Vermuyten H., Belien J., De Boeck L., Reniers G., Wauters T., A Review of Optimisation Models for Pedestrian Evacuation and Design Problems, *Safety Science*, 87: 167-178, 2016.
5. Zhu Y., Chen T., Ding N., Chraibi M., Fan W., Follow people or signs? A novel way-finding method based on experiments and simulation, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 573:125926, 2021.
6. Chen M., Yang R., Tao Z., Zhang P., Mixed Reality LVC Simulation: A New Approach to Study Pedestrian Behaviour, *Building and Environment*, 207 Part B:108404, 2021.

ACKNOWLEDGMENTS

This research was performed under an appointment to the U.S. Department of Homeland Security (DHS) Science & Technology (S&T) Directorate Office of University Programs Summer Research Team Program for Minority Serving Institutions, administered by the Oak Ridge Institute for Science and Education (ORISE) through an interagency agreement between the U.S. Department of Energy (DOE) and DHS. ORISE is managed by ORAU under DOE contract number DE-SC0014664. All opinions expressed in this paper are the author's and do not necessarily reflect the policies and views of DHS, DOE or ORAU/ORISE.



<https://3dqr.de/en/>

Colaboradores

Alcorta García, Efraín

Es Ingeniero y Maestro en Ciencias por la Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL), y el grado de Dr.-Ing. en Ingeniería Eléctrica de la Universidad Gerhard Mercator de Duisburg, Alemania, 1999. Desde 1999 es profesor en control. Áreas de interés incluyen el control automático y control con tolerancia a fallos.

Cabrera-Rios, Mauricio

Obtuvo la Maestría en Ciencias y el Doctorado en Ingeniería Industrial y de Sistemas en The Ohio State University (OSU) en 1999 y 2002, respectivamente. Su Bachillerato fue en la misma disciplina en el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM) en México (1996). Realizó el postdoctorado en OSU del 2002 al 2003. Profesor Investigador en el Programa de Posgrado en Ingeniería de Sistemas de la Universidad Autónoma de Nuevo León, México del 2003 al 2008. Es Catedrático en el Departamento de Ingeniería Industrial y en el Programa Graduado de Bioingeniería en la Universidad de Puerto Rico – Mayagüez (UPRM). Codirector de The Applied Optimization Group. Sus intereses incluyen: Caracterización, la modelación y la optimización multicriterio de sistemas de manufactura, biológicos y decisionales.

Cardona Ortiz, Sergio Alberto

Estudiante de Ingeniero en Mecatrónica de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la UANL. Actualmente labora en Métrica Industrial, S.A. de C.V.

Castillo Martínez, Rodolfo

Maestro en Ciencias en Ingeniería Eléctrica e Ingeniero en control y computación por la UANL

1995 y 1976 respectivamente. Profesor en el área de Control desde 1976. Sus áreas de interés incluyen temas del control automático y de la electrónica de potencia.

Chacón Rendón, César de Jesús

Bachiller técnico en Diseño y Comunicación Visual (2016), en la Escuela Industrial y Preparatoria Técnica Pablo Livas. Es estudiante del programa Ingeniero en Electrónica y Automatización, en la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, de la Universidad Autónoma de Nuevo León.

Díaz Romero, David Alejandro

Doctorado en control automático y sistemas por la Universidad de Sheffield, Reino Unido, licenciatura y maestría por la UANL en temas afines. Profesor de tiempo completo en el departamento de control de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la UANL. Áreas de interés: control automático, topología y aplicaciones.

Durand-González, Julián A.

Es estudiante del Bachillerato de Ingeniería Industrial (ININ) en la Universidad de Puerto Rico – Mayagüez (UPRM). Miembro de The Applied Optimization Group. Sus intereses incluyen la manufactura, la optimización y la estadística.

Isaza, Clara E.

Obtuvo el Bachillerato en Física en la Universidad de los Andes, Colombia en 1996 y el Doctorado en Biofísica en The Ohio State University en el 2005. Actualmente es Catedrática Auxiliar en el Departamento de Biología de la Universidad de Puerto Rico – Mayagüez (UPRM). Fue Profesora Investigadora en la Facultad de Ciencias Biológicas

de la Universidad Autónoma de Nuevo León, México del 2005 al 2008. Entre el 2014 y 2015 realizó el Postdoctorado en Ponce Health Sciences University, después del cual fungió como Catedrática Auxiliar del Programa de Salud Pública (2015-2021) y del Departamento de Ciencias Básicas (2017-2021) en la misma universidad. Codirectora de The Applied Optimization Group. Sus intereses incluyen el Análisis de Datos Biológicos, la Biofísica, el estudio de condiciones neurodegenerativas y su posible relación con infecciones virales, así como la Salud Pública.

López Guerrero, Francisco Eugenio

Ingeniero Mecánico Electricista e Ingeniero en Control y Computación de la UANL, Maestro en Ciencias de la Administración con especialidad en Sistemas por la misma Universidad, durante estos estudios participó en la Universidad Técnica de Hamburgo, Alemania en donde desarrolló su tesis de maestría. Doctor en Ingeniería de materiales en la Universidad Autónoma de Nuevo León trabajando en conjunto con el Departamento de Materiales y Automatización de la Universidad Técnica de Hamburgo, Alemania. Profesor de tiempo completo de la División de Ingeniería Mecatrónica de la FIME. Miembro del Cuerpo Académico “Sistemas Integrados de Manufactura”.

Morones Ibarra, José Rubén

Es Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas por la Universidad Autónoma de Nuevo León. Obtuvo el Doctorado en Física en el área de Física Nuclear Teórica, por la University of South Carolina, USA. Actualmente es profesor investigador de tiempo completo en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la UANL. Pertenece al Sistema Nacional de Investigadores con Nivel I y es Miembro Regular de la Academia Mexicana de Ciencias.

Ramírez Cruz, Francisco

Ingeniero Mecánico Electricista egresado de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la UANL, Es Maestro en Ciencias de la Mecatrónica de la Universidad Técnica de Hamburgo, Alemania. Dirigió el departamento de Somatoprótesis de la Facultad de Medicina de la UANL. Doctor en Ingeniería de Materiales en la UANL trabajando en conjunto con el Departamento de Materiales

y Automatización de la Universidad Técnica de Hamburgo, Alemania. Profesor de tiempo completo del Departamento de Mecatrónica de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. Miembro del Cuerpo Académico “Sistemas Integrados de Manufactura”.

Rivera-Hernández, Diego F.

Es estudiante del Bachillerato de Ingeniería Industrial (ININ) en la Universidad de Puerto Rico – Mayagüez (UPRM). Miembro de The Applied Optimization Group. Sus intereses incluyen los sistemas de información, manufactura y la estadística.

Rivera Rocha, Moicés

Ingeniero Mecánico Electricista de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la UANL. Actualmente labora en Métrica Industrial, S.A. de C.V.

Rodríguez Alfaro, Luis Humberto

Obtuvo el grado de Doctor en Ingeniería Eléctrica por la Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL), en 2014. Desde 2013 es profesor en la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la UANL. Sus áreas de interés son el diseño y aplicación de algoritmos de control para sistemas eléctricos.

Rodríguez Cruz, Francisco Antonio

Actualmente es estudiante en el programa Ingeniero en Electrónica y Automatización en la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, de la Universidad Autónoma de Nuevo León.

Rodríguez-Liñan, Angel

Ingeniero en Electrónica y Comunicaciones (2003), Maestro en Ciencias de Ingeniería Eléctrica con especialidad en Control (2005) y Doctor en Ingeniería Eléctrica (2009) por la FIME, UANL. Pertenece al Cuerpo Académico Tecnología e Innovación Mecatrónica. Desde 2005 es catedrático de FIME, desde 2009 Profesor de Tiempo Completo en el Centro de Innovación, Investigación y Desarrollo en Ingeniería y Tecnología, y desde 2012 en el Posgrado de FIME. Obtuvo el Premio de Investigación UANL 2009. Desde 2011 fue reconocido por PRODEP y SNI. Sus áreas de interés son análisis, estimación y control de sistemas dinámicos, robótica y biomecatrónica.

Información para colaboradores



Se invita a profesionistas, profesores e investigadores a colaborar en la revista *Ingenierías* con: artículos de divulgación científica y tecnológica, artículos sobre los aspectos humanísticos del quehacer ingenieril y reportes de investigación.

El envío de artículos a la revista *Ingenierías* para su publicación implica el ceder los derechos de autor a la UANL.

Es requisito que las colaboraciones sean producto del trabajo directo de los autores estableciendo claramente su contribución; y que estén escritas en un lenguaje claro, didáctico y accesible. Las contribuciones no deberán estar redactadas en primera persona.

Todos los artículos recibidos estarán sujetos a arbitraje de tipo doble anónimo siendo el veredicto inapelable. Los criterios aplicables a la selección de textos serán: originalidad, rigor científico, exactitud de la información, el interés general del tema expuesto y la claridad del lenguaje. Los artículos aprobados serán sujetos a revisión de estilo.

CRITERIOS EDITORIALES

Los autores de artículos de revisión o divulgación deberán contar con una producción directa reconocida en la temática de interés de la revista. Estos trabajos deben ofrecer una panorámica del campo temático, separar las dimensiones del tema, mantener la línea de tiempo y presentar una conclusión que derive del material presentado.

Las contribuciones sobre modelación y simulación deben estar científicamente dentro del propio trabajo.

Los trabajos con base en encuestas de opinión o entrevistas describiendo su impacto social, especialmente en áreas relacionadas con la ingeniería, deberán incluir la metodología y aspectos estadísticos tanto para su diseño como para el análisis de las mediciones y resultados, así como la validación de las correlaciones que pudieran presentarse.

No se consideran para publicación protocolos de investigación, proyectos, propuestas o trabajos de carácter especulativo.

Los artículos a publicarse en partes, deben enviarse al mismo tiempo, pues se arbitrarán juntas.

LINEAMIENTOS EDITORIALES

Es requisito enviar para su consideración editorial: artículo, material gráfico, fichas biográficas de cada autor con un máximo de 100 palabras, en formato electrónico .doc en Word, por *e-mail* a la dirección:

revistaingenierias@uanl.mx

El título del artículo no debe exceder de 80 caracteres. El número máximo de autores por artículo es cinco. La extensión de los artículos no deberá exceder de 15 páginas tamaño carta (incluyendo gráficas y fotos) en tipografía Times New Roman de 11 puntos a espacio sencillo.

Los artículos deben incluir un resumen tanto en español como en inglés, de no más de 100 palabras, así como un máximo de 5 palabras clave tanto en español como en inglés. Las referencias deberán ir numeradas en el orden citado en el texto.

Las fichas bibliográficas incluirán, en orden, los siguientes datos: Autores o editores, título del artículo, nombre del libro o de la revista, lugar, empresa editorial, año de publicación, volumen y número de páginas.

Debe incluirse al menos una imagen o gráfica por página, con resolución de al menos: 300 dpi y 15 cm en su lado más pequeño. Las imágenes además de estar incluidas en el artículo, deben enviarse en archivos individuales en formato .tif, .eps o .jpg

CONTACTO

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Universidad Autónoma de Nuevo León,
Edificio 7, primer piso, ala norte.

Tel.: 8329-4000 Ext. 5854

E-mail: revistaingenierias@uanl.mx

Autores

Los autores deben presentar una narración concisa y exacta del trabajo desarrollado, así como una discusión objetiva de su significado intelectual y científico.

Los autores deben abstenerse de ofrecer manuscritos que se encuentren en consideración por otras publicaciones.

Los autores deben incluir en su manuscrito detalles suficientes y referencias a fuentes de información públicas para hacer posible la reproducción del trabajo por terceros.

Los autores deben abstenerse de presentar críticas personales en sus trabajos.

Los autores deben citar aquellas publicaciones que son antecedentes esenciales para comprender el trabajo.

Los autores deben abstenerse de incluir información que hayan obtenido mediante comunicación privada que no se localice en publicaciones.

Los autores deben abstenerse de incluir información que hayan obtenido de manera confidencial sin el permiso explícito correspondiente.

Los autores deben abstenerse de incluir información obtenida en el proceso de servicios confidenciales, tales como documentación para concursos o solicitudes de becas.

Los autores deben abstenerse de citar publicaciones que no se relacionen o que sólo se relacionen remotamente con la materia.

Los autores deben abstenerse de incluir como autores a terceros que no cumplan con el criterio de coautoría, el cual consiste en su contribución significativa al desarrollo y preparación del trabajo.

Los autores deben incluir a los coautores fallecidos que cumplan con el criterio de coautoría, asentando la fecha de su muerte.

Los autores deben incluir a los coautores que hayan cambiado de afiliación durante el proceso de preparación y publicación del documento y que cumplieron con el criterio de coautoría, señalando el evento en una nota.

Los autores deben reconocer mediante una nota de agradecimiento el apoyo de las instituciones y organismos que hayan contribuido significativamente al desarrollo del trabajo, así como a colaboradores que hayan contribuido de manera importante, incluyendo a fallecidos o a quienes hayan cambiado de afiliación, pero sin que hayan llegado a cumplir con el criterio de coautoría, si los hubiera.

Los autores deben abstenerse de utilizar nombres ficticios o seudónimos.

Los autores deben responsabilizarse del material que presentan en su manuscrito.

Revisores

Los revisores deben declinar cualquier invitación para evaluar un manuscrito si no se consideran calificados, carecen de tiempo para juzgar o se les presenta algún conflicto de intereses, tal como encontrarse vinculados estrechamente a los autores o al trabajo a evaluar.

Los revisores deben manifestar al editor cualquier conflicto de intereses que detecten.

Los revisores deben considerar un manuscrito enviado para revisión como un documento confidencial.

Los revisores deben abstenerse de expresar críticas personales.

Los revisores deben explicar y apoyar sus juicios de manera suficiente para que el editor, los miembros de cuerpo editorial y los autores comprendan el fundamento de las observaciones.

Los revisores deben abstenerse de utilizar o difundir información, argumentos o interpretaciones no publicadas

contenidas en un manuscrito bajo consideración, excepto con el consentimiento expreso de los autores posteriormente al proceso de evaluación.

Los revisores deben considerar en su revisión posibles errores o fallas de los autores al citar el trabajo relevante de otros.

Los revisores deben informar al editor si encontraran alguna semejanza substancial entre el manuscrito y cualquier otro trabajo.

Los revisores no deberán intentar contactar a los autores, si hubieran inferido su identidad, previamente a haber emitido su fallo.

Editor

El editor debe dar consideración justa e imparcial a todos los manuscritos ofrecidos para su publicación, juzgando cada uno de sus méritos científicos o tecnológicos, sin prejuicios de raza, género, religión, creencia, origen étnico, ciudadanía, filosofía o política de los autores.

El editor debe considerar un manuscrito enviado para revisión como un documento confidencial.

El editor debe abstenerse de expresar crítica personal.

El editor debe explicar y apoyar su juicio final para que los autores comprendan el fundamento de las observaciones.

El editor debe abstenerse de utilizar la información no publicada, argumentos o interpretaciones desplegados en un manuscrito sometido, excepto cuando cuente con el permiso de los autores.

El editor deben abstenerse de desplegar información sobre un manuscrito en proceso de revisión o publicación a ninguna persona fuera de aquellos a los que se les solicite consejo profesional.

El editor debe respetar la independencia intelectual de los autores.

El editor debe procesar los manuscritos con diligencia.

El editor debe ejercer su responsabilidad y la autoridad para aceptar o rechazar un artículo enviado para su publicación.

El editor debe delegar en los miembros del consejo editorial o comité técnico la autoridad para aceptar o rechazar un artículo enviado para su publicación en casos en que se presente conflicto de interés con él.

El editor debe delegar la responsabilidad y autoridad editorial a alguno de los miembros de los consejos editoriales cuando él sea autor o coautor de un manuscrito que se somete a consideración de la revista.

Cuerpo Editorial

(Consejos Editoriales y Comité Técnico)

Los miembros del cuerpo editorial deberán estar dispuestos a otorgar consejo al editor en las situaciones requeridas.

Los miembros del cuerpo editorial deben declinar cualquier invitación para brindar consejo si se les presenta algún conflicto de intereses, tal como encontrarse vinculados estrechamente con los autores o con el trabajo a evaluar.

Los miembros del cuerpo editorial deben manifestar al editor cualquier conflicto de intereses que detecten.

Los miembros del cuerpo editorial deben considerar un manuscrito enviado para revisión como un documento confidencial.

Los miembros del cuerpo editorial deben abstenerse de expresar críticas personales.

Los miembros del cuerpo editorial deben explicar y apoyar sus juicios de manera suficiente para que el editor, los miembros de cuerpo editorial y los autores comprendan el fundamento de las observaciones.

Los miembros del cuerpo editorial deben abstenerse de utilizar la información no publicada, argumentos o interpretaciones desplegados en un manuscrito sometido, excepto cuando se cuente con el permiso de los autores.

Los miembros del cuerpo editorial deben abstenerse de desplegar información sobre un manuscrito en proceso de revisión o publicación a cualquier persona fuera de aquellos que se les solicite consejo profesional.

Los miembros del cuerpo editorial deberán respetar la independencia intelectual de los autores.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



FIME

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA